

# Kapitel 1

## Physikalische Größen und Einheiten

### 1.1 Einführung

Die Physik versucht erfolgreich die Gesetze, nach denen Vorgänge in der Natur ablaufen, durch Einführung von Begriffen und Beziehungen zwischen diesen Begriffen zu beschreiben. Diese Beziehungen werden mit Hilfe der Mathematik hergestellt. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

1. Beschreibung der Natur durch Begriffe:

Ein Begriff ist eine physikalische Größe, die man objektiv messen kann. Die menschlichen Sinnesorgane reichen i.a. nicht aus, um eine objektive Naturbeschreibung vorzunehmen. Es treten folgende Probleme auf:

- Die Beobachtung kann in ihrem Ergebnis von den Sinnesorganen abhängen. Beispiele für Sehtäuschungen sind die Spiralentäuschung (s.Versuch) und die mehrdeutigen Bilder (s.Versuch). Die zum Beobachter gelangende Information reicht nicht aus, um eine eindeutige Identifikation des Bildes vorzunehmen. Es kann beispielsweise je nach Beobachtung ein 2D-Muster oder aber ein 3D-Bild gesehen werden.
- Elektrische und magnetische Vorgänge werden von den menschlichen Sinnesorganen nicht - oder nur sehr unzureichend - erfaßt. Daher sind Meßgeräte nötig, die den Wahrnehmungsbereich über jenen der menschlichen Sinnesorgane hinaus erweitern (Nachweis von e.m. Strahlung, UV, Röntgen oder  $\gamma$ -Strahlung). Der Nobelpreis für Physik 1994 wurde z.B. für die Aufklärung von Festkörperstrukturen durch Neutronen-Streuung (Materialanalyse etc.) vergeben.

2. Verknüpfung der Begriffe zur Beschreibung von Gesetzmäßigkeiten in der Natur:

Diese Gesetzmäßigkeiten werden durch mathematische Funktionen hergestellt. Zum Glück ist die mathematische Beschreibung der uns interessierenden grundlegenden Zusammenhänge aber recht einfach. Notwendig sind:

- Grundrechenarten
- Spezielle Funktionen:
  - $\sin x$
  - $\cos x$

- $\exp x$
- $\ln x$
- Vektorrechnung:  
Addition bzw. Subtraktion sowie Skalar- und Vektorprodukt von Vektoren
- Differential- und Integralrechnung
- Zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:  
Schwingungsgleichung und Katastrophengleichung

## 1.2 Größen und Einheiten

Physikalische Größen dienen der Naturbeschreibung durch Begriffe, die man objektiv messen kann. Man unterteilt in:

- **Definition 1.1:** Skalare physikalische Größen  
*Eine skalare physikalische Größe ist ein Produkt aus einer Maßzahl (Zahlenwert) und einer Einheit:*

$$\text{Phys. Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

**Beispiel:** Zeitmessung in Sekunden

Die Einheit ist 1 Sekunde =:  $1\text{ s}$ . Als Maßzahl gibt man die Anzahl von Einheiten (hier: Sekunden) an, die zwischen zwei Zeitmarken verflossen sind. Bezeichnet man die Maßzahl mit  $n$ , so ist die Zeit  $t$  ( $t$ =time):

$$t = n \cdot s$$

- **Definition 1.2:** Vektorielle physikalische Größen  
*Bei diesen Größen muß man neben Maßzahl und Einheit noch eine Richtung angeben. Solche Größen sind Vektoren.*

**Beispiel:** Geschwindigkeit

Man muß angeben, wie schnell man sich in welche Richtung bewegt.

### Basisgrößen und -einheiten:

Die Festlegung einer Einheit ist reine Willkür. Eine vernünftige Wahl der Einheiten erfordert jedoch, daß jedermann sie kennen und verwenden und die Einheit reproduzierbar festgelegt sein muß. Man hat sich international im Jahre 1960 auf das SI-Einheiten-System geeinigt. SI steht für den französischen Ausdruck "Systeme International d' Unités". Es verwendet folgende Basisgrößen und Basiseinheiten:

Basisgröße	Basiseinheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Stoffmenge	Mol	mol
Temperatur	Kelvin	K
El.Stromstärke	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	cd

Im folgenden werden die Definitionen der Basiseinheiten, die im Kapitel 2 benötigt werden, angegeben. Die übrigen Basiseinheiten werden später, wenn sie benötigt werden, eingeführt.

- Basisgröße Zeit:

**Definition 1.3:** Sekunde

*1 Sekunde (1s) ist das 9192631770-fache der Schwingungsdauer, die zum Strahlungsübergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur (HFS)-Niveaus des  $^{133}\text{Cs}$ -Isotops gehört.*

Die Unsicherheit in der Realisierung beträgt  $10^{-14}$ . Es stellt sich die Frage, was physikalisch passiert. Ein Atom (Cs) ändert seinen Zustand. Dabei wird elektromagnetische Strahlung einer bestimmten Frequenz ausgesandt. Ihre Frequenz sei  $\nu$ . Dann ist die Schwingungsdauer  $T = \frac{1}{\nu}$ . In Formeln ausgedrückt:

$$1 \text{ s} = 9192631770 \cdot T(^{133}\text{Cs}) \approx 9.192 \cdot 10^9\text{-fache Schwingungsdauer des HFS-Übergangs}$$

- Basisgröße Länge:

**Definition 1.4:** Meter

*1 Meter (1m) ist diejenige Strecke, die das Licht im Vakuum während des Zeitintervalls von 1/299792458 Sekunden zurücklegt.*

Damit hat man den Wert der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit,  $c_0$ , auf den Wert  $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$  festgelegt. Die Unsicherheit in der Realisierung liegt wieder bei  $10^{-14}$ .

- Basisgröße Masse:

**Definition 1.5:** Kilogramm

*1 Kilogramm (1kg) ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.*

Die Unsicherheit der Realisierung liegt bei  $10^{-9}$ . Dabei handelt es sich um einen Normkörper aus Pt-Ir, einen Zylinder mit 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser. Dieser wird in Paris aufbewahrt und sollte eigentlich dieselbe Masse wie  $1 \text{ dm}^3$  Wasser bei  $4^\circ \text{C}$  besitzen.

### Unterteilung der Einheiten :

Die Maßzahlen werden durch international vereinbarte "Vorsätze" unterteilt. Eine Tabelle der Abkürzungen zur Unterteilung bzw. zu Vielfachen der Einheiten siehe z.B. Tab.1.3 aus dem Lehrbuch von Niedrig.

### Abgeleitete physikalische Größen:

Alle weiteren physikalischen Größen sind abgeleitete physikalische Größen.

**Definition 1.6:** Dimension

*Das die physikalische Größe kennzeichnende Potenzprodukt aus Basisgrößen heißt ihre Dimension.*

**Beispiel:** Geschwindigkeit

Die Dimension der Geschwindigkeit ist Länge/Zeit.

Die Einheiten der abgeleiteten physikalischen Größen sind damit aus jenen der Basisgrößen zusammengesetzt. Sie folgen aus den sie definierenden Beziehungen zwischen den Basisgrößen.

**Beispiel:** Geschwindigkeit

Die Einheit der Geschwindigkeit ist 1 Meter/1 Sekunde =  $1 \text{ m/s}$



# Kapitel 2

## Teilchen und Teilchensysteme I: Massenpunktmechanik

### 2.1 Kinematik

Wir wollen nun die Bewegung einzelner Massenpunkte etwas näher betrachten.

**Definition 2.1:** Massenpunkt

*Ein Massenpunkt ist ein idealisierter Körper, dessen gesamte Masse in einem mathematischen Punkt vereinigt ist.*

Die Lage (der Ort) eines Massenpunktes zu einer bestimmten Zeit  $t$  kann durch einen zeitabhängigen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  angegeben werden. Dabei kann  $\vec{r}(t)$  durch seine Komponenten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden.

Im folgenden interessieren wir uns für die Größen, welche die Bewegung eines Massenpunktes beschreiben. Diese sind:

- der Weg  $\vec{s}(t)$
- die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$
- die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$

**Kurze Einführung in die Vektorrechnung:**

Um ein möglichst gutes Verständnis der in diesem Kapitel dargestellten Sachverhalte zu gewährleisten, sollte man die folgenden Grundlagen der Vektorrechnung ausreichend beherrschen.

**Definition 2.2:** Vektor

*Ein Vektor läßt sich durch eine gerichtete Strecke, d.h. durch einen Pfeil darstellen. Seine Länge ist durch die Maßzahl der zugehörigen physikalischen Größe gegeben.*

Vektorpfeile, die die gleiche Richtung und Länge haben, stellen denselben Vektor dar. Vektoren dürfen i.a. im Raum verschoben werden. Physikalisch ändert sich dann nichts.

**Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl:**

Eine Multiplikation von  $\vec{r}$  mit der reellen Zahl  $a$  ergibt den Vektor  $a\vec{r}$ . Die Richtung bleibt mit Ausnahme des Vorzeichens immer erhalten:

- Die Länge wird mit dem Betrag von  $a$  multipliziert.
- Zur Richtung: Ist  $a < 0$ , so kehrt sich die Pfeilrichtung um.

**Addition von Vektoren:**

Vektoren addiert man durch die Aneinanderreihung der Pfeile. Für Addition und Subtraktion ergibt sich damit die in Abbildung 2.1 dargestellte Situation. Man erhält den Vektor  $-\vec{b}$  aus  $\vec{b}$  durch Multiplikation mit der Zahl  $a = -1$ .

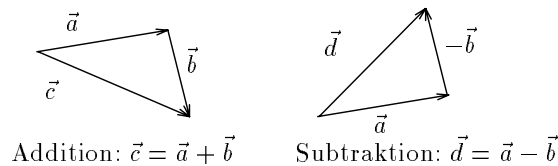


Abbildung 2.1: Addition und Subtraktion von Vektoren

**Linearkombination von Vektoren:**

Sind die Größen  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  Vektoren und  $a_1, \dots, a_n$  reelle Zahlen, so ist die Linearkombination  $a_1\vec{r}_1 + a_2\vec{r}_2 + \dots + a_n\vec{r}_n$  wieder ein Vektor.

**Zerlegung von Vektoren in Komponenten:**

Wir geben uns Achsenrichtungen  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$  vor. Wir beschränken uns zunächst auf eine Ebene, in der  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  liegen. Normalerweise haben wir es mit kartesischen Koordinaten zu tun.

**Definition 2.3:** Kartesisches Koordinatensystem

Bei einem kartesischen Koordinatensystem stehen die 3 Achsenrichtungen  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  senkrecht aufeinander.

Es stellt sich nun die Frage, wie wir  $\vec{r}(t)$  in seine Komponenten in Richtung von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  zerlegen können. Wir führen Basisvektoren ein:

- $\hat{e}_x$  hat Richtung von  $\vec{x}$
- $\hat{e}_y$  hat Richtung von  $\vec{y}$

Beide Vektoren haben die Länge (den Betrag) 1. Es gilt dann offenbar:

$$\vec{r} = x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In Worten heißt dies,  $x$  bzw.  $y$  gibt an, mit welcher dimensionsbehafteten Zahl der Basisvektor  $\hat{e}_x$  bzw.  $\hat{e}_y$  zu multiplizieren ist, damit der Vektor  $\vec{r}$  aufgespannt wird. Der Satz von Pythagoras liefert die Länge  $|\vec{r}(t)|$  von  $\vec{r}(t)$ :

$$|\vec{r}(t)| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Wir wollen nun die zuvor eingeführten Begriffe für den 3-dim. Fall verallgemeinern. Die Zusammensetzung erfolgt als Linearkombination der 3 Vektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  längs der 3 Koordinatenrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

**Beispiel:** Geschwindigkeit

Längs der  $x$ -Achse brauchen wir  $v_x \cdot \hat{e}_x$ , längs der  $y$ -Achse  $v_y \cdot \hat{e}_y$  und längs der  $z$ -Achse  $v_z \cdot \hat{e}_z$ . Daher ergibt sich

$$\vec{v}(t) = v_x \cdot \hat{e}_x + v_y \cdot \hat{e}_y + v_z \cdot \hat{e}_z$$

Für den Betrag  $|\vec{v}(t)|$  gilt daher:

$$|\vec{v}(t)| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

In der Kurzschreibweise, bei der sich die Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  auf die Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eines vorgegebenen Koordinatensystems beziehen, lautet der Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

**Definition 2.5:** Komponentendarstellung

Die Darstellung  $\vec{v}(t) = v_x \cdot \hat{e}_x + \dots$  heißt *Komponentendarstellung* von  $\vec{v}(t)$ .

Bei vorgegebener Beschleunigung  $\vec{a}$  erhält man durch komponentenweise Integration die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Es gilt für den Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit in der Komponente  $i$  ( $i = x, y, z$ ):

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} \quad (2.6)$$

Durch Integration erhält man beispielsweise für die  $x$ -Komponente

$$v_x(t) = v_{x,o} + \int_0^t a_x(t') dt'$$

Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg lautet für jede Komponente  $i$ :

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} \quad (2.7)$$

Analog ergibt sich durch Integration der Weg in dieser Komponente zu

$$s_x(t) = s_{x,o} + \int_0^t v_x(t') dt'$$

**Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes:**

Wir wollen nun den Begriff des Skalarproduktes diskutieren. Es erlangt wesentliche Bedeutung bei der Definition und der Berechnung vieler physikalischer Größen, z.B. Arbeit, Spannung.

**Definition 2.8:** Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (2.8)$$

Wie der Name es schon andeutet, ist das Ergebnis des Skalarproduktes ein Skalar, also eine Zahl, und kein Vektor. In dieser und auch anderer Hinsicht unterscheidet es sich wesentlich vom später eingeführten Vektorprodukt.

**Rechenregeln:**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , wenn  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , d.h. das Skalarprodukt zweier zueinander senkrechter Vektoren ist Null. Diese Vektoren werden auch orthogonale Vektoren genannt.

**Komponenten-Schreibweise:**

Es seien die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bzgl. eines Koordinatensystems mit den Basisvektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Die Basisvektoren (Einheitsvektoren) stehen paarweise aufeinander senkrecht, d.h.  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$  ( $i = x, y, z$ ) und

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y &= 0 \\ \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z &= 0 \\ \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z &= 0 \end{aligned}$$

Verwendet man nun die oben näher beschriebenen Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , so ergibt sich für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (2.9)$$

**Definition und Eigenschaften des Vektorproduktes:**

Es seien zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gegeben.

**Definition 2.10:** Vektorprodukt

Das Vektorprodukt der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wird geschrieben als  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Der Vektor  $\vec{c}$  ist das Ergebnis dieses Vektorproduktes:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] \quad (2.10)$$

Der Betrag des so festgelegten Vektors ist

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})), \quad (2.11)$$

d.h. gleich der Fläche des durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  definierten Parallelogramms.

Die Richtung von  $\vec{c}$  ist senkrecht zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene. Pfeilrichtung ist die Daumenrichtung, wenn die Finger der rechten Hand den kürzesten Weg von  $\vec{a}$  im Gegenuhrzeigersinn nach  $\vec{b}$  zeigen.

Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$
- Seien  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wieder wie beim Skalarprodukt in kartesischen Koordinaten gegeben. Dann gilt für den Vektor  $\vec{c}$  in der abkürzenden Komponentenschreibweise:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (2.12)$$



### 2.1.1 Geradlinige Bewegung

In der  $(x,y)$ -Ebene sieht die Bewegung, gekennzeichnet durch den Weg  $\vec{s}$  des Massenpunktes und seine Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , aus wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

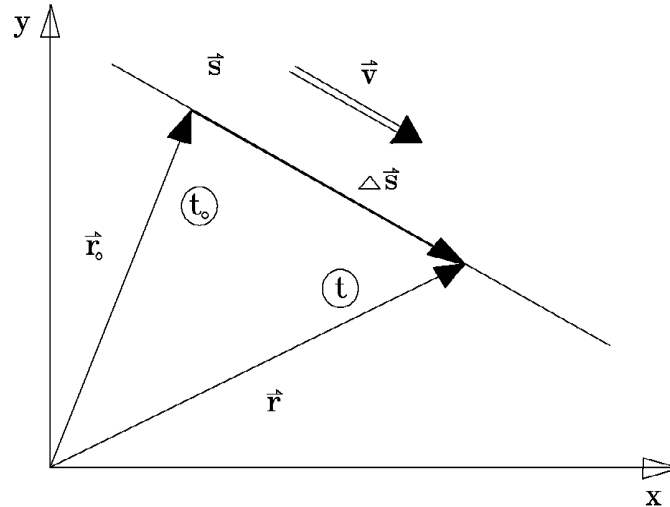


Abbildung 2.2: Skizze zur Verdeutlichung der geradlinigen Bewegung

Die mittlere Geschwindigkeit  $\vec{v}_m$  zwischen den Zeitpunkten  $t_o$  und  $t$  ist mit  $\Delta t = t - t_o$  definiert als:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Die momentane Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  ist definiert durch:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}(t_o) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t_o) \quad (2.14)$$

Laut Abbildung 2.2 ergibt sich, wenn der Ort zur Zeit  $t_o$  gerade  $\vec{s}_o$  war, der Ort  $\vec{s}(t)$  zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  durch Integration:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{s}_o + \sum_{t_o \dots t} \Delta \vec{s} \\ \rightarrow &= \vec{s}_o + \int_{t_o}^t \vec{v} dt \end{aligned}$$

Ist z.B.  $\vec{v}$  konstant im Zeitintervall  $(t_o, t)$ , so ergibt sich:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_o + \vec{v}(t - t_o)$$

Ändert sich im Zeitintervall  $\Delta t = t - t_o$  die Geschwindigkeit, so ist die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  gegeben durch die momentane Beschleunigung

$$\vec{a}(t_o) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}}(t_o) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t_o) \quad (2.15)$$

Dabei kann  $\vec{a}$  positiv oder negativ gerichtet sein:

- Ist  $a > 0$ , so liegt eine Beschleunigung vor.
- Ist  $a < 0$ , so wird die Bewegung des Massenpunkts verzögert (Bremsen).

Die SI-Einheit der Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  ist offenbar  $1 \text{ ms}^{-2}$ . Bei gegebener Beschleunigung  $\vec{a}$  erhält man  $\vec{v}(t)$  nach Integration zu:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

Für eine geradlinige Bewegung ist eigentlich eine skalare Beschreibung ausreichend. In Vektorschreibweise sind alle Definitionen auch für eine krummlinige Bewegung gültig. Dann sind i.a.  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  nicht mehr zueinander parallel.

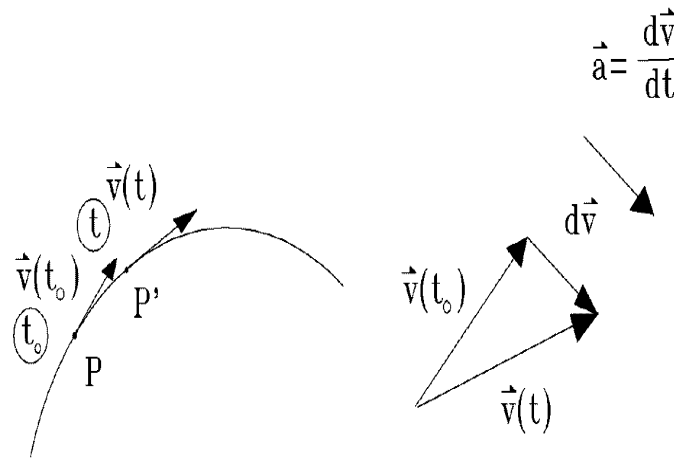


Abbildung 2.3: Skizze zur krummlinigen Bewegung

### Beispiele und Anwendungen:

Zur Vertiefung betrachten wir gleichmäßig beschleunigte Bewegungen, d.h.  $\vec{a} = \text{konst.}$  nach Betrag und Richtung, im Schwerfeld der Erde:

- Freier Fall (senkrechter Wurf):  
Jeder Massenpunkt unterliegt der Erdbeschleunigung  $\vec{g}$ , wobei  $|\vec{g}| \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Dann ergibt sich die Fallgeschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  zu:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

Dabei ist  $\vec{v}_0$  ist Fallgeschwindigkeit zur Zeit  $t=0$ . Für die Fallhöhe ergibt sich, wenn  $h = 0$  für  $t = 0$ :

$$h = v_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

- Schiefer Wurf:

Die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  läßt sich berechnen als Zusammensetzung von zwei geradlinigen Bewegungen in x- bzw. y-Richtung:

1. Gleichförmige Bewegung in x-Richtung mit der Geschwindigkeit  $v_o \cos \alpha$ .
2. Freier Fall in z-Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_o \sin \alpha$ .

Damit folgt für die Koordinaten des Massenpunktes  $x(t)$  und  $z(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_o \cdot \cos \alpha \cdot t \\z(t) &= v_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2\end{aligned}$$

Die Bahnkurve  $z(x)$  ergibt sich nach Elimination von t zu:

$$z = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Es entsteht die Wurfparabel aus Abbildung 2.4.

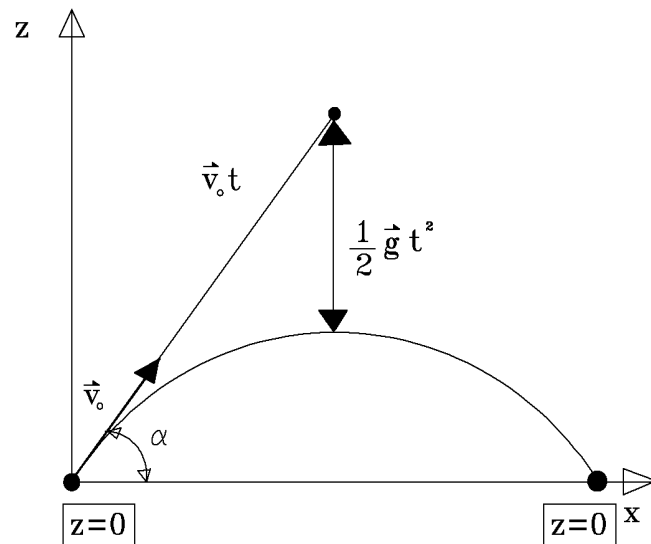


Abbildung 2.4: Schiefer Wurf

Die Wurfweite folgt aus der Lage des zweiten Schnittpunktes mit der x-Achse:

$$x_{max} = v_o^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{g}$$

Die maximale Wurfweite ergibt sich für  $\sin 2\alpha = 1$ , d.h.  $\alpha = 45^\circ$ , zu  $\frac{v_o^2}{g}$ .

**Beachte!**

*Bei allen bisher gemachten Überlegungen wurde die Luftreibung vernachlässigt.*

### 2.1.2 Kreisbewegung

Um die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn beschreiben zu können, benötigt man folgende Größen:

- Drehwinkel  $\varphi(t)$
- Zeit  $t$
- Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}(t)$
- Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}(t)$
- Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$
- Beschleunigung  $\vec{a}$

Der Drehwinkel  $\varphi(t)$  kann in Grad ( $^\circ$ ) angegeben werden. Wir arbeiten im folgenden aber mit dem Bogenmaß  $\varphi$ .

**Definition 2.16:** Bogenmaß

Der Winkel im Bogenmaß (s. Abbildung 2.5) ist definiert als die Länge des von den Winkelschenkeln eingeschlossenen Kreisbogens eines Einheitskreises (Kreis mit Radius 1). Es gilt:

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\text{Länge des Kreisbogens, den der Winkel } \alpha \text{ herauschneidet}}{\text{Radius des gewählten Kreises}} \quad (2.16)$$

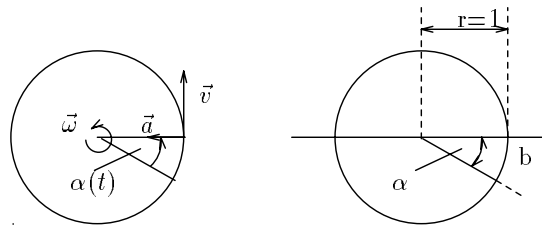


Abbildung 2.5: Kreisbewegung und Einheitskreis

In der folgenden Tabelle sind einige wichtige Entsprechungen zusammengestellt.

Bogenmaß in rad	Winkel in $^\circ$
$2\pi$	360
$\pi$	180
$\frac{\pi}{2}$	90
1	57,6
0,01745	1

Die Eins im Bogenmaß erhält meist die Einheit Radiant (rad), obwohl sie eine dimensionslose Größe ist. Der Winkel  $\varphi$  in rad wird wie folgt aus jenem in Grad ( $\alpha$ ) erhalten:

$$\varphi = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \quad (2.17)$$

**Definition 2.18:** Betrag der Winkelgeschwindigkeit

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  ist definiert als

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.18)$$

**Definition 2.19:** Betrag der Winkelbeschleunigung

Der Betrag der Winkelbeschleunigung  $\alpha(t)$  ist definiert als

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (2.19)$$

Im wichtigen Fall der gleichförmigen Kreisbewegung gilt  $\omega = \text{konst.}$  und daher mit  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

**Definition 2.20:** Richtung der Winkelgeschwindigkeit

Um nun die Drehrichtung angeben zu können, definiert man den Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}(t)$ , der den Betrag von  $|\omega| = \frac{d\varphi}{dt}$  hat, und dessen Richtung senkrecht auf der Bahnebene steht.

### Rechte-Hand-Regel

Der Daumen weist in Richtung von  $\vec{\omega}$ , wenn die Finger in Drehrichtung zeigen (vgl. Abb. 2.6).

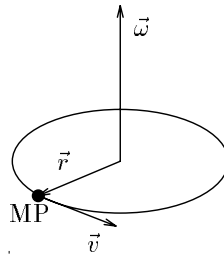


Abbildung 2.6: Skizze zur Kreisbewegung

Den Betrag der Bahngeschwindigkeit  $|\vec{v}(t)|$  erhält man analog der geradlinigen Bewegung, wobei an die Stelle des geraden Wegstücks  $s$  nun der durchlaufene Bogen  $b$  tritt:

$$|\vec{v}(t)| = \frac{db}{dt} \quad (2.21)$$

Wegen  $\varphi(t) = \frac{b}{r}$ , d.h.  $\varphi$  ist der Bogen im Einheitskreis, ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{db}{dt} \cdot \frac{1}{r} = \frac{|\vec{v}(t)|}{r}$$

der wichtige Zusammenhang zwischen der Winkel- und der Bahngeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (2.22)$$

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist also gleich dem Betrag der Bahngeschwindigkeit auf dem Einheitskreis. Allerdings sind die Richtung und auch die Einheit beider Größen verschieden. Dies drückt sich in der vektoriellen Formulierung der Gleichung 2.22 aus. Mit Hilfe von  $\vec{\omega}$  erhalten wir für  $\vec{v}(t)$  durch das Vektorprodukt aus  $\vec{\omega}$  und  $\vec{r}$ :

### Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.23)$$

Korrekterweise ergibt sich, daß  $\vec{v}$  senkrecht auf  $\vec{r}$  und auf  $\vec{\omega}$  steht.

Die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$ , die der Massenpunkt auf seiner Kreisbahn erfährt, erhalten wir aus  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$  zu

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad (2.24)$$

In dem Spezialfall der gleichförmigen Kreisbewegung, d.h.  $\vec{\omega}$  ist konstant, ergibt sich wegen  $\frac{d}{dt}\omega = 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \vec{\omega} \times [\omega \times \vec{r}] \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß  $\vec{a}$  parallel zu  $-\vec{r}$  steht, also radial nach innen gerichtet ist.

**Definition 2.25:** Zentripetalbeschleunigung

*Die Zentripetal-Beschleunigung ist der radial nach innen gerichtete Anteil an der Gesamtbeschleunigung  $\vec{a}$ .*

Im Spezialfall der gleichförmigen Kreisbewegung sind Zentripetalbeschleunigung und Gesamtbeschleunigung identisch. Ferner folgt für  $|\vec{a}|$ :

$$a = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \quad (2.26)$$

## 2.2 Dynamik

### 2.2.1 Kraft und Impuls

Wir betrachten im folgenden die Dynamik von Massenpunkten, d.h. die Folge einer beliebigen Kraft auf ihre Bewegung. Auf die spezielle Natur der Kräfte wird erst später eingegangen. Als Grundlage für die Behandlung der Dynamik von Massenpunkten betrachtet man die Newtonschen Axiome.

#### 1. Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz)

*Ein Massenpunkt der Masse  $m$  verharrt im Zustand der Ruhe, solange keine äußeren Einwirkungen, sogenannte Kräfte, existieren.*

$$v \stackrel{?}{=} \text{konst.}, \text{ wenn } \vec{F} = 0 \quad (2.27)$$

### 2. Newtonsches Axiom (Grundgleichung der Dynamik)

Jede Änderung des Bewegungszustandes setzt die Einwirkung einer Kraft voraus. Das Maß für die Größe und Richtung der Kraft ist die erzielte Beschleunigung des Körpers. Das Axiom findet seinen Niederschlag in der bekannten Formulierung der Trägheitskraft 2.29.

- Die Beschleunigung  $\vec{a}$  gibt die Richtung von  $\vec{F}$  an, d.h.  $\vec{a}$  ist zu der Richtung der Kraft  $\vec{F}$  parallel.
- $|\vec{a}|$  ist zu  $|\vec{F}|$  proportional.
- Das Verhältnis von wirkender Kraft  $|\vec{F}|$  und erzielter Beschleunigung  $|\vec{a}|$ , also  $\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$ , ist eine Eigenschaft allein des Körpers. Diese charakterisiert seine Trägheit.

**Definition 2.28:** Masse

Das Verhältnis  $\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$  heißt Masse  $m$  des Körpers.

Es gilt der äußerst wichtige Zusammenhang für die Trägheitskraft:

#### Trägheitskraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.29)$$

Wenn sich während der Bewegung die Masse  $m$  ändert, d.h.  $m(\vec{v})$ , so lautet stattdessen die allgemeine Formulierung:

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.30)$$

**Definition 2.31:** Impuls

Der Vektor  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  heißt Impuls des Körpers.

Seine SI-Einheit ist  $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Er ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers. Es gilt aufgrund des 1. Newtonschen Axioms offenbar:

$$\vec{p} = \text{konst.}, \text{ solange } \vec{F} \equiv 0 \quad (2.32)$$

Es stellt sich nun die Frage, was man sich unter der Masse eines Körpers anschaulich vorstellen kann. Die Antwort ist denkbar einfach, denn die Masse  $m$  ist einfach die in dem Körper enthaltene Materiemenge.

**Kraft als physikalische Größe:**

Die Kraft ist eine abgeleitete vektorielle Größe. Ihre SI-Einheit ist  $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N}$ , wobei N für Newton steht.

Ein interessanter Fall ist die Überlagerung von Kräften. Greifen mehrere Kräfte  $\vec{F}_i$  an einem Punkt  $P$  des Körpers an (Abb. 2.7), so addieren sie sich vektoriell:

$$\vec{F}_{ges} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.33)$$

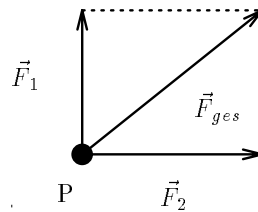


Abbildung 2.7: Überlagerung von Kräften

**Beispiel:** Gewichtskraft

Fast alle Kräfte, mit denen wir experimentieren, sind von der Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  eines Körpers im Schwerfeld der Erde abgeleitet. Kann ein Körper der Kraft  $\vec{F}_G$  folgen, so ruft sie die Beschleunigung  $\vec{a} = \vec{g}$  hervor, wobei  $\vec{g}$  die Richtung zum Erdmittelpunkt hat. Die Gewichtskraft ist also mit  $|\vec{g}| \cong 9.81 \text{ ms}^{-2}$ :

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \quad (2.34)$$

Es wirft sich die Frage auf, wie Kräfte überhaupt gemessen werden. Eine Möglichkeit ist das sogenannte Federdynamometer. Dabei wird eine Feder gedehnt. Die Dehnung  $\vec{s}$  (Auslenkung) ist i.a. in guter Näherung der dehrenden Kraft  $\vec{F}$  proportional. Es gilt für die rücktreibende Kraft das

**Hookesche Gesetz**

$$\vec{F}_D = D \cdot \vec{s} \quad (2.35)$$

Die Proportionalitätskonstante  $D$  wird Federkonstante genannt.

**3.Newtonsches Axiom (actio=reactio)**

Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft  $\vec{F}_{12}$  aus, so reagiert Körper 2 mit einer Gegenkraft  $\vec{F}_{21}$ . Sie ist vom Betrag her gleichgroß wie  $\vec{F}_{12}$ , aber entgegengesetzt gerichtet, d.h.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (2.36)$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, daß die Angriffspunkte der beiden Kräfte in verschiedenen Körpern liegen.

**Äquivalenzprinzip:**

Man könnte auf die Idee kommen, daß im Ausdruck  $\vec{F}_G = m_s \cdot \vec{g}$  eine "schwere Masse"  $m_s$  für die Schwerkraft verantwortlich ist, während im 2.Newton'schen Axiom  $\vec{F} = m_t \cdot \vec{a}$  eine "träge Masse"  $m_t$  auftritt. Es gilt aber das

**Äquivalenzprinzip**

Schwere und träge Masse sind im Rahmen der bisher erreichten Meßgenauigkeit identisch:

$$m_t \equiv m_s \quad (2.37)$$



**Drehmoment und Drehimpuls:**

Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung eines Massenpunktes bleibt sein Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  erhalten. Wie sieht die Situation nun aber aus, wenn sich der Massenpunkt mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $|\vec{v}|$  auf einem Kreis bewegt?

Wir stellen fest, daß der Massenpunkt durch eine Kraft  $\vec{F}$ , deren Wirkungslinie nicht durch den Kreismittelpunkt geht, in Drehung versetzt werden kann. Eine für die Beschreibung der Wirkung dieser Kraft geeignete Größe ist der Vektor  $\vec{M}$ . Es gilt mit  $\vec{r}$  als Ortsvektor:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.38)$$

**Definition 2.39:** Drehmoment

Der Vektor  $\vec{M}$  (oder englisch  $\vec{T}$  für "torque") heißt Drehmoment.

Für  $|\vec{M}| = M$  gilt nach Definition des Vektorproduktes

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

Die SI-Einheit des Drehmomentes ist 1 Nm. Es gilt wieder eine

**Rechte-Hand-Regel**

Wenn Finger der rechten Hand in Drehrichtung zeigen, dann gibt der Daumen die Richtung von  $\vec{M}$  an.

Für eine Drehbewegung (Rotation) übernimmt das Drehmoment  $\vec{M}$  die Rolle der Kraft  $\vec{F}$  bei einer geradlinigen Bewegung, d.h.  $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$ . Es ist aber noch offen, welche physikalische Größe die Rolle des Impulses  $\vec{p}$  übernimmt. Dies ist der Drehimpuls.

**Definition 2.40:** Drehimpuls

Der (Bahn-)Drehimpuls  $\vec{L}$  ist definiert durch den Ausdruck:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.40)$$

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  hat die Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn die Finger die Drehrichtung anzeigen, mit welcher  $\vec{p}$  auf dem kürzest möglichen Wege mit einer Rechtsschraube in die Richtung von  $\vec{r}$  gebracht wird.

Der Betrag ergibt sich gemäß der Definition des Vektorproduktes zu:

$$|\vec{L}| = L = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p})$$

Für den Spezialfall der Kreisbahn gilt  $\vec{r} \perp \vec{p}$  und damit

$$L = m \cdot r \cdot v \quad (2.41)$$

Mit  $v = \omega \cdot r$  kann diese Gleichung umschreiben zu:

$$L = m \cdot \omega \cdot r^2$$

oder vektoriell, da  $\vec{\omega}$  die Richtung von  $\vec{L}$  hat:

$$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} \quad (2.42)$$

**Zeitliche Änderung von  $\vec{L}$ :**

Wir untersuchen jetzt die zeitliche Änderung  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  des Drehimpulses. Es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Berücksichtigt man  $\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v}$  und  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  sowie  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , so erhält man die

**Grundgleichung der Dynamik für Drehbewegungen**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (2.43)$$

In Worten: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses wird durch ein Drehmoment  $\vec{M}$  bewirkt. Zum Vergleich: Bei einer Translation wird die Änderung des linearen Impulses durch eine Kraft  $\vec{F}$  hervorgerufen. Also gilt die Entsprechung  $\vec{p} \leftrightarrow \vec{L}$ . Insbesondere gilt der

**Drehimpulserhaltungssatz**

*Wenn an einem Massenpunkt kein Drehmoment  $\vec{M}$  angreift, so bleibt der Drehimpuls  $\vec{L}$  nach Betrag und Richtung erhalten.*

### 2.2.2 Arbeit und Energie

Wir wollen nun die physikalische Größe der Arbeit einführen. Wir stellen fest, daß sich bei einem Flaschenzug die Gleichgewichtskraft  $F_G$  auf  $n=4$  Teilstücke des Seiles verteilt (s. Abbildung 2.8).

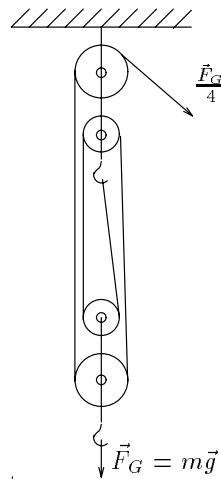


Abbildung 2.8: Flaschenzug

Zur Herstellung des Gleichgewichtes muß man nur  $F_4$  kompensieren. Es gilt

$$F_4 = \frac{1}{4}F_G,$$

da sich die Kräfte an den übrigen Seilstücken kompensieren. Der Sinn des Flaschenzuges ist es aber das Gewicht anzuheben, z.B. um  $h_1$ . Dazu müssen alle Seilstücke um  $h_1$  verkürzt werden. Folglich muß das Seil um  $h_2 = 4 \cdot h_1$  herausgezogen werden. Hätten wir die Last direkt mittels einer Rolle angehoben, hätten wir das Seil um  $h_2 = h_1$  herausziehen müssen, aber die notwendige Kraft wäre  $F_G$  gewesen. Der Flaschenzug "spart" also Kraft ein, aber dafür muß diese längs eines längeren Weges wirken. Es gilt im vorliegenden Falle:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \text{konst.}$$

Wir kommen nun zur vorläufigen Definition der physikalischen Größe Arbeit:

**Definition 2.44:** Arbeit

Das obige Produkt aus zurückgelegtem Weg und längs des Weges herrschender Kraft heißt Arbeit  $W$ .

**Beispiel:** Hubarbeit

Beim Anheben einer Last gegen die Gewichtskraft wird die Hubarbeit verrichtet:

$$W = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Um Kraft zu sparen, setzen wir die schiefe Ebene ein (s.Abb.2.9). Die Komponente der zu

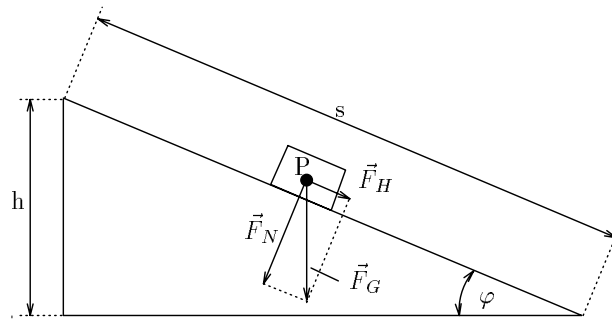


Abbildung 2.9: Schiefe Ebene

überwindenden Gewichtskraft ist die Hangabtriebskraft  $F_H = F_G \sin \varphi$ , denn die Normalkraft  $F_N = F_G \cos \varphi$  wird durch die Reaktionskraft der Unterlage kompensiert. Der zurückzulegende Weg  $s$ , um die Last um  $h$  anzuheben ist:

$$s = \frac{h}{\sin \varphi}$$

Die Arbeit ist dann wieder

$$W = F_G \cdot \sin \varphi \cdot \frac{h}{\sin \varphi} = m \cdot g \cdot h$$

Die Arbeit ist also unabhängig vom Neigungswinkel  $\varphi$ . Wir stellen weiterhin fest, daß die Arbeit in diesen Spezialfällen offenbar unabhängig vom Weg ist.

Es gilt im allgemeinen Fall:

- Die Arbeit ist ein Skalar.

- Nur die Komponente von  $\vec{F}$ , die in Bewegungsrichtung zeigt, kann Arbeit verrichten.

Wir führen nun die physikalische Größe der *Energie* ein. Es stellt sich nämlich die Frage, was mit einem Körper, an dem Arbeit verrichtet wird, passiert.

Beispielsweise hat eine um  $h$  angehobene Last ihrerseits die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, z.B. kann eine angehobene Wassermasse ein Wasserrad antreiben.

**Definition 2.45:** Energie

*Jede an einem Körper verrichtete Arbeit vergrößert dessen Energie und versetzt ihn in die Lage, seinerseits Arbeit zu verrichten. Unter der Energie versteht man also die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.*

Andere Formulierungen bezeichnen die Energie als Arbeitsvermögen, Arbeitsvorrat oder gespeicherte Arbeit. Die Arbeit, die verrichtet werden kann, ist dann höchstens gerade so groß wie jene, die an dem Körper selbst verrichtet wurde. Meistens ist sie kleiner, denn Energie kann auch in Wärme umgesetzt werden.

Die SI-Einheit der Arbeit bzw. der Energie ist  $1 \text{ Nm} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J}$ .  $1 \text{ J}$  stimmt mit der elektrischen Energieeinheit überein, d.h.  $1 \text{ J} =: 1 \text{ Wattsekunde} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$ .

Hinweis: Diese Beziehung vermittelt den Zusammenhang zwischen mechanischen und elektrischen Einheiten im SI-System.

Wir wollen den Begriff der Arbeit nun verallgemeinern, denn es ist ungeklärt, was passiert, wenn  $\vec{F}(s)$  von  $s$  abhängt. Wir betrachten das Arbeitsdiagramm " $F(s)$  gegen  $s$ " für den Fall der Hubarbeit. Dabei finde zunächst eine geradlinige Bewegung statt, und die Kraft wirke in Richtung der Bewegung:

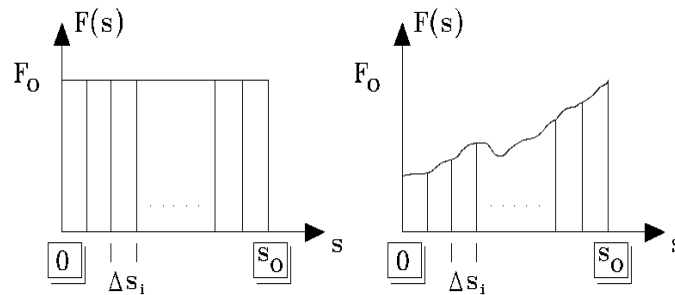


Abbildung 2.10: Arbeitsdiagramm:  $F(s)$  gegen  $s$

Die gesamte Arbeit, die nötig ist, um den Körper von  $s = 0$  nach  $s_o$  unter dem Einfluß der Kraft  $F(s)$  zu bewegen, erhalten wir aus

$$W = F_o \cdot s_o$$

Offenbar läßt sich diese Gesamtarbeit verrichten, indem man den Körper schubweise um Intervalle  $\Delta s$  verschiebt, jedesmal die nötige Arbeit

$$\Delta W = F_o \cdot \Delta s$$

ausrechnet und über alle Beiträge aufsummiert:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N \Delta W_i = F_o \sum_{i=1}^N \Delta s_i \\ &= F_o s_o \end{aligned}$$

Mit dieser Überlegung läßt sich die Arbeit für den allgemeinen Fall einer nicht konstanten Kraft  $F(s)$  berechnen. Es ist

$$W = \sum_{\Delta s_i} F(s_i) \Delta s_i \quad (2.46)$$

für genügend kleine Intervalle  $\Delta s_i$ , so daß sich  $W$  bei weiterer Verkleinerung von  $\Delta s$  praktisch nicht mehr ändert. Die mathematisch korrekte Formulierung für die Arbeit lautet soweit

$$W = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta s_i} = F(s_i) \cdot \Delta s_i =: \int_0^{s_o} F(s) ds$$

Anschaulich stellt das bestimmte Integral  $\int_0^{s_o} F(s) ds$  die Fläche unter der Funktion  $F(s)$  zwischen  $s = 0$  und  $s_o$  dar.

Es taucht nun aber das Problem auf, was passiert, wenn  $\vec{F}(s)$  nicht immer in Richtung von  $\vec{s}$  wirkt (s. Abbildung 2.11).

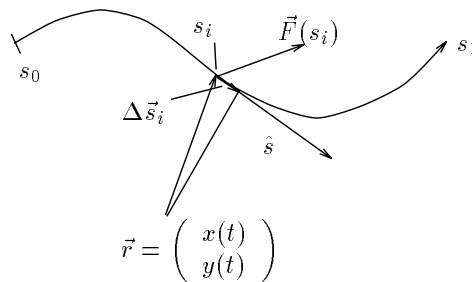


Abbildung 2.11: Gekrümmte Bahnkurve

Man findet als allgemeine Formulierung der Arbeit:

$$W = \sum_{\Delta s_i} |\vec{F}(s_i)| \cos(\vec{F}, \Delta \vec{s}_i) |\Delta \vec{s}_i|$$

Diese Formulierung kann nun auch für beliebige, gekrümmte Bahnkurven  $\vec{r}(t)$  verwendet werden, wobei  $\Delta \vec{s}_i$  der Vektor der Länge  $\Delta s_i$  und der Richtung der Tangente an die Bahnkurve ist.

### Zum Begriff des Linienintegrals:

Die obige Formulierung gilt noch für endlich lange Vektoren  $\Delta s_i$ . Wir wollen nun zu einer infinitesimalen Formulierung übergehen:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta s_i} |\vec{F}(s_i)| \cos(\vec{F}(s_i), \Delta \vec{s}_i) |\Delta \vec{s}_i| \\ &= \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta s_i} \vec{F}(s_i) \cdot \Delta \vec{s}_i \\ &\stackrel{Def.}{=} \int_{(s)} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

**Definition 2.47:** Linienintegral

Als *Linienintegral* (*Wegintegral*) bezeichnen wir den Ausdruck

$$\int_{(s)} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad (2.47)$$

Im allgemeinen Fall kann in einem Linienintegral auch eine andere vektorielle Größe anstelle von  $\vec{F}$  stehen. Ein später verwendetes Linienintegral ist  $\int_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , d.h. ein Linienintegral über das elektrische Feld von z.B. einer Ladung. Eine exaktere Formulierung findet sich bei Großmann (s.Bibliothek).

**Erscheinungsformen der mechanischen Energie:**

- Lageenergie und Hubarbeit:  
Durch Verrichten der Hubarbeit

$$W = mgh = F_G \cdot h$$

im Schwerfeld wird die Masse  $m$  um die Höhe  $h$  angehoben. Sie besitzt dann die Lageenergie  $W_L = m \cdot g \cdot h$  und kann selbst eine entsprechend große Arbeit verrichten (z.B. ein Wasserrad antreiben).

- Spannungsenergie und Verformungsarbeit:  
Wir stellen fest: Um eine Feder gegen die rücktreibende Federkraft  $F = D \cdot x$  zu verformen, d.h. zu dehnen oder zu stauchen, muß man die Verformungsarbeit

$$W = \int_0^{x_o} F(x) dx$$

verrichten. Dabei ist  $x_o$  die Längenänderung der Feder bei der Verformung. Die Auswertung des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{x_o} F(x) dx = \int_0^{x_o} D \cdot x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} D x^2 \right]_0^{x_o} \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} D x_o^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Der in der gespannten Feder steckende Arbeitsvorrat liegt in Form von Spannungsenergie vor.

**Definition 2.49:** Potentielle Energie

*Die Lage- und die Spannungsenergie sind in einem ruhenden Körper gespeichert und laufen unter dem Oberbegriff potentielle Energie.*

**Feststellung:**

Wenn Arbeit an einem Körper verrichtet wird, so ändert sich seine potentielle Energie; auf ihren Absolutwert kommt es nie an.

**Leistung:**

Oft kommt es darauf an, wieviel Zeit zum Verrichten einer bestimmten Arbeit benötigt wird.

**Definition 2.50:** Leistung

Die Leistung  $P$  ist definiert als

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.50)$$

Die SI-Einheit der Leistung ist  $1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{s}} = 1 \text{ Watt} = 1 \text{ W}$ .

**Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie:**

Zum Beschleunigen eines Körpers muß Arbeit gegen seine Trägheit verrichtet werden. Sie ist dann als Bewegungsenergie (kinetische Energie)  $W_{kin}$  vorhanden. Wir berechnen die Beschleunigungsarbeit

$$W = \int_0^{s_o} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

für die Beschleunigung eines Massenpunktes der Masse  $m$  längs des Weges  $s = 0$  bis  $s_o$ . Für die Kraft gilt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Setzt man diese nun ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{s_o} m \cdot \vec{a} d\vec{s} \\ &= \int_0^{s_o} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{t=0}^{t_o} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ \Rightarrow W &= m \cdot \int_0^{\vec{v}_o} \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \left[ \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2 \right]_0^{\vec{v}_o} \end{aligned}$$

Als kinetische Energie ergibt sich somit für die Beschleunigung von  $v = 0$  auf  $v_o$ :

$$W = \frac{1}{2} \cdot m v_o^2 \quad (2.51)$$

Dabei ist  $\vec{v}_o$  die Geschwindigkeit, die bei  $\vec{s}_o$  zur Zeit  $t_o$  erreicht wird.

Allgemein muß bei der Beschleunigung von  $\vec{v}_o$  auf  $\vec{v}_1$  die Arbeit

$$\Delta W = \frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_o^2)$$

verrichtet werden.

**Kinetische oder Bewegungsenergie:**

Die zur Beschleunigungsarbeit gleich große Menge von kinetischer Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m v_o^2$$

steht nach der Beschleunigung von  $v = 0$  auf  $v = v_o$  zur Verfügung.

**Energiesatz der Mechanik:**

Müssen nur potentielle Energie und Bewegungsenergie berücksichtigt werden, so muß die

Änderung der Bewegungsenergie mit einer entsprechend gleich großen Änderung der potentiellen Energie verbunden sein, denn am Körper muß ja Beschleunigungsarbeit verrichtet werden. Dabei gilt dann der sehr wichtige

**Energie-Erhaltungssatz**

$$W_{kin}(t) + W_{pot}(t) = \text{konst.} \quad (2.52)$$

Dieser Satz kann auch gleichwertig formuliert werden als

$$\frac{d}{dt}(W_{kin}(t) + W_{pot}(t)) = 0$$

**In Worten:**

Die Gesamtenergie ändert sich als Funktion der Zeit nicht.

**Beispiel:** Bewegung eines Fadenpendels

Es wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt und umgekehrt. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, d.h. es handelt sich um eine sogenannte Schwingung. Die potentielle Energie  $W_{pot}$  wird durch die Hubarbeit aufgebracht:

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h(\alpha)$$

Die kinetische Energie  $W_{kin}$  beträgt

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \dot{s}(t)^2$$

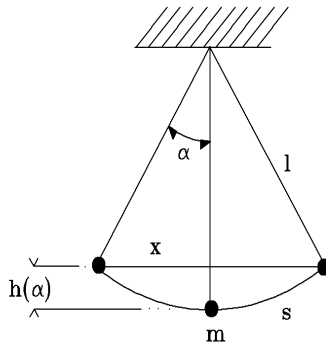


Abbildung 2.12: Fadenpendel

In den Umkehrpunkten der Bewegung ist jeweils  $|\vec{v}| = 0$ . Dort ist dann die potentielle Energie maximal. Im tiefsten Punkt ist dagegen die potentielle Energie  $W_{pot} = 0$ . Dabei wurde dieser tiefste Punkt ein wenig willkürlich als Null für die potentielle Energie festgelegt. Aber wir wissen ja bereits, daß es nur auf die Änderung der potentiellen Energie ankommt. In diesem tiefsten Punkt ist  $W_{kin}$  maximal. Der Energiesatz besagt für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$ :

$$W_{pot}(t) + W_{kin}(t) = W_{ges} = \text{konst.}$$



Man kann noch zeigen, daß für kleine Auslenkungen  $s(t)$  in guter Näherung gilt (siehe z.B. Niedrig):

$$W_{pot}(t) = mgh(\alpha) \cong \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \frac{s^2(t)}{l}$$

Es ergibt sich also eine quadratische Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Auslenkung  $s(t)$ . Damit lautet der Energiesatz:

$$W_{ges} \cong \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{s}^2(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{l} \cdot s^2(t) = \text{konst.}$$



# Kapitel 3

## Wechselwirkungen und Felder

### 3.1 Übersicht

Alle bekannten Kraftwirkungen lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückführen.

- Allg. Massenanziehung (Gravitationswechselwirkung):  
Sie wirkt zwischen je zwei beliebigen Massen, z.B. Planetenbewegung im Kraftfeld der Sonne, Gravitationskraft an Erdoberfläche. Das geltende Kraftgesetz hat eine unendliche Reichweite:

$$|\vec{F}_G| \sim \frac{1}{r^2} \quad (3.1)$$

- Coulomb-Wechselwirkung:  
Sie wirkt zwischen je zwei Ladungen. Chemische Prozesse, der Zusammenhalt der Materie u.v.a. beruhen auf ihr. Das hier geltende Kraftgesetz hat zwischen zwei ruhenden Ladungen wiederum unendliche Reichweite:

$$|\vec{F}_C| \sim \frac{1}{r^2} \quad (3.2)$$

- Starke Wechselwirkung (Kernkraft):  
Sie bewirkt die Kräfte zwischen den Elementarteilchen im Atomkern, d.h. Protonen, Neutronen ("Nukleonen"). Sie sind die Ursache für die Strahlungsenergie der Sonne. Ihre Reichweite ist von der Größenordnung des Kernradius.
- Schwache Wechselwirkung:  
Sie ist maßgebend bei der Umwandlung von Elementarteilchen. Ein Beispiel ist der  $\beta$ -Zerfall, wo sich ein Neutron in ein Proton umwandelt und dabei ein Elektron und ein (Anti-)Neutrino emittiert. Elektronen und Neutrinos findet man dabei unter dem Oberbegriff "Leptonen". Ein weiteres Beispiel ist der Brennprozeß der Sonne. Er wird durch die Verschmelzung von zwei Protonen zu einem Deuterium-Kern ( ${}^2D$ ) gesteuert. Dabei entstehen als Leptonen ein Positron ( $e^+$ ) und ein Neutrino. Die Reichweite der schwachen Wechselwirkung ist noch kürzer als jene der Kernkräfte.

#### Zusammenfassung :

Nur bei der Gravitation und der elektromagnetischen Kraft können sich die Kräfte vieler

Teilchen zu einer makroskopisch meßbaren Kraft überlagern. Deshalb spielen auch nur diese beiden Wechselwirkungen in dieser Vorlesung eine Rolle.

### 3.2 Gravitationswechselwirkung

Die Beobachtung der Planeten-Bahnen um die Sonne lieferte die Keplerschen Gesetze:

**Keplersche Gesetze**

- *1.Keplersches Gesetz (1609):  
Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.*
- *2.Keplersches Gesetz (1609):  
Der Radiusvektor Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*
- *3.Keplersches Gesetz (1619):  
Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_i$  der Planeten verhalten sich wie die 3.Potenzen ihrer großen Bahnhalfachse  $a_i$ :*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (3.3)$$

**Diskussion:**

Das 2.Keplersche Gesetz zeigt, daß es sich bei der Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet um eine Zentralkraft handelt. Es ist eine Umschreibung des Drehimpulserhaltungssatzes.

**Beweis:**

Stellt man die Fläche  $\Delta A$  als Vektorprodukt dar:

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \Delta \vec{s}]$$

und verwendet  $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$ , so folgt

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \vec{v}] \cdot \Delta t$$

Über die Formulierung des Drehimpulses  $m[\vec{r} \times \vec{v}] = \vec{L}$  erhält man

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{2m} \cdot \vec{L} \cdot \Delta t$$

Die Richtung der aufgespannten Fläche  $\Delta A$  ist durch ihren Normalenvektor gegeben. Wenn  $\Delta \vec{A} / \Delta t$  also konstant ist, so ist auch  $\vec{L}$  konstant.

Die Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  hält den Planeten also gegen seine Trägheit auf der Ellipsenbahn. Für den Spezialfall einer Kreisbahn gilt dann:

$$|\vec{F}| = m_p \cdot \omega_p^2 \cdot r_p = \frac{4\pi^2}{T_p^2} \cdot m_p \cdot r_p,$$

denn es gilt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

Mit dem 3.Keplerschen Gesetz folgt

$$|\vec{F}_G| = \frac{4\pi^3}{T_p^2} \cdot m_p \cdot r_p = \frac{4\pi^2 m_p}{\text{konst.}} \cdot \frac{r_p}{r_p^3} \sim \frac{m_p}{r_p^2}$$

oder allgemeiner in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{F}_G(\vec{r}) \sim \frac{m}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Nach dem 3.Newton'schen Axiom muß  $|\vec{F}_G|$  auch proportional zu  $M_s$  sein. Daher gilt das

### Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (3.4)$$

#### Gravitationskonstante $G$ :

Sie muß durch direkte Messung der Gravitationskraft  $|\vec{F}_G|$  zwischen zwei bekannten Massen bestimmt werden. Im Prinzip wird dabei die Beschleunigung der kleinen Masse  $m$  durch die Massenanziehung der großen Masse  $M$  gemessen (Gravitationswaage nach Cavendish).

#### Gravitationswaage:

Die Masse  $m_i$  erfährt während der Meßzeit  $t$  eine praktisch konstante Beschleunigung  $\vec{a}$ , die durch die Gravitation hervorgerufen wird.  $|\vec{a}|$  ist zu berechnen aus

$$\begin{aligned} F_i &= m_i \cdot a = |\vec{F}_G| \\ &= G \cdot M \cdot \frac{m_i}{R^2} \\ &\approx G \cdot M \cdot \frac{m_i}{d^2} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Man mißt über die Verdrillung um  $\alpha$  den Weg  $\Delta x$  eines Lichtzeigers. Dieser führt offenbar eine beschleunigte Bewegung aus:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Der derzeitige Bestwert der Gravitationskonstante ist

$$G = 6.673(\pm 0.003) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$

#### Gravitationsfeld und Gravitationsfeldstärke:

Eine Masse  $M$  verändert den sie umgebenden Raum, indem sie ein Gravitationsfeld  $\vec{g}$  erzeugt. Eine Probemasse  $m$  erfährt eine Kraft  $\vec{F}_G$ , die sich aus der am Ort von  $m$  herrschenden Feldstärke  $\vec{g}$  ergibt

#### Definition 3.5: Gravitationsfeldstärke

Die Gravitationsfeldstärke  $\vec{g}$  ist gegeben durch

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

als Quotient aus Kraft  $\vec{F}_G$  (auf die Probemasse  $m$ ) und der Masse  $m$  des Probekörpers.

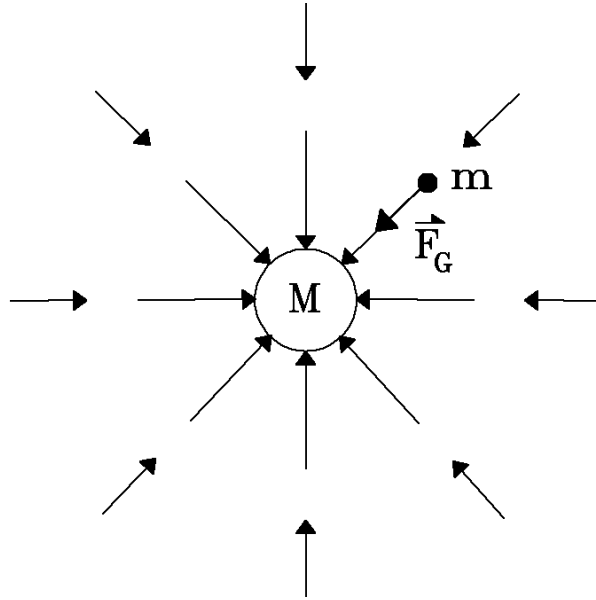


Abbildung 3.1: Skizze zur Gravitationskraft

Es stellt sich nun die Frage, wie man das Gravitationsfeld  $\vec{g}$  ausmißt. Man "tastet" dazu das  $\vec{g}$ -Feld um eine Massenverteilung ab, indem man für alle Orte  $\vec{r}$  in ihrer Nachbarschaft die Kraft  $\vec{F}_G(\vec{r})$  mißt. Dann erhält man  $\vec{g}$  nach Division durch  $m$  zu:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

Wegen der Grundgleichung der Dynamik ist im Falle der Gravitation die durch  $\vec{F}_G$  bewirkte Beschleunigung  $\vec{a}$  gerade gleich der Gravitationsfeldstärke  $\vec{g}$ . An der Erdoberfläche gilt dann

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{G \cdot M_E}{R_E^2} \cdot \hat{r} = \vec{g}$$

Der Betrag von  $|\vec{g}|$  ist etwa  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

Offenbar kann aus  $\vec{g}$  bei bekannter Gravitations-Konstante  $G$  die Erdmasse  $M_E$  bestimmt werden. Dazu muß der Erdradius  $R_E$  aber anderweitig bestimmt worden sein. Mit einem Erdradius von  $R_E = 6370 \text{ km}$  erhält man

$$M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Es läßt sich zeigen (z.B. Niedrig), daß im Inneren einer homogenen Massenkugel mit Radius  $R_E$  die Gravitation nur von Massenelementen  $M_E$  innerhalb des betrachteten Radius herrührt:

$$\vec{a}_i(\vec{r}) = G \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R_i^3 \cdot \rho \cdot \frac{\hat{r}_i}{R_i^2} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G \cdot R_i \cdot \hat{r}_i$$

oder

$$|\vec{a}_i| = \frac{G \cdot M_E}{R_E^3} \cdot |\vec{R}_i| = g \cdot \frac{R_i}{R_E} \text{ für } R_i \leq R_E$$

## 3.3 Coulomb-Wechselwirkung

### 3.3.1 Coulomb-Kraftgesetz

Es gibt Kräfte, welche sich nicht auf die Gravitationswechselwirkung zwischen Massen zurückführen lassen, z.B. Reibungselektrizität. Es stellt sich uns die Frage, warum elektrische Kräfte bei der Wechselwirkung makroskopischer Körper keine Rolle spielen. Die Erklärung ist darin zu finden, daß diese Körper im allgemeinen elektrisch neutral sind, weil sich die elektrischen Ladungen unterschiedlicher Vorzeichen kompensieren.

**Interpretation zur Reibungselektrizität:** Die Aufladung zweier Stäbe, z.B. Hartgummi- und Glasstab, durch Reiben erfolgt durch die Trennung von Ladungen. Die Berührung von Körpern kann Übertragung von Ladungen zwischen den Körpern führen. Sie enthalten anschließend einen Überschuß an Ladung gleichen Vorzeichens. Diese stoßen sich ab und sammeln sich daher an der Oberfläche des Körpers.

#### Ladungen aus der Steckdose:

An den Polen einer Steckdose kann Ladung abgenommen werden. Handelt es sich um eine Gleichstromquelle, so hat die Ladung immer dasselbe Vorzeichen. Bei einem Wechselstromnetz dagegen nimmt man abwechselnd positive und negative Ladung auf, denn an den Polen ändert sich das Vorzeichen der bereitgestellten Ladung periodisch. In Deutschland beträgt die Wechselfrequenz 50 Hz.

#### Eigenschaften elektrischer Ladung:

- Es gibt zwei Arten von Ladungen: positive und negative Ladung.
- Die Ladung ist an Materie gebunden.
- Ladungen verschiedenen Vorzeichens können sich kompensieren, wenn ihre Mengen gleich groß sind.
- Ladung tritt nur in ganzzahligen Vielfachen einer Elementarladung auf, d.h. die Ladung ist gequantelt.

#### Elektrisches Feld:

Die elektrische Kraft ist eine Folge der felderzeugenden Ladung  $Q$ . Mit Hilfe einer Probeladung  $q$  können wir in der Umgebung der felderzeugenden Ladung die Kraft  $\vec{F}_{el}$  messen. Alle Kraftvektoren  $\vec{F}_{el}(\vec{r})$  zusammen ergeben das Kraftfeld in der Umgebung der Ladung.

#### Definition 3.6: Elektrische Feldstärke

Die Elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ist definiert als der Quotient aus der Kraft  $\vec{F}_{el}$  (auf eine Probeladung  $q$ ) und der Ladung  $q$  dieser Probeladung:

$$\vec{E} = \frac{\text{Kraft auf die Probeladung}}{\text{Ladung der Probeladung}} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} \quad (3.6)$$

#### Bemerkung:

Als Folge der Definition 3.6 gilt, daß bei einer positiven Probeladung  $q$  die Kraft  $\vec{F}_{el}$  und das Feld  $\vec{E}$  dieselbe Richtung haben.

#### Coulomb-Gesetz:

Die Vermessung von  $\vec{E}$  liefert für die Kraft zwischen den Probeladung und felderzeugender Ladung, soweit beide Ladungen als punktförmig aufgefaßt werden können:

- Sie ist proportional zum Produkt aus  $q$  (Probeladung) und  $Q$  (felderzeugende Ladung)
- Sie ist ebenfalls proportional zum Quadrat des Abstandes der Ladungsschwerpunkte.
- Sie ist radial gerichtet.

Aus diesen Eigenschaften formuliert man das

**Coulombsche Gesetz**

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (3.7)$$

Der Einheitsvektor  $\hat{r}$  ist von  $Q$  nach  $q$  gerichtet. Haben also die Ladungen  $Q$  und  $q$  das gleiche Vorzeichen, so wird  $q$  von  $Q$  weggestoßen. Die Proportionalitätskonstante zwischen  $|\vec{F}_{el}|$  und  $qQ/r^2$  wird im SI-System in der Form  $1/4\pi\epsilon_0$  geschrieben.

**Definition 3.8:** Elektrische Feldkonstante

Die Konstante  $\epsilon_0$  heißt *elektrische Feldkonstante* oder auch *Influenzkonstante*.

Die Größe von  $\epsilon_0$  wird experimentell bestimmt, nachdem man die Einheit der Ladung festgelegt hat. Dies erfolgt im SI-System aus meßtechnischen Gründen über die elektrische Stromstärke  $I$ , deren SI-Einheit 1 Ampere ist. Stromstärke  $I$  bedeutet Ladung  $dQ$ , die pro Zeit  $dt$  durch eine Fläche transportiert wird:  $I = dQ/dt$ .

**Definition 3.9:** Coulomb

Die Einheit der Ladung  $1 A \cdot s$  erhält die Abkürzung *1 Coulomb* =  $1 C$ .

Aufgrund dieser Definition ergibt sich experimentell für die elektrische Feldkonstante:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (3.10)$$

**Bemerkung:**

Eine Ladungsmenge von  $1C$  ist eine gigantische Ladung.

**Beispiel:**

Für  $q=Q=1 C$  und den Abstand  $r = 1 \text{ m}$  ergibt sich aus dem Coulomb-Gesetz:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1 \text{ C} \cdot 1 \text{ C}}{1 \text{ m}^2} \approx 10^{10} \text{ N}$$

Besonders im atomaren Bereich hat man es mit Ladungen der Größe  $\approx 10^{-19} \text{ C}$  und damit viel kleineren Kräften zu tun.

**Richtung der Coulomb-Kraft:**

Die Coulomb-Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungsschwerpunkte. Weiterhin ist sie anziehend für ungleichnamige Ladungen:

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Der Vektor  $\hat{r}$  ist der Einheitsvektor in Richtung der Verbindung der Ladungsschwerpunkte von  $Q_1$  und  $Q_2$ .



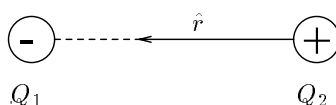


Abbildung 3.2: Richtung der Coulomb-Kraft

### 3.3.2 Elektrische Felder von Punktladungen und elektrischem Dipol

Für eine Punktladung  $Q$  erhalten wir das elektrische Feld, indem wir im Coulomb-Gesetz (vgl. Gleichung 3.7) durch die Probeladung  $q$  dividieren:

$$\vec{E}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (3.11)$$

Die Feldlinien sind überall radial gerichtet. Dabei zeigt das Feld immer von der positiven Ladung weg.



Abbildung 3.3: Richtung der Feldlinien

#### Elektrischer Dipol:

**Definition 3.12:** Elektrischer Dipol

Eine Anordnung aus positiver Ladung  $q$  und gleich großer negativer Ladung  $-q$  im Abstand  $d$  heißt elektrischer Dipol.

**Definition 3.13:** Elektrisches Dipolmoment

Der Vektor von  $-q$  nach  $+q$  wird elektrisches Dipolmoment genannt:

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{d} \quad (3.13)$$

Das elektrische Feld eines Dipols erhält man durch vektorielle Addition der von den Einzel- ladungen erzeugten Felder. Für Entfernungen  $r \gg d$  ergibt sich dabei für den Betrag  $|\vec{E}_{Dp}|$  (s. Niedrig):

$$E_{Dp} = f \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_e}{r^3} \quad (3.14)$$

Der Faktor  $f$  steht dabei für einen Zahlenwert, der vom Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{d}$  abhängt. Elektrische Dipole sind für viele Wechselwirkungen von Bedeutung. Zwar sind makroskopische Stoffe meist elektrisch neutral, doch können bei mikroskopischer Betrachtung die Ladungsschwerpunkte von positiver und negativer Ladung an verschiedenen Stellen liegen. Das entstehende Feld ist somit ein Dipolfeld.

### 3.3.3 Gaußsches Gesetz

Wir betrachten nochmals das elektrische Feld  $\vec{E}$  einer Punktladung  $Q$ :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Wir stellen uns vor, daß die Ladung  $Q$  im Abstand  $r$  von einer geschlossenen Kugel umgeben ist. Dann bilden wir das Hüllen- oder auch Flächenintegral:

$$\int \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Da  $\vec{E}$  immer parallel oder antiparallel zum Normalenvektor auf die Kugeloberfläche gerichtet ist, d.h. es gilt  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$ , kann man umformen:

$$\epsilon_0 \cdot \int_{\text{Kugeloberfl.}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi r^2$$

Nun setzen wir für  $E = |\vec{E}|$  das Ergebnis des Coulomb-Gesetzes ein:

$$\begin{aligned} \int \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \epsilon_0 \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \\ &= Q \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß dasselbe Ergebnis erhalten wird, wenn man eine beliebige Hüllfläche um  $Q$  wählt. Im allgemeinen Fall gilt - wegen der vektoriellen Überlagerung der Felder von einzelnen Punktladungen - das

**Gaußsche Gesetz**

$$\int \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_i Q_i \quad (3.15)$$

**Definition 3.16:** Elektrischer Fluß

Man definiert den elektrischen Fluß  $\varphi$  durch

$$\varphi = \oint_{(\text{Fläche})} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (3.16)$$

Der gesamte elektrische Fluß durch eine geschlossene Hüllfläche ist also gleich der Summe der eingeschlossenen Ladungen.

**Definition 3.17:** Dielektrische Verschiebungsdichte im Vakuum

Man definiert nun noch die dielektrische Verschiebungsdichte oder auch elektrische Flußdichte im Vakuum als

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (3.17)$$

### 3.3.4 Elektrische Spannung

Wir berechnen die Arbeit  $W_{12}$ , die verrichtet werden muß, um eine Ladung gegen die elektrische Kraft  $\vec{F}_{el} = +q\vec{E}$  zu verschieben, und zwar vom Ort  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$ :

$$W_{12} = - \int_1^2 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Man kann noch zeigen, daß  $W_{12}$  unabhängig vom Weg zwischen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  ist.

**Definition 3.18:** Elektrische Spannung

Die Größe  $U$  gemäß der folgenden Definition heißt elektrische Spannung zwischen den Punkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$ :

$$U = \frac{W_{12}}{q} = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.18)$$

Sie ist der Quotient aus der entlang der Strecke von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  (siehe Abb. 3.4) verrichteten Arbeit  $W_{12}$  und der Ladung  $q$ . Die Dimension der Spannung ist Arbeit/Ladung. Die SI-Einheit der Spannung ist  $1 \text{ Nm/C} = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V}$ .

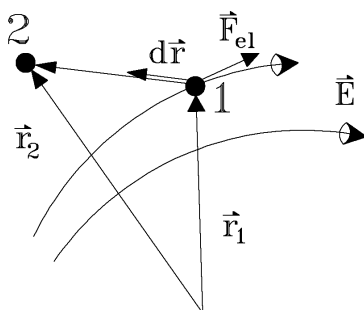


Abbildung 3.4: Darstellung zur Spannung

Um eine Probeladung  $q$  in sehr große Entfernung zu einer sie beeinflussenden Ladungsverteilung zu bringen, ist i.a. keine unendlich große Arbeit nötig. Umgekehrt hat eine Ladung, die aus dem Unendlichen zu einem Punkt P im Bereich der Ladungsverteilung gebracht wird, eine potentielle Energie:

$$W_{pot} = -W_{p \rightarrow \infty}$$

Dabei ist  $W_{p \rightarrow \infty}$  die Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Probeladung  $q$  vom Punkt P ins Unendliche zu bringen.

**Definition 3.19:** Elektrisches Potential

Man definiert nun den Begriff des elektrischen Potentials eines Punktes P bzgl. eines Punktes im Unendlichen:

$$\varphi_{el}(P) = \frac{W_{pot}}{q} = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{r} \quad (3.19)$$

**Wichtige Konsequenz:**

Offenbar ist die Potentialdifferenz  $\varphi_{el}(B) - \varphi_{el}(A)$  gleich der Spannung  $U_{AB}$  zwischen den Punkten A und B.

### 3.3.5 Kapazität

Wir betrachten zwei Leiter, zwischen denen ein elektrisches Feld besteht.

**Definition 3.20:** Kondensator

*Die oben beschriebene Anordnung heißt Kondensator.*

Die Voraussetzung für das elektrische Feld ist dabei, daß wir zuvor Ladungen getrennt haben, also z.B. Ladungen von dem einen zum anderen Leiter transportiert haben.

Uns interessiert nun der Zusammenhang zwischen den Ladungen auf den Leitern und dem zwischen ihnen bestehenden elektrischen Feld oder genauer zu der zwischen Leitern herrschenden Spannung. Wir verwenden das Gaußsche Gesetz (vgl. Gleichung 3.15):

$$\int_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sum Q_i$$

Dabei ist (A) eine Hüllfläche, die die Ladungen  $Q_i$  umschließt. Offenbar ist  $|\vec{D}| = \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|$  proportional zu  $Q = \sum Q_i$ . Wir verwenden nun die Definitionsgleichung der Spannung  $U$  (s.Gleichung 3.18):

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Die Spannung  $U$  ist offenbar proportional zu  $Q$ , da  $Q$  proportional zu  $|\vec{E}|$  ist. Es ergibt sich, daß bei einem Kondensator die Spannung und die Ladung zueinander immer proportional sind.

#### Kondensator-Gleichung

$$Q = C \cdot U \tag{3.21}$$

**Definition 3.22:** Kapazität

*Die Größe  $C$  heißt Kapazität des Kondensators und ist eine für die Leiteranordnung charakteristische Größe.  $C$  gibt an, wieviel Spannung zwischen den Leitern anliegt, wenn eine bestimmte Ladungsmenge aufgebracht wurde.*

Die SI-Einheit ist gemäß der Dimension Ladung/Spannung gleich  $1 \text{ C/V} = 1 \text{ F}$ , wobei F für Farad (von Faraday abgeleitet) steht. Technisch realisierbare Kapazitäten liegen meist im Bereich von  $10^{-9} \dots 10^{-12} \text{ F}$ , d.h. nF (Nanofarad) bis pF (Picofarad).

**Beispiel:** Plattenkondensator

Er ist aus zwei parallelen Metallplatten aufgebaut, die sich in geringem Abstand  $d$  befinden. Die Feldstärke  $|\vec{E}|$  ist überall konstant, da  $\vec{E}$  ein homogenes Feld ist. Die Definition der Spannung liefert nach (3.18):

$$U = E \cdot d \tag{3.23}$$

Das Gaußsche Gesetz liefert bei der Wahl der Hüllfläche gemäß Abbildung 3.5:

$$Q = \varepsilon \int \vec{E} d\vec{A} = \varepsilon E \cdot A$$

Wenn  $A$  die innere Oberfläche der Kondensator-Platten ist und nur innen ein Feld existiert, so gilt:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}$$

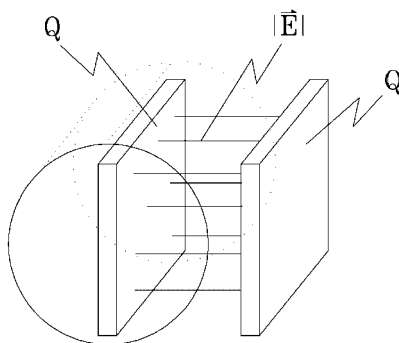


Abbildung 3.5: Skizze zur Wahl der Hüllfläche

Für die Kapazität  $C$  des Plattenkondensators ergibt sich somit:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon E \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

#### Technische Bedeutung von Kondensatoren:

Kondensatoren haben technische Bedeutung erlangt

- als Ladungsspeicher.
- zur Speicherung elektrischer Energie in Form des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten.

#### Messung der Elementarladung: Millikan-Versuch

Zwischen die Platten eines geladenen Kondensators werden geladene Partikel gebracht. Jedes Öltröpfchen trägt eine mehr oder weniger große Ladungsmenge. Wir betrachten die Kräftebilanz, die am Tröpfchen vorliegt. An dem Tröpfchen greifen an:

- Schwerkraft  $m \cdot g = \vec{F}_G$   
Streng genommen muß hier eine Auftriebskorrektur vorgenommen werden.
- Elektrische Kraft  $q \cdot \vec{E} = \vec{F}_{el}$  mit  $|\vec{E}| = U/d$

Durch geeignete Wahl von Größe und Vorzeichen der Spannung  $U$  kann die Gesamtkraft

$$F_{ges} = q \cdot \frac{U}{d} - m \cdot g$$

zum Verschwinden gebracht werden. Damit ergibt sich für die Ladung

$$q = m \cdot g \cdot \frac{d}{U}$$

Die Masse  $m$  des Teilchens kann aus seiner Größe bestimmt werden. Man erhält stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Die Ladung ist folglich gequantelt (Millikan, 1910).

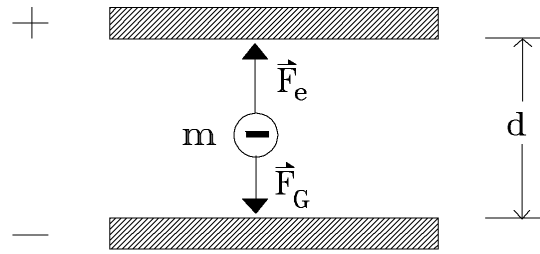


Abbildung 3.6: Millikan-Versuch

### 3.3.6 Energiegehalt elektrischer Felder

Wenn ein Kondensator zur Speicherung elektrischer Energie eingesetzt wird, dann stellt sich natürlich die Frage, wie groß ist der Energieinhalt eines geladenen Kondensators überhaupt ist. Wir überlegen, welche Arbeit wir verrichten müssen, um den Kondensator auf die gewünschte Spannung  $U_0$  aufzuladen. Der Kondensator sei durch das Aufbringen der Ladung  $Q$  bereits auf die Spannung  $U$  aufgeladen. Wir wollen nun weitere Ladung  $dQ$  zusätzlich zu  $Q$  auf den Kondensator aufbringen. Dafür muß die zusätzliche Arbeit

$$dW = dQ \cdot U$$

verrichtet werden. Wir ersetzen die Spannung  $U$  gemäß der Kondensatorgleichung durch  $U = Q/C$ . Dies führt zu

$$dW = \frac{Q}{C} \cdot dQ$$

Die gesamte Arbeit zur Aufladung auf die Spannung  $U_0$  erhält man dann durch Integration zu

$$\begin{aligned}
 W_{ges} &= \int_0^{W_{ges}} dW \\
 &= \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q dQ \\
 &= \frac{1}{2C} Q_0^2 \\
 \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die gespeicherte Energie nach Verrichtung der Aufladearbeit liegt als Energie des elektrischen Feldes zwischen der Platten des Kondensators vor. Als Beweis dafür, daß elektrische Energie gespeichert ist, kann man die Beschleunigung einer elektrischen Ladung in dem herrschenden elektrischen Feld betrachten.

### 3.3.7 Bewegung von Ladungen in elektrischen Feldern

Wir betrachten wieder unseren Plattenkondensator. Eine Ladung  $q$  in einem elektrischen Feld

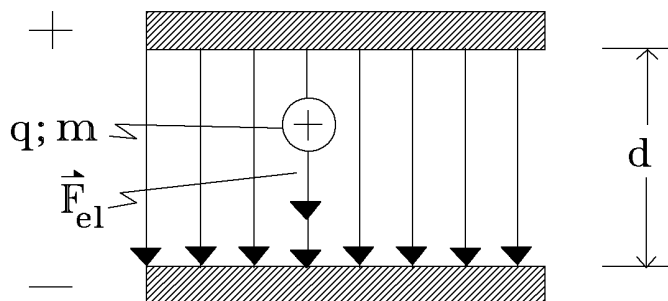


Abbildung 3.7: Bewegung im Plattenkondensator

erfährt die elektrische Kraft

$$|\vec{F}_{el}| = q \cdot |\vec{E}| = q \cdot \frac{U}{d}$$

Kann sie sich frei bewegen, so wird sie durch diese Kraft gegen ihre Trägheit beschleunigt. Nach der Beschleunigung muß die kinetische Energie  $W_{kin}$  der Ladung genauso groß sein wie die Arbeit  $W_{el}$ , die  $\vec{E}$  an der Ladung  $q$  verrichtet hat.

$$\begin{aligned} W_{kin} &= W_{el} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= q \cdot U \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeit der Ladung  $q$  die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad (3.25)$$

Die kinetische Energie  $W_{kin}$ , die ein Elektron beim Durchlaufen der Spannung  $U = 1V$  aufnimmt, beträgt mit  $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$  gerade

$$\begin{aligned} W_{kin} &= q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Ws} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

**Definition 3.26:** Elektronenvolt

Die beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von  $U = 1V$  von einem Elektron aufgenommene Energie beträgt 1 eV. Es gilt dabei

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Ws} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (3.26)$$

**Bewegung quer zum elektrischen Feld:**

Wir nehmen jetzt an, daß das Elektron mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  quer zum  $\vec{E}$ -Feld in den Kondensator eintritt. Wie ändert sich nun seine Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ?

In x-Richtung herrscht keine Kraft, die die Ladung beschleunigen könnte. Damit ist  $\vec{v}_x = \vec{v}_0$ . In y-Richtung dagegen erfährt die Ladung durch  $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$  die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{el}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Mit  $|\vec{a}| = \frac{U \cdot q}{d \cdot m}$  folgt für die in x- bzw. y-Richtung in der Zeit  $t$  zurückgelegten Wege:

$$\begin{aligned} s_x &= v_0 \cdot t \\ s_y &= \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{Uq}{2dm} \cdot t^2 \end{aligned}$$

Dies ist die gleiche Situation wie beim schiefen Wurf. Die Ladung  $q$  durchquert eine Parabel im elektrischen Feld. Die Bahnkurve  $s_y(s_x)$  erhält man durch Eliminieren der Zeit  $t$ .

**Magnetische Kräfte:**

Es gibt magnetische Kräfte, die zuerst zwischen magnetischen Dipolen beobachtet wurden. Dazu gibt es auch magnetische Felder. Die magnetischen Phänomene werden aber erst später besprochen, weil ihr Zusammenhang mit den elektrischen Strömen grundlegend ist. Eine magnetische Beeinflussung der geladenen Teilchen findet aber nur statt, wenn sich diese bewegen.



# Kapitel 4

## Grundlagen der Struktur der Materie

Die Eigenschaften makroskopischer Körper werden verständlich, wenn man die Kenntnis ihrer atomistischen Struktur besitzt. Historisch gesehen war die Bestimmung bzw. das Erkennen der atomaren Struktur ein langwieriger Prozeß. Wir stellen hier nur die wichtigsten Ergebnisse zusammen, denn das meiste davon ist heute bereits Teil der Allgemeinbildung.

### 4.1 Aufbau und Eigenschaften von Atomen

#### Die "kleinsten" Bausteine:

Wir beginnen mit den Atomkernen. Wir wollen uns hier nicht darum kümmern, ob diese ebenfalls noch eine Struktur haben. Die Atomkerne setzen sich zusammen aus:

- Protonen
- Neutronen

#### **Definition 4.1:** Nukleonen

*Die Kernbausteine, d.h. Protonen und Neutronen, werden als Nukleonen zusammengefaßt.*

Die Nukleonen werden in den Atomkernen durch die Kernkräfte zusammengehalten. Diese sind sehr kurzreichweitig ( $\approx 10^{-15}$  m). Die Protonen besitzen die elektrische Ladung  $+1e$ , d.h. eine positive Elementarladung  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Die Neutronen tragen dagegen keine elektrische Ladung.

Hieraus folgt also, daß Atomkerne immer positiv geladen sind. Die Kernladungszahl ist die Anzahl der im Kern enthaltenen Protonen.

#### **Definition 4.2:** Kernladungs- und Nukleonen-Zahl

*Wir bezeichnen mit  $Z$  die Kernladungszahl und mit  $N$  die Nukleonenzahl.*

Ein Atomkern besitzt ein elektrisches Feld, welches durch seine Ladung  $Ze$  hervorgerufen wird. Für dieses Feld gilt, wenn  $r$  der Abstand vom Kern ist:

$$\vec{E}_{\text{Kern}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze}{r^2} \cdot \hat{r}$$

**Atome:**

Im elektrischen Feld des Kerns sind Elektronen durch die Coulomb-Wechselwirkung gebunden. Die Elektronen tragen eine negative Elementarladung  $-e$ . Die Masse eines Elektrons  $m_e$  ist  $1/1836 \cdot m_p$ , wenn  $m_p$  die Masse des Protons ist.

Teilchen	Masse
Elektron	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$m_p = 1.6735 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

**Definition 4.3:** Neutrale Atome

Neutrale Atome enthalten ebenso viele Elektronen wie Protonen. Dadurch entsteht ein neutrales Gebilde, das  $Z$  Elektronen und  $Z$  Protonen enthält.

**Definition 4.4:** Ion

Sind in der Umgebung eines Kerns mehr bzw. weniger Elektronen lokalisiert als es der Protonenzahl entspricht, so liegt ein negatives bzw. positives Ion vor.

**Atommassen:**

Die Atommassen sind praktisch gleich der Gesamtmasse der im Kern enthaltenen Nukleonen. Man bezieht dabei die Atommasse auf jene des  $^{12}\text{C}$ -Atoms.

**Definition 4.5:** Atomare Masseneinheit

Unter der atomaren Masseneinheit  $m_u$  versteht man per definitionem:

$$m_u = \frac{1}{12} \cdot m(^{12}\text{C}) = 1,6605525 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (4.5)$$

Die relative, weil auf das Kohlenstoffatom bezogene, Atommasse  $A_r$  ist damit:

$$A_r = \frac{\text{Masse des Atoms}}{\frac{1}{12} \text{Masse } ^{12}\text{C}} = \frac{m_a}{m_u}$$

**Beispiele:**

Kohlenstoff  $^{12}\text{C}$ :  $A_r = 12.00$

Natrium  $^{23}\text{Na}$ :  $A_r = 22.989771$

**Atombau:**

Wir behandeln jetzt die Verteilung der Elektronen im Atom. Die Elektronen halten sich in der Umgebung des Kerns auf, d.h. in etwa in einem Raum der Ausdehnung einiger  $10^{-8} \text{ cm}$ . Je nach Symmetrie-Zustand kann der von einem Elektron ausgefüllte Raumbereich folgende Formen haben (siehe z.B. Niedrig):

- kugelförmig (s-Zustand)
- keulenförmig (p-Zustand)
- ..... (z.B. d-Zustand)

Das "Elektron" hat die Form einer Wolke, die aber eine innere Struktur besitzt.

**Molekülbau:**

Die Moleküle enthalten die Atome als Bestandteile. Die Kräfte zwischen den Bestandteilen,

d.h. Elektronen und Atomkernen, sind elektrische Kräfte. Über den Molekülbau entscheiden die Ladungen der Bestandteile, nicht deren Massen. Wir betrachten als einfachstes Molekül das  $H_2^+$ -Molekül-Ion. Es gilt für die Anziehung zwischen jedem der beiden Kerne und dem Elektron:

$$\vec{F}_{1e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{1e}^2} \cdot \hat{r}_{1e}$$

Die Abstoßung zwischen den zwei Kernen (Protonen) ergibt sich zu:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

Der intramolekulare Abstand  $|\vec{r}_{12}|$  stellt sich so ein, daß die anziehende Wechselwirkung der Elektronenladungswolke mit den Kernen deren Coulomb-Abstoßung möglichst überkompensiert.

### Mehratomige Moleküle:

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am Atom weist oft bevorzugte Richtungen auf. Die Kräfte längs dieser Richtungen sind besonders ausgeprägt. Folglich lagern sich die Atomkerne längs dieser Richtungen aneinander.

### Bemerkung:

Für die Bindung von Molekülen/Atomen in Flüssigkeiten und Festkörpern sind dieselben Kräfte und dieselben Überlegungen maßgebend. Diese Kräfte sind häufig sogenannte "van der Waals-Kräfte", d.h. sie hängen wie  $\sim 1/r^7$  vom Abstand der Moleküle ab. Mit den verschiedenen Erscheinungsformen von Materie beschäftigen wir uns gleich.

## 4.2 Erscheinungsformen von Materie

Die Atome bzw. Moleküle können in Stoffen in verschiedenen Ordnungszuständen vorliegen.

- Festkörper: regelmäßige Fernordnung
- Gase: kein definierter Atomabstand vorhanden. Daher existiert keine Ordnung
- Flüssigkeiten: gut definierter mittlerer Abstand der Atome/Moleküle. Es tritt Nahordnung auf.

### Definition 4.6: Aggregatzustand

Die verschiedenen Erscheinungsformen (Ordnungszustände) heißen Aggregatzustände oder auch Phasen. Sie unterscheiden sich darin, daß die Bindungsenergie der Molekeln entweder größer, vergleichbar oder kleiner als die thermische Energie der einzelnen Molekeln ist.

### Definition 4.7: Thermische Energie

Unter der thermischen Energie verstehen wir die kinetische Energie der Molekeln. Sie ist proportional zur absoluten Temperatur der betrachteten Materiemenge (s. Wärmelehre).

### 4.2.1 Eigenschaften von Festkörpern

#### Definition 4.8: Festkörper

Bei Festkörpern ist die thermische Energie wesentlich kleiner als die Bindungsenergie.

Die Atome besitzen Gleichgewichtslagen, um die sie Schwingungen ausführen. Die Amplitude der Schwingungen hängt von der Größe der thermischen Energie ab. Festkörper zeigen daher Formbeständigkeit. Als Modellvorstellung dienen Massenpunkte, die durch elastische Federn miteinander verbunden sind.

Wir diskutieren die Folgen äußerer Kräfte, die an Festkörper-Oberflächen angreifen:

**Druck, Dehnung und Stauchung:**

Eine Kraft  $\vec{F}_S$  senkrecht auf die Oberfläche führt zur Dehnung oder Stauchung aller Federn, die beansprucht werden. Die Längenänderung  $\Delta l$  ist daher proportional zur Zahl der Federn, die beansprucht werden, d.h. zur gesamten Länge  $l$  des Festkörpers:  $\Delta l \sim l$ .

Die notwendige Kraft  $\vec{F}$ , die benötigt wird, um eine Längenänderung  $\Delta l$  hervorzurufen, ist proportional zur Zahl der Federn, die gedehnt werden müssen, d.h. zur Größe  $A$  der belasteten Oberfläche:  $|\vec{F}| \sim A$

Für die Dehnung folgt aus den eben angestellten Überlegungen das

**Hooksche Gesetz**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad (4.9)$$

Mit  $F$  ist die Normalkomponente der Kraft  $F_S$  bzgl. der Oberfläche gemeint.

**Definition 4.10:** Dehnung

Als Dehnung bezeichnet man das Verhältnis der erzielten Verlängerung bzw. Verkürzung des Festkörpers zu dessen Gesamtlänge:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4.10)$$

**Definition 4.11:** Zug bzw. Druckspannung

Zug- bzw. Druckspannung nennt man je nach Richtung der angreifenden Kraft das Verhältnis dieser Kraft zur Größe der Oberfläche, an der sie angreift:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.11)$$

**Definition 4.12:** Elastizitätsmodul

Die in Gleichung 4.9 auftretende Proportionalitätskonstante  $\sigma$  heißt Elastizitätsmodul.

Druck- und Zugspannung haben die Dimension Kraft/Fläche, d.h. für solche Spannungen wird als SI-Einheit  $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal}$  verwendet. Weiterhin gebräuchlich ist die Einheit  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ . Sie wurde lange Zeit zur Angabe des Luftdruckes verwendet.

Das Hooksche Gesetz gemäß Gleichung 4.9 oder anders ausgedrückt  $\Delta l \sim F$  gilt nur, solange die Federn nicht überdehnt werden, d.h. bei vollständig elastischem Verhalten. Zu große Spannungen führen zu plastischem Verhalten, das durch unser Federmodell aber auch noch beschrieben werden kann.

**Scherung:**

An der Oberfläche greife eine Kraft an, deren Vektor in der Oberflächenebene liegt, eine sogenannte Tangentialkraft  $\vec{F}_t$ . Ein Kräftepaar entgegengesetzter Tangentialkräfte greife an den gegenüberliegenden Oberflächen des Festkörpers an. Dadurch werden die Gitterachsen gekippt. Die Abstände zwischen Gitteratomen ändern sich dabei nicht. Wiederum muß gelten:

Stoff	Elastizitätsmodul E [kbar]	Schubmodul G [kbar]
Al	706	265
Cu	1225	455
Edelstahl	1991	700
Nickel	2060	78.5

Tabelle 4.1: E- und G-Werte aus K.Walcher, Tab.6.1 auf Seite 97.

Um eine bestimmte Scherung  $\Delta x$  zu erzielen, muß die Kraft  $\vec{F}_t$  proportional zur Fläche  $A$  des auf Scherung beanspruchten Körpers zunehmen, also  $|\vec{F}_t| \sim A$ .

Je mehr Atome an der Scherung beteiligt sind, d.h. je dicker der Stoff ist, desto größer wird  $\Delta x$ . Ist  $d$  die Dicke, so gilt also  $\Delta x \sim d$ .

Hieraus ergibt sich für die Scherung folgende Gleichung:

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{1}{G} \cdot \frac{F_t}{A} = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad (4.13)$$

**Definition 4.14:** Schermodul

Die Proportionalitätskonstante  $G$  in Gleichung 4.13 wird Schermodul oder auch Schubmodul genannt.

Die SI-Einheit für die Schubspannung  $\tau$  ist ebenfalls 1 Pa. Wir erwarten bei kleinen Schubspannungen wieder ein elastisches Verhalten. Wir erwarten, daß Festkörper gegenüber einer Scherung "weicher" sind als gegenüber einer Stauchung, denn es müssen keine Gitterabstände geändert werden!

**Torsion:**

Die Torsion (Verdrehung) eines Stoffes kann auf die Scherung zurück geführt werden. Dünne Hohlzylinder-Elemente der Breite  $dr$  werden auf Scherung beansprucht. Als Zusammenhang zwischen Verdrehungswinkel  $\phi$  und dem Drehmoment  $M$  ergibt sich, wenn  $R$  der Radius des Stabes und  $l$  seine Länge ist (Herleitung s.Niedrig):

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{l} \cdot \phi \quad (4.15)$$

### 4.2.2 Eigenschaften von Flüssigkeiten

Die Atome führen Bewegungen über größere Entfernungen aus. Es finden Platzwechselvorgänge statt. Es existiert noch eine Nahordnung, aber keine kristalline Struktur (Fernordnung). Die Atome lassen sich zwar leicht gegeneinander verschieben, aber ihr gegenseitiger Abstand läßt sich schwer verändern.

**Definition 4.16:** Flüssigkeit

Bei Flüssigkeiten entspricht die thermische Energie in etwa der Bindungsenergie.

**Anwendung:**

Will man ein Molekül aus der Flüssigkeit ablösen, so muß viel Energie aufgewandt werden. Flüssigkeiten können freie Oberflächen ausbilden.

**Flüssigkeitsmodell:** Allseitigkeit des Druckes

Wir haben einen Behälter mit Stahlkugeln, die untereinander nicht durch Federn verbunden

sind. Greifen nun äußere Kräfte an der Flüssigkeit an, so zeigt sich, daß sie sich bei Druck wie ein Festkörper verhält, aber einer Scherkraft keinen Widerstand entgegensetzt. Sie ist also zwar volumenbeständig, aber nicht formbeständig. Da die Moleküle sich in der Oberfläche leicht verschieben lassen, ist dort dann ein Gleichgewicht, wenn parallel zur Oberfläche keine Kräfte mehr herrschen. Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich so ein, daß eventuell angreifende Kräfte senkrecht auf ihr stehen. Auf ein Massenelement  $\Delta m$  in der Oberfläche wirken ein:

- Trägheitskraft:  $|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$
- Schwerkraft:  $\Delta m \cdot g$
- Zentrifugalkraft:  $\Delta m \cdot r \cdot \omega^2$

Die resultierende Oberfläche stellt sich so ein, daß sie senkrecht auf der resultierenden Kraft  $\vec{F}$  steht.

**Beispiel:** Rotierender Wasserzylinder Betrachten wir nun einen Wasserzylinder, der einer Rotation um seine Mittelachse unterworfen wird. Es ergibt sich die in Abbildung 4.1 gezeigte Situation.

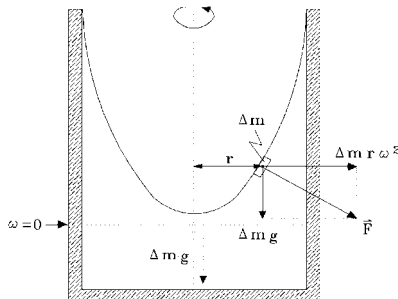


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des rotierenden Wasserzylinders

Qualitativ erhalten wir als Ergebnis, je größer  $\omega$  wird, desto waagerechter ist die resultierende Kraft  $\vec{F}$  gerichtet und desto tiefer wird die Parabel, die im Schattenwurf ausgehend von einer Lichtquelle entsteht.

#### Flüssigkeitsmodell:

Wir werden später unter Strömungsvorgängen nur die ideale Flüssigkeit behandeln. Ihre Definition ist ebenfalls dort zu finden.

### 4.2.3 Eigenschaften von Gasen

#### Definition 4.17: Gas

Bei Gasen ist die thermische Energie der Atome oder Moleküle wesentlich größer als die Bindungsenergie.

Es ist eine gänzlich ungehinderte Bewegung der Atome in alle Richtungen möglich. Dabei sind weder Form- noch Volumenstabilität vorhanden. Bei den Stößen zwischen den Gasato-

men werden Energie und Impuls ausgetauscht. Daher existiert eine Verteilung der Atomgeschwindigkeiten, auch Maxwell-Verteilung genannt. Bei den Stößen mit den Gefäßwänden wird ebenfalls Impuls ausgetauscht. Die Änderung des Impulses führt wegen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

zu einer Kraft auf die Wände und damit zum sogenannten Gasdruck. Dabei wird die Normalkomponente des Impulsvektors des stoßenden Gasatoms umgekehrt.

### 4.3 Stoffmenge

Ein Maß für die Menge eines Stoffes ist die Teilchenzahl  $N$ . Wird sie auf das Volumen  $V$ , welches der Stoff einnimmt, bezogen, so erhält man die Anzahldichte  $n$ .

**Definition 4.18:** Anzahldichte

*Die Anzahldichte  $n$  ist definiert als der Quotient aus Teilchenzahl und Volumen, in dem sich die Teilchen befinden. Die Anzahldichte kann auch infinitesimal definiert werden. Es ist*

$$n = \frac{N}{V} \quad (4.18)$$

Die Teilchenzahl ist makroskopisch schlecht meßbar. Deshalb hat man als Basisgröße im SI-System die dazu proportionale Größe der Stoffmenge  $\nu$  eingeführt.

**Definition 4.19:** Stoffmenge

*Die Stoffmenge  $\nu = 1 \text{ mol}$  ist diejenige Stoffmenge eines Systems, welches genau so viele Teilchen enthält, wie 12 g reinen Kohlenstoffes  $^{12}\text{C}$ . Daher entspricht die Stoffmenge  $\nu = 1 \text{ mol } ^{12}\text{C}$  genau der Masse von 12 g  $^{12}\text{C}$ .*

Die Anzahl  $N_A$  der Teilchen in 1 mol ist die Avogadro-Konstante. Ihr derzeit bester Meßwert ist  $N_A = 6.0220921 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Meßverfahren für Stoffmenge:**

Durch Wägung erhält man 1 mol eines beliebigen Stoffes, wenn man soviel Gramm eines Stoffes abwägt, wie der relative Atommasse entspricht.

**Beispiel:**

Die relative Atommasse von  $^{12}\text{C}$  ist  $A_R = 12$ . Wägt man also 12 g Kohlenstoff ab, so hat man genau 1 mol dieses Stoffes.

**Meßverfahren für  $N_A$ :**

Die Avogadro-Konstante läßt sich aus einer Vielzahl physikalischer Vorgänge und Theorien erhalten:

- Kinetische Gastheorie
- Brownsche Molekularbewegung
- Oberflächenspannung von Lösungen
- Schwarzkörper-Strahlung
- Streuung von Licht durch die Atmosphäre

- Elektrische Ladung von Öltröpfchen
- Größe von Gitterbausteinen
- Radioaktive Prozesse
- Feinstruktur von Spektrallinien



# Kapitel 5

## Teilchen und Teilchensysteme II: Teilchensysteme

### 5.1 Einführung

Wir haben gelernt, daß man reale Materie stets als eine Ansammlung von Massenpunkten auffassen kann, zwischen denen Kräfte wirken. Viele Eigenschaften der realen Systeme lassen sich durch idealisierende Modelle beschreiben:

- Festkörper: Modell des starren Körpers  
Die Abstände aller Massenpunkte bleiben konstant, auch wenn äußere Kräfte und/oder Drehmomente angreifen.
- Flüssigkeiten: Modell der idealen Flüssigkeit  
Die Flüssigkeit besitzt keine Kompressibilität und keine innere Reibung.
- Gase: Modell des idealen Gases  
Es handelt sich bei den Gasatomen bzw. -molekülen um Massenpunkte, die keine Wechselwirkung untereinander, sondern nur mit den Gefäßwänden haben.

In mancher Beziehung kann das gesamte Teilchensystem als ein Massenpunkt aufgefaßt werden, in welchem man sich die Gesamtmasse des Systems vereinigt denken kann. Dies wird im folgenden begründet.

### 5.2 Schwerpunkt eines Teilchensystems

Es sei ein System von Massenpunkten mit der jeweiligen Masse  $m_i$  gegeben. Die Gesamtmasse des Systems  $M$  ergibt sich durch die Summation der Einzelmassen, d.h. die Gesamtmasse beträgt  $M = \sum m_i$ . Ein einzelnes Massenelement  $m_i$  an einem Ort  $\vec{r}_i$  erfährt im Schwerfeld  $\vec{a} = \vec{g}$  die Kraft  $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}$ . Die Drehmomente der einzelnen Massenpunkte bzgl. eines willkürlichen gewählten Bezugspunktes sind

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = m_i[\vec{r}_i \times \vec{a}]$$

Wir zeigen nun, daß sich das Gesamt-Drehmoment  $\vec{M}$  darstellen läßt als ein Vektorprodukt aus der Gesamtkraft  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  und einem Schwerpunktsvektor  $\vec{r}_s$ . Es ist nämlich

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{a}) = \vec{r}_s \times \sum_i m_i \cdot \vec{a}$$

Wir wollen nun beide Seiten so umformen, daß wir das Vektorprodukt mit der Beschleunigung ausklammern können. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \left( \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \right) \times \vec{a} = \left( \vec{r}_s \sum_i m_i \right) \times \vec{a} \\ &\Rightarrow \vec{r}_s \sum_i m_i = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \\ &\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Definition 5.2:** Schwerpunktsvektor

Der Vektor  $\vec{r}_s$  heißt Schwerpunktsvektor unseres Teilchensystems.

**Beispiel:** 2 Teilchen

Der Schwerpunktsvektor zweier Teilchen ergibt sich als arithmetisches Mittel unter Berücksichtigung der Vektoraddition:

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

**Schwerpunktsbestimmung:**

Der Schwerpunkt eines Körpers läßt sich auf recht einfache Weise bestimmen. Ein Körper erfährt im Schwerfeld  $\vec{g}$  ein Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r}_s \times \vec{F}_G$ , solange der Schwerpunktsvektor  $\vec{r}_s$  und die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  noch nicht parallel sind. Der Schwerpunkt  $S$  wird versuchen, unter den Aufhängepunkt (Drehpunkt) zu kommen, da dann die beiden erwähnten Vektoren parallel sind. Man hängt den Körper nacheinander an zwei verschiedenen Punkten drehbar auf und bestimmt die Senkrechten, nachdem der Körper sich nicht mehr dreht. Der Schnitt dieser Senkrechten liefert den Schwerpunkt  $S$ .

**Wahl des Koordinatenursprungs:**

Häufig wird man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt  $S$  legen. Dann ist der Schwerpunktsvektor ein Nullvektor:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{q}_i}{\sum_i m_i} = 0$$

Dabei ist  $\vec{q}_i$  der Ortsvektor des Massenpunktes  $i$  der Massenverteilung bzgl.  $S$  als Koordinatenursprung.

### 5.3 Impuls eines Teilchensystems

Der Gesamtimpuls eines Teilchensystems ergibt sich aus der vektoriellen Addition der Einzelimpulse der Massenelemente  $m_i$ :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \cdot \vec{r}_i) \end{aligned}$$

Verwendet man den Schwerpunktvektor  $\vec{r}_s$  bzw. die Schwerpunktschwindigkeit  $\vec{v}_s = \frac{d}{dt}\vec{r}_s$ , so läßt sich die rechte Seite umformen und man erhält als Gesamtimpuls des Teilchensystems

$$\vec{p} = M \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}_s = M \cdot \vec{v}_s \quad (5.3)$$

Faßt man diese Gleichung in Worte, so kann man sagen, hinsichtlich seines Impulses verhält sich das Teilchensystem so, als wäre die gesamte Masse  $M$  in  $S$  vereinigt.

#### Schwerpunktsbewegung:

Es mögen an den  $i$  Massenpunkten die Kräfte  $\vec{F}_i$  angreifen. Diese verursachen nach der Grundgleichung der Dynamik folgende Änderung der Impulse  $\vec{p}_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} (M \cdot \vec{v}_s) \\ \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i &= \frac{d}{dt} \vec{p}_s \end{aligned}$$

In der Kräftebilanz brauchen nur äußere (externe) Kräfte berücksichtigt werden. Der Grund dafür ist, daß sich die Wechselwirkungskräfte zwischen Paaren von Massenpunkten wegen des Newtonschen Axioms "actio = reactio" gegenseitig aufheben. Man kann also auch schreiben:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \vec{p}_s$$

Nur äußere Kräfte  $\vec{F}_{ext}$  beeinflussen die Bewegung von  $S$  und können allein eine Änderung des Gesamtimpulses verursachen. Ohne äußere Kräfte, d.h.  $\vec{F}_{ext} \equiv 0$ , beschreibt  $S$  eine geradlinige gleichförmige Bewegung oder bleibt in Ruhe.

## 5.4 Drehimpuls eines Teilchensystems

Für den Drehimpuls eines einzelnen Massenpunktes  $i$  haben wir früher bereits erhalten:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i)$$

Dabei wurde ein willkürlicher Bezugspunktes  $0$  gewählt. Die zeitliche Änderung von  $\vec{L}_i$  wird immer durch die Einwirkung eines Drehmoments  $\vec{M}_i$  verursacht, d.h.  $d\vec{L}_i/dt = \vec{M}_i$ . Für unser Teilchensystem gilt entsprechend

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$$

Für  $d\vec{L}/dt$  sind nur die äußeren Drehmomente verantwortlich, denn innere Momente, die durch Wechselwirkungskräfte bedingt sind, heben sich wegen des 3.Newtonschen Axioms immer paarweise auf:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$$

Eine Änderung des Gesamtdrehimpulses erfordert ein äußeres Drehmoment. Ohne äußere Momente bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten. Wir stellen fest, daß der Drehimpuls  $|\vec{L}|$  von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Verteilung der trägen Massen im Körper abhängt. Ändern wir die Massenverteilung, dann ändert sich auch  $\omega$ , so daß  $|\vec{L}|$  erhalten bleibt.

## 5.5 Energie eines Vielteilchensystems

Die Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  eines Massenpunktes kann zusammengesetzt werden aus zwei Anteilen:

- Schwerpunktschwindigkeit  $\vec{v}_s$  von  $S$
- Geschwindigkeit des  $i$ -ten Massenpunktes  $\vec{u}_i$  bzgl.  $S$ .  
Die Geschwindigkeit  $\vec{u}_i$  ist die Geschwindigkeit, die in einem mit  $S$  mitbewegten Koordinatensystem gemessen wird.

Die Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich also durch die Addition der beiden Anteile, d.h.  $\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{u}_i$ . Das Quadrat dieser Geschwindigkeit ist dann

$$v_i^2 = v_s^2 + u_i^2 + 2 \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i)$$

Als kinetische Energie des Massenpunktes  $W_{kin}$  erhält man daher

$$\begin{aligned} W_{kin} &= \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 \\ &= \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_s^2 + \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot u_i^2 + \sum m_i \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i) \\ &= \frac{M}{2} \cdot v_s^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} \cdot u_i^2 + \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i) \\ &= W_{kin,S} + W_{kin,int} + \vec{v}_s \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i \end{aligned}$$

Da der Schwerpunkt aber Koordinatenursprung ist, ist  $\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = 0$  (siehe 5.2). Damit ist aber

$$\sum_i m_i \vec{u}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = 0$$

Somit gilt für die kinetische Energie des Vielteilchensystems, daß sie sich aus der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung und der kinetischen Energie des Massenpunktes bzgl. des Schwerpunktes zusammensetzt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} M v_s^2 + W_{kin,int}$$

Die potentielle Energie aufgrund innerer Kräfte ist unabhängig vom Bezugssystem. Wird am Teilchensystem keine Arbeit durch äußere Kräfte verrichtet, so bleibt die innere Energie konstant:

$$U = W_{kin,int} + U_{pot,int} = \text{konst.}$$

### Rotationsenergie eines starren Körpers:

Wir betrachten jetzt einen starren Körper, d.h. die Massenpunkte mit der Masse  $m_i$  behalten ihre gegenseitigen Abstände immer bei. Wir berechnen nun die kinetische Energie des starren Körpers, die in seiner Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse durch  $S$  enthalten ist (siehe Abbildung 5.1).

Für ein Massenelement  $\Delta m_i$  gilt mit der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}_i$ :

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2$$

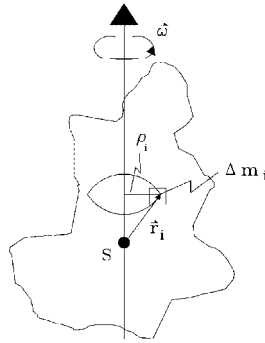


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung zum starren Körper

Dazu kommt noch  $W_{\text{kin},S} = \frac{1}{2}M \cdot v_s^2$ , wenn sich der Schwerpunkt  $S$  bewegt. Aus der obigen Gleichung ergibt sich unter Verwendung von  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ :

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 \rho_i^2$$

Hier ist  $\rho_i$  der Abstand von  $\Delta m_i$  zur Drehachse. Als Gesamtenergie erhält man dann durch Summation über alle Massenelemente und weil  $\omega$  für alle Werte von  $\rho_i$  gleich groß ist:

$$W = \sum_i \Delta W_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5.4)$$

**Definition 5.5:** Trägheitsmoment

Die Größe  $J$  gemäs der folgenden Definitionsgleichung wird als Trägheitsmoment bezeichnet:

$$J = \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2 \quad (5.5)$$

Wählt man die Massenverteilung hinreichend fein, so integriert man über alle infinitesimalen Massenelemente:

$$J = \int r^2 dm \quad (5.6)$$

Bei Rotation um eine beliebige, zur Achse durch  $S$  parallele Achse, gilt (vgl. Literatur) mit  $s$  dem Abstand der beiden Drehachsen der

**Satz von Steiner**

$$J_A = J_S + M \cdot s^2 \quad (5.7)$$

Man erhält ferner durch die Einführung des Trägheitsmomentes als

**Drehimpuls eines starren Körpers**

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (5.8)$$

## 5.6 Stoßprobleme

### 5.6.1 Einführung

Wir wollen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls auf den Zusammenstoß zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  anwenden. Nähern sich nun  $m_1$  und  $m_2$  mit  $\vec{v}_1$  bzw.  $\vec{v}_2$  auf geradlinigen Bahnen. Bei kleinen Abständen erfahren sie eine Ablenkung wegen des Zusammenstoßes. Bei großen Abständen entfernen sich  $m_1$  und  $m_2$  wieder auf geradlinigen Bahnen, aber mit geänderten Geschwindigkeiten  $\vec{v}'_1$  und  $\vec{v}'_2$ . Wenn in einem kurzen Zeitintervall  $\Delta t$  eine merkliche Ablenkung  $\Delta\vec{p}$  auftritt, so müssen in  $\Delta t$  große Kräfte  $\vec{F}$  am Werk sein. Ihnen gegenüber kann man Reibung, Schwerkraft usw. vernachlässigen. Stoßprozesse spielen eine große Rolle:

- **Wärmelehre:**  
Die Stöße zwischen Gasatomen und auf die Wände erzeugen den Druck in einem Gas.
- **Chemische Reaktionen:**  
Bei Stoffwchselfvorgängen, in der Industrie und der Umwelt. Sie sind meistens verbunden mit der Übertragung von kinetischer Energie in andere Energieformen.
- **Billard-Kugeln:**  
Hier findet praktisch keine Umsetzung von kinetischer Energie in andere Energieformen statt. Es handelt sich um elastische Stöße.
- **Stoßprozesse zwischen radioaktiver Strahlung und Gewebe**
- **Kernphysik:**  
Stoßende Teilchen können sogar ihre Identität ändern.

#### Klassifizierung möglicher Stoßprozesse:

Wir werden uns ein wenig spezialisieren. Die Kräfte sollen in Richtung der Verbindung der Massenmittelpunkte von  $m_1$  und  $m_2$  zeigen. Daher brauchen wir nur Energie- und Impulssatz. Sonst könnten wir dagegen auch Drehimpuls übertragen. Unser Handwerkszeug sind, weil nur innere Kräfte wirken, die Erhaltungssätze für den Impuls

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}'_1 + m_2 \cdot \vec{v}'_2$$

und für die Energie:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v}'_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot \vec{v}'_2^2 + \Delta W$$

#### **Definition 5.9:** Elastischer Stoß

*Bei einem elastischen Stoß bleibt die kinetische Energie des Systems erhalten, d.h. sie wird nicht in andere Energieformen umgesetzt.*

#### **Definition 5.10:** Inelastischer Stoß

*Bei einem inelastischen Stoß wird kinetische Energie in andere Energieformen umgesetzt oder umgekehrt. Die kinetische Energie kann sowohl größer als auch kleiner werden.*

Die kinetische Energie wird kleiner, wenn beim Stoß Reibung auftritt. Sie kann aber auch größer werden, wenn beispielsweise eine chemische Reaktion o.a. ausgelöst wird.

**Definition 5.11:** Zentraler Stoß

Der Stoß verläuft immer auf der Verbindungslinie der Massen-Mittelpunkte.

Im Fall des zentralen Stoßes können die Vektorpfeile weggelassen werden.

**Bemerkung:**

Der allgemeine Fall  $m_i \neq m_i$  soll hier nicht betrachtet werden.

**5.6.2 Elastischer Stoß**

Seien zunächst  $m = m_1 = m_2$  und  $\vec{v}_2 = 0$ , d.h. der zweite Körper ruht. Der Stoß braucht nicht zentral zu sein. Der Energiesatz gibt:

$$\frac{m}{2} \vec{v}_1^2 = \frac{m}{2} \vec{v}_1'^2 + \frac{m}{2} \vec{v}_2'^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2$$

Aus dem Impulssatz folgt zusätzlich  $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$ . Quadrieren wir nun den Impulssatz, so erhalten wir

$$\vec{v}_1^2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2 + 2(\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2')$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis des Energiesatzes zeigt, daß für das Skalarprodukt gelten muß:

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0 \quad (5.12)$$

Des Weiteren sollen nun drei Fälle gesondert betrachtet werden:

- $\vec{v}_1' = 0$ , d.h.  $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$   
Ein Beispiel für diesen Fall ist das Stoßpendel. Teilchen  $m_2$  fliegt mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_1$  weiter.
- $\vec{v}_2' = 0$  :  
Das Teilchen  $m_1$  hat nicht getroffen.
- Nicht zentraler Stoß:  
Das Skalarprodukt  $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$  ist Null. Folglich stehen die beiden Geschwindigkeitsvektoren senkrecht aufeinander und die beiden Massen fliegen unter  $90^\circ$  voneinander weg.

Im folgenden handele es sich nun um einen zentralen Stoß mit ungleichen Massen, d.h.  $m_1 \neq m_2$ . Die Vektorpfeile können nun weggelassen werden. Es gilt wiederum der Impulssatz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

und der Energie-Satz

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$$

Durch geeignetes Umformen erhält man (s.Literatur):

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot m_1 \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot m_2 \cdot v_2 \\ m_2 \cdot v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \cdot m_2 \cdot v_2 + \frac{2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot m_1 \cdot v_1 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \quad (5.13)$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad (5.14)$$

Für den Spezialfall  $v_2 = 0$  und  $m_1 = m_2$  erhalten wir wieder wie früher:

$$v_2' = v_1 \text{ und } v_1' = 0$$

Im Falle eines Stoßes senkrecht auf eine Wand ist wegen  $m_2 \gg m_1$  die Geschwindigkeit  $v_2 = 0$ , d.h. die Wand bewegt sich nicht. Außerdem ist in diesem Fall  $v_1' = -v_1$  und

$$\Delta p = m_1(v_1 - v_1') = 2 \cdot m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot p_1$$

Die Wand nimmt den Impulsübertrag  $\Delta p = 2p_1$  auf. Die Energie  $W_1$  bleibt dabei erhalten.

**Energieübertrag beim zentralen elastischen Stoß zwischen ungleichen Massen:**

Es gelten die Gleichungen 5.13 und 5.14. Wir wählen unser Bezugssystem so, daß es sich mit der Masse  $m_2$  mitbewegt, d.h. mit  $v_2$  gegenüber dem bisherigen System gleichförmig bewegt wird. Dabei ändert sich physikalisch offenbar nichts, aber die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Dann ist die Energieübertragung  $\Delta E$  einfach

$$\Delta E = \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{2m_2 m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (5.15)$$

Bezieht man  $\Delta E$  auf die Energie  $E_1 = \frac{m_1}{2} \cdot v_1^2$ , so erhält man

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

**Anwendung:**

Abbremsung schneller Neutronen in Kern-Reaktor. Man braucht Teilchen mit möglichst ähnlicher Masse. Man wählt z.B. schweren Wasserstoff, also Wasserstoff mit der Kernladungszahl  $Z=1$ , der aber neben dem Proton auch noch ein Neutron im Kern hat, oder Graphit  $^{12}\text{C}$ . Eine Nebenbedingung ist, daß die Neutronen durch den Stoßpartner nicht absorbiert werden sollen. Dies schließt offenbar H-Atome für die Moderierung aus.

**Elastischer Stoß:** Allgemeiner Fall:

Wir stellen fest, Kräfte werden nur in Richtung der Verbindung der beiden Schwerpunkte übertragen:  $\vec{f}_{12}$  und  $\vec{f}_{21}$ . Hierbei handelt es sich um eine Idealisierung. Wenn dies nicht mehr der Fall ist, brauchen wir noch den Drehimpulssatz. Dann ist

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} \neq 0$$



und es kann Drehimpuls ausgetauscht werden. Wenn nur Kräfte in Richtung der Verbindungsachse  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  wirken, dann kann nur Impuls längs dieser Richtung ausgetauscht werden. Wir zerlegen die Impulse  $\vec{p}_i$  und  $\vec{p}'_i$  in ihre Komponenten senkrecht (s) und parallel (p) zur Verbindungsachse der Schwerpunkte. Die Komponenten (s) werden beim Stoß nicht geändert, d.h. es gilt  $p'_{1,s} = p_{1,s}$  bzw.  $p'_{2,s} = p_{2,s}$ . Für die Komponenten (p) können die für den zentralen Stoß erhaltenen Formeln verwendet werden.

### 5.6.3 Inelastischer Stoß

Wir behandeln den inelastischen Stoß zwischen zwei Massen. Es gelten wieder der Impuls- und der Energiesatz, doch ist  $\Delta W$  nun nicht mehr Null. Wir betrachten den Spezialfall, daß beide Massen nach dem Stoß miteinander verkoppeln, also  $v'_1 = v'_2 = v'$ . Es stellt sich die Frage, wie groß in diesem Fall  $\Delta W$  ist. Ein realistischer Fall ist der inelastische Stoß mit zwei Sandsäcken. Es gilt der Energiesatz:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v'^2 + \Delta W$$

sowie der Impulssatz in der Form:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}'$$

Hieraus erhält man durch einfaches Umformen eine Gleichung für  $\vec{v}'$ :

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

Setzt man dieses Ergebnis in den Energieerhaltungssatz ein, so erhalten wir für  $\Delta W$ :

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

Wir hatten gelernt, daß man die gesamte kinetische Energie zerlegen kann:

$$W_{kin} = W_{kin,rel} + W_{kin,S}$$

Die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung bleibt erhalten, da ein abgeschlossenes System vorliegt.

**Anwendung:** Ballistisches Pendel

Ein schnelles Geschöß wird in einen Klotz geschossen. Wir wissen, daß die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung beim Stoß als mechanische Energie erhalten bleibt. Nur sie kann Hubarbeit verrichten, d.h. den Klotz auslenken. Aus obigen Formeln kann man dann die Geschößgeschwindigkeit ermitteln.



# Kapitel 6

## Wärmelehre

### 6.1 Einführung

Wir wollen in diesem Kapitel unsere Modellvorstellung eines Gases etwas präziser fassen. Bisher hatten wir als Gasmodell ein Ensemble von Massenpunkten angenommen, die miteinander nur dann wechselwirken, wenn sie zusammenstoßen. Dabei wird Impuls und Energie ausgetauscht. Dies führt zu einer Verteilung der Geschwindigkeitsbeträge um einen Mittelwert. Wenn Gasatome auf die Gefäßwände treffen, wird Impuls auf die Wand übertragen. Aufgrund der Newtonschen Bewegungsgleichung  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  wird bei dieser Übertragung des Impulses eine Kraft auf die Wände ausgeübt. Wir werden diese Vorstellungen etwas präziser fassen, um die makroskopischen Gaseigenschaften, d.h. seine Zustandsgrößen

- Druck  $p$
- Volumen  $V$
- Temperatur  $T$

zu beschreiben. Die Verknüpfung dieser Größen leistet die Zustandsgleichung für Gase.

### 6.2 Kinetische Gastheorie

#### 6.2.1 Ideales Gas

Wir wollen zunächst die Modellvorstellung des idealen Gases einführen.

**Definition 6.1:** Ideales Gas

*Das ideale Gas ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:*

- *Atome sind punktförmig. Man vergleicht den Atomdurchmesser mit dem mittleren Abstand der Atome in der Gasphase.*
- *Bei Stößen der Moleküle untereinander oder mit Wänden wird Impuls und Energie ausgetauscht. Die Stöße sind elastisch.*
- *Alle Geschwindigkeitsrichtungen kommen gleich häufig vor.*

- Führt man dem Gas Energie zu (Erhitzen, Stempeldruck), so ändert sich die kinetische Energie, d.h. die thermische Energie der Atome. Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  der Atome hängt von der Temperatur  $T$  des Gases ab, d.h. es ist  $\bar{v} = \bar{v}(T)$ .
- Die Beträge der Geschwindigkeiten haben eine Verteilung um die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  (Maxwell-Verteilung).

### Versuch: Brownesche Molekularbewegung

Unser Modell sagt, daß die Gasmoleküle Impuls auf größere Teilchen übertragen, die sich ebenfalls in dem Gefäß befinden, z.B. Tinte- oder Rußteilchen. Wegen der entsprechend größeren Masse bewegen sich die größeren Teilchen langsamer. Wir finden im Experiment, daß sich die Fremdkörper um so heftiger bewegen, je höher die Temperatur ist. Auch die Molekeln in einer Flüssigkeit sind nicht in Ruhe, sondern haben eine kinetische Energie, die von  $T$  abhängt. Die Brownesche Bewegung hat Bedeutung bei der Begrenzung der Empfindlichkeit von Zeigerinstrumenten, die wie Rußteilchen zu zittern beginnen, wenn ihre Trägheit sehr klein wird. Ebenso tritt sie bei Elektronen in Metallen, die ebenfalls eine Brownesche Molekularbewegung durchführen, in Erscheinung. Dies führt zu Spannungsschwankungen an den Enden des Leiters (Widerstandsrauschen). Je heftiger die Bewegung, desto größer ist der elektrische Widerstand.

### 6.2.2 Gesetz von Boyle-Mariotte

Wir setzen voraus, daß der Druck auf die Wände durch die Übertragung von Impuls zustande kommt, wenn die Atome reflektiert werden, denn es gilt für die Kraft auf die Wand

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wir interessieren uns im folgenden für die Normalkomponente  $F_s$  (Normalkraft) bezogen auf die Fläche, auf die die Kraft  $F_s$  einwirkt.

#### Definition 6.2: Druck

Der Quotient aus der Normalkomponente (senkrechten Komponente) der Kraft auf die Wand,  $F_s$ , und der Fläche  $A$  heißt Druck  $p$ . Der Druck ist kein Vektor, sondern er ist ein Skalar:

$$p = \frac{F_s}{A} \quad (6.2)$$

Die SI-Einheit des Druckes ist  $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$  (Pa=Pascal), d.h. die gleiche wie bei der elastischen Spannung (Druck- bzw. Scherspannung).

Der Druck  $p$  ist dann proportional zur Zahl  $N_{\text{Stoß}}$  der Stöße der Molekeln auf den Stempel:

$$p \sim N_{\text{Stoß}}$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Teilchenzahl  $N$  konstant bleibt. Halbiert man nun das Volumen  $V$ , d.h. man bewegt den Stempel hinein, so verdoppelt sich die Stoßzahl, d.h. die Zeit zwischen den Stößen halbiert sich.  $N_{\text{Stoß}}$  verdoppelt sich also, wenn  $V \rightarrow \frac{V}{2}$  oder  $p \rightarrow 2p$ . Daraus folgert man für konstante Temperatur  $T$  das

#### Gesetz von Boyle-Mariotte

$$p \cdot V = \text{konst.} = c(T) \quad (6.3)$$

### 6.2.3 Gasdruck auf eine Gefäßwand

Der Gasdruck  $p$  entsteht durch die elastische Reflexion der Gasatome an der Gefäßwand. Dabei haben wir gelernt, daß die Normalkomponente des Impulses  $\vec{p}$ , also  $p_n$ , ihre Richtung umkehrt. Der übertragene Impuls beträgt also

$$|\Delta\vec{p}_n| = 2|\vec{p}_n| = 2v_n \cdot m$$

Die Impulsänderung per Zeit ist gleich der ausgeübten Kraft  $F_n$ :

$$\frac{|\Delta\vec{p}_n|}{\Delta t} = F_n$$

Die folgenden Voraussetzungen werden nun gemacht:

- Wir betrachten ein würfelförmiges Gefäß der Kantenlänge  $a$ .
- Es seien  $N$  Atome im Behälter.
- Im Zeitmittel fliegen je  $\frac{N}{3}$  Atome zwischen zwei gegenüberliegenden Wänden hin und her.
- Wir nehmen vereinfachend an, daß die  $\frac{N}{3}$  Atome nur in Richtung der Wände fliegen (mit Geschwindigkeiten  $v_i$ ).

Wir fragen zunächst, wie oft ein Atom (i) auf eine Wand trifft. Die Flugzeit  $\Delta t$  zwischen zwei Stößen auf dieselbe Wand ist für dieses Atom

$$\Delta t = 2 \frac{a}{v_i} \quad (6.4)$$

Es erfolgt ein Stoß pro Intervall  $\Delta t$ . Dann ist  $\frac{1}{\Delta t}$  die Zahl der Stöße eines Atoms pro Zeiteinheit. Es stellt sich nun die Frage, wie groß der in einem Stoß abgegebene Impuls  $\Delta p_i$  ist. Wir wissen aber vom elastischen Wandstoß, daß gilt:

$$\Delta p_i = 2m\vec{v}_i \quad (6.5)$$

Die per Stoßprozeß auf die Wand ausgeübte Kraft  $F_i$  ist gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$F_i = \frac{|\Delta\vec{p}_i|}{\Delta t}$$

Setzt man nun die Ergebnisse aus den Gleichungen 6.5 und 6.4 ein, so ergibt sich

$$F_i = 2mv_i \cdot \frac{v_i}{2a} = \frac{mv_i^2}{a}$$

Für die gesamte Normalkraft  $F_s$  aller  $N/3$  Atome auf die Wand gilt damit:

$$F_s = \sum_{i=1}^{N/3} F_i = \frac{1}{3} \frac{m}{a} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

**Definition 6.6:** Mittleres Geschwindigkeitsquadrat  
Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat  $\bar{v}^2$  ist definiert als

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \quad (6.6)$$

Damit resultiert für die Normalkraft auf die Wand die Gleichung

$$F_s = \frac{N}{3} \frac{m}{a} \bar{v}^2.$$

Der Druck  $p$  auf die Wand ergibt sich somit zu

$$p = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{a^2} = \frac{N}{3} \frac{m}{a^3} \bar{v}^2$$

Dabei ist  $a^3$  das Volumen  $V$  des Würfels. Im allgemeinen Fall gilt daher

$$p = \frac{N}{3} \frac{m}{V} \bar{v}^2 \quad (6.7)$$

Setzt man dieses Ergebnis in das Gesetz von Boyle-Mariotte (s.Gleichung 6.3) ein, so ist für konstante Temperatur  $T$ :

$$p \cdot V = \frac{N}{3} m \bar{v}^2 = \text{konst.} \quad (6.8)$$

Die Form des Gefäßes tritt in der Endformel nicht auf. Sie gilt also offenbar nicht nur für Würfel, sondern auch im allgemeinen Fall. Wir schreiben die Gleichung nun etwas um.

$$pV = \frac{2}{3} N \left( \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) \quad (6.9)$$

**Definition 6.10:** Mittlere Bewegungsenergie

Der Ausdruck  $W_{therm}$  ist die mittlere Bewegungsenergie (Thermische Energie) eines einzelnen Gasatoms bei der Temperatur  $T$ :

$$W_{therm}(T) = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \quad (6.10)$$

Bei Anwendung der Definition 6.10 auf die Gleichung 6.9 ergibt sich

$$pV = \frac{2}{3} W_{therm}(T) \quad (6.11)$$

## 6.3 Temperatur

### 6.3.1 Definition der Temperatur

Der Mensch hat einen zwar einen Temperatursinn, allerdings reagiert er vor allem auf Temperaturänderungen. Dies hat sich im Laufe der Evolution deshalb so entwickelt, weil Temperaturänderungen Gefahren signalisieren können. Wir wollen die Temperatur vorläufig definieren als den Zustand eines Körpers, den wir mit unserem Temperatursinn als wärmer bzw. kälter empfinden. Viele physikalische Größen hängen von der Temperatur ab:

- Thermische Ausdehnung von Körpern (Festkörper bzw. Flüssigkeit)
- Druck eines Gases
- Elektrischer Widerstand von Leitern
- Strahlungsspektrum von glühenden Körpern:  
Ein Ofen glüht höchstens, während von der Sonne sichtbares und auch UV-Licht ausgeht.
- Spannung eines Thermoelementes

Für den Alltag hat es sich bewährt, die physikalische Größe Temperatur über die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten festzulegen. Erwärmt man eine Flüssigkeit, so dehnt sie sich i.a. aus (Bsp.: Fieberthermometer). Es gilt dann in guter Näherung

$$V(\theta) = V_0(1 + \gamma\theta) \quad (6.12)$$

mit  $V_0 = V(\theta = 0^\circ C)$ ,  $\theta$  der Temperatur in Grad Celsius und  $\gamma$  dem Volumenausdehnungskoeffizienten der betreffenden Flüssigkeit. Es ist z.B.  $\gamma_{Hg} = 0,182 \cdot 10^3 (^\circ C)^{-1}$ . Der Temperatursinn kann getäuscht werden, wenn man z.B. die linke und die rechte Hand in verschiedenen warme Behälter steckt. Man kann lediglich sagen, welcher Behälter wärmer bzw. kälter ist. Der Temperatursinn ist folglich nicht geeignet, die physikalische Größe Temperatur zu definieren.

### 6.3.2 Temperatur-Messung

#### Flüssigkeitsthermometer:

Das Meßverfahren für die Temperatur besteht in der Bestimmung der Ausdehnung, die beim Erwärmen erfolgt. Dieses Meßverfahren muß noch durch eine Maßeinheit ergänzt werden. Dazu werden zwei Fixpunkte festgelegt:

- Die Temperatur, bei der Eis schmilzt, definiert  $0^\circ C$ .
- Die Temperatur, bei der Wasser siedet, definiert  $100^\circ C$ .

Beide Messungen werden bei Normaldruck  $p = 1013,5$  hPa durchgeführt. Dieses sind die Fixpunkte der Celsius-Skala. Ein Hundertstel des Abstandes der Fixpunkte entspricht  $1^\circ C$ . Ein Problem ist, daß die Anzeige etwas von der Thermometersubstanz abhängt.

#### Bi-Metall-Thermometer:

Zwei Metalle unterschiedlicher Längenausdehnung werden verschweißt bzw. zusammengewalzt. Bei  $\Delta T$  verbiegt sich der Bimetall-Streifen. Eigenschaften dieses Verfahren sind:

- Geringe Genauigkeit
- Einsatz als elektrischer Kontakt möglich (Heizungsregelung, Bügeleisen u.ä.)

#### Thermoelement:

Hier werden zwei verschiedene Metalle verlötet. An der Lötstelle entsteht eine Kontaktspannung, die von der Temperatur abhängt. Verlötet man die beiden anderen Enden ebenfalls, so heben sich diese Spannungen auf, solange beide Lötstellen auf gleicher Temperatur bleiben. Ist dies nicht der Fall, so liegt eine Thermospannung an. Auch hier treten charakteristische Eigenschaften des Meßverfahrens zu Tage:

- Mögliche Verwendung als Fernthermometer
- Schnelle Anzeige

**Widerstandsthermometer:**

Der elektrische Widerstand (s.Strömungswiderstand bei Flüssigkeiten) hängt von  $T$  ab. Er steigt bei Metallen mit zunehmendem  $T$  an. Gebräuchlich sind Widerstandsthermometer aus Platin, die ihren Meßbereich von  $-123^{\circ}C$  bis  $+630^{\circ}C$  haben. Bei tiefen Temperaturen werden auch Kohle-Widerstandsthermometer eingesetzt.

**Strahlungsthermometer:** Bei hohen Temperaturen glühen feste Stoffe. Ein Teil der abgestrahlten Energie wird in Form von Licht abgegeben. Die gesamte abgegebene Strahlungsenergie hängt von  $T$  ab. Es gilt das

**Stefan-Boltzmann-Gesetz**

$$W \sim (T_1^4 - T_0^4) \quad (6.13)$$

Dabei ist  $T_1$  die Temperatur des glühenden Körpers,  $T_0$  die Temperatur der Umgebung. Man vergleicht nun die Strahlung im sichtbaren Bereich, die vom Körper unbekannter Temperatur ausgeht, mit jener einer kalibrierten Strahlungsquelle (Pyrometer).

### 6.3.3 Gasgesetze

Wir betrachten nun die grundlegenden Zustandsänderungen von idealen Gasen.

**Isobare Erwärmung:**

Hier ist  $p = \text{konst.}$  Wir untersuchen, wie sich  $V$  als Funktion von  $\theta$  ändert. Wir beginnen bei  $\theta = 0^{\circ}C$  mit dem Volumen  $V_0$ . Dann finden wir experimentell (s.Gleichung 6.12):

$$V(\theta) = V_0(1 + \beta\theta)$$

mit  $\beta = \frac{1}{273,15} \text{grad}^{-1}$  dem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten.

**Isochore Erwärmung:**

In diesem Fall ist  $V$  konst. Wir untersuchen, wie sich  $p$  als Funktion von  $\theta$  ändert und finden

$$p(\theta) = p_0(1 + \beta'\theta),$$

wobei  $p_0 = p(\theta = 0^{\circ}C)$  ist. Für ideale Gase gilt exakt:

$$\beta = \beta'$$

**Einführung der Kelvin-Skala:**

Nehmen wir an, daß der obige Zusammenhang bis  $p = 0$  gilt. Die lineare Extrapolation von  $p(\theta)$  gegen  $p = 0$  liefert die Aussage, daß dies bei

$$\theta_{p=0} = -273,15^{\circ}C$$

eintritt. Man setzt nun

$$T = (\theta + 273,15)K$$



Dies entspricht einer Verschiebung des Nullpunktes unserer bisherigen Temperaturskala:  $T$  wird dort  $T = 0K$ , wo der Gasdruck  $p = 0$  wird.

**Definition 6.14:** Kelvin-Skala

Die um 273,15 Grad verschobene Temperaturskala heißt Kelvin-Skala. Die Temperatureinheit heißt 1 Kelvin. Dabei ist

$$\Delta T \equiv \Delta \theta \quad (6.14)$$

Eine Temperaturdifferenz von  $1K$  entspricht also exakt der Differenz von  $1^\circ C$  auf der Celsius-Skala. Das Kelvin ist eine Basisgröße im SI-System. Damit wird der Zusammenhang

$$p(\theta) = p_0(1 + \beta\theta)$$

modifiziert zu

$$p(T) = p_0(1 + \beta(T - 273,15)) = p_0\left(1 + \frac{T}{273,15} - 1\right)$$

Dadurch ergibt sich für den von der Kelvin-Temperatur abhängigen Druck bzw. das Volumen

$$p(T) = \frac{p_0 T}{273,15} \quad (6.15)$$

$$V(T) = \frac{V_0 T}{273,15} \quad (6.16)$$

Beide Beziehungen lassen sich zu einer Beziehung zusammenfassen:

$$pV = C \cdot T \quad (6.17)$$

Wir suchen nun nach dem Zusammenhang zwischen der Kelvin-Temperatur und der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls. Wir erhielten bisher

$$p(T)V(T) \sim T$$

und fanden mit Hilfe der kinetischen Gastheorie (s. Gleichung 6.10) auch

$$pV = \frac{2}{3} N W_{therm}$$

Fast man beide Gleichungen zusammen, so erhält man

$$pV = kNT, \quad (6.18)$$

wobei wir eine neue Konstante  $k$  einführen, um aus obiger Beziehung eine Gleichung zu machen.

**Definition 6.19:** Boltzmann-Konstante

Die Konstante  $k$  heißt Boltzmann-Konstante.

Mit der Gleichung 6.18 und der Definition 6.10 ergibt sich für die

**Mittlere thermische Bewegungsenergie**

$$W_{therm} = \frac{3}{2} kT \quad (6.20)$$

In Worten ausgedrückt heißt dies, daß  $W_{therm}$  proportional zur Temperatur  $T$  ist.  $T$  ist das Maß für die kinetische Energie der Gasmoleküle. Der Zahlenwert der Boltzmann-Konstante ist

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Für ein Mol eines idealen Gases lautet der Zusammenhang zwischen  $p, V$  und  $T$ :

$$pV_{mol} = kN_a T$$

mit  $N_a$  der Avogadro-Konstante. Man kürzt nun noch ab:

$$k \cdot N_a = R$$

**Definition 6.21:** Allgemeine Gaskonstante

$R$  heißt allgemeine Gaskonstante und hat den Wert

$$R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Damit lautet die Zustandsgleichung für 1 Mol eines idealen Gases

$$pV_{mol} = RT$$

Hat man mehr als ein Mol des Gases, so muß man auf der rechten Seite mit der Stoffmenge  $\nu$  (in Mol) multiplizieren. Es ergibt sich dann die

### Allgemeine Zustandsgleichung

$$pV = \nu RT \tag{6.22}$$

## 6.4 Kinetische Gastheorie II

### 6.4.1 Freiheitsgrade

Im Mittel kommt die Molekülbewegung in jeder der drei Koordinatenrichtungen gleich häufig vor.

**Definition 6.23:** Freiheitsgrad

Man sagt, ein Gasmolekül hat drei Freiheitsgrade der Translation.

Auf jeden Freiheitsgrad entfallen daher im Mittel  $\frac{1}{3}$  der Translationsenergie, d.h.  $\frac{1}{2}kT$  pro Freiheitsgrad.

Wenn ein zwei- oder mehratomiges Molekül rotiert, so entfällt auf jede Rotationsmöglichkeit ebenfalls im Mittel die Rotationsenergie  $\frac{1}{2}kT$ . Im Detail hat ein zweiatomiges Molekül zwei Freiheitsgrade der Rotation. Diese sind Rotationen um die beiden Achsen, die senkrecht auf der Kernverbindungsachse stehen. Eine Rotation um die Kernverbindungsachse kann nicht entstehen, solange wir die Atome als Massenpunkte auffassen. Auch sonst ist die erforderliche Energie für eine Anregung der Rotation um diese Achse sehr hoch.

Zu den Rotations- und Translationsfreiheitsgraden können bei hinreichend hohen Temperaturen noch die Freiheitsgrade der Schwingung kommen. Eine zweiatomige Molekel hat zwei Freiheitsgrade der Schwingung. Auf die potentielle Energie ("der gespannten Feder") und die kinetische Energie entfallen jeweils  $\frac{1}{2}kT$ .

### 6.4.2 Innere Energie, Wärme und Wärmekapazität

Wir betrachten zunächst ein ideales einatomiges Gas. Die thermische Energie des Gases liegt als kinetische Energie vor. Auf jeden der drei Freiheitsgrade entfällt im Mittel  $\frac{1}{2}kT$ .

**Definition 6.24:** Innere Energie

Die innere Energie  $U$  im Sinne der gesamten im Gas gespeicherten Energie eines Mols idealen Gases beträgt

$$U = N_A \frac{3}{2} kT \quad (6.24)$$

Die innere Energie ist unabhängig vom Gasvolumen. Um die Änderung der inneren Energie zu untersuchen, führen wir jetzt Energie zu - und zwar in Form von Wärme. Dabei sei  $dQ$  die zugeführte Wärmemenge. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Konstantes Volumen  $V$ :

$dQ$  vergrößert die mittlere kinetische Energie aufgrund des Energiesatzes um

$$dW_{therm} = dQ = dU$$

Um die Temperatur um  $dT$  zu erhöhen, ist für 1 Mol offenbar die folgende Wärmemenge nötig:

$$dQ = N_A \cdot \frac{3}{2} k dT \quad (6.25)$$

**Definition 6.26:** Molare Wärmekapazität

Der Zusammenhang zwischen  $dQ$  und  $dT$  wird durch die molare Wärmekapazität  $C_V$  beschrieben:

$$dQ = C_V dT \quad (6.26)$$

Für den Spezialfall des idealen Gases gilt dabei:

$$C_V = \frac{3}{2} k N_A = \frac{3}{2} R \quad (6.27)$$

2. Konstanter Druck  $p$ :

Eine Temperaturerhöhung um  $dT$  durch Zuführung von  $dQ$  führt nicht nur zur Erhöhung der inneren Energie, sondern auch zu einer Ausdehnung, wobei Arbeit  $dW$  gegen den Druck  $p$  verrichtet wird. Hier gilt der

#### 1.Hauptsatz der Wärmelehre

$$dQ = dU + dW \quad (6.28)$$

Auch hier gilt, daß  $dQ \sim dT$  ist. Somit erhält man

$$dQ = C_p \cdot dT,$$

wobei offenbar  $C_p > C_V$  sein muß, weil ein Teil der Wärme zum Verrichten von Arbeit benötigt wird.

Wir wollen nun die erhaltenen Begriffe erweitern. Der berechnete Wert für  $C_V$  gilt nur für Teilchen ohne innere Freiheitsgrade. Ein zweiatomiges Gas (z.B.  $O_2, H_2$ ) hat aber zusätzlich zu den drei Freiheitsgraden der Translation zwei Freiheitsgrade der Rotation und zwei Freiheitsgrade der Schwingung. Mit  $dQ = dU$  und der Gleichung 6.29

$$dU = \underbrace{\frac{3}{2}N_A k dT}_{\text{Trans.}} + \underbrace{\frac{2}{2}N_A k dT}_{\text{Rot.}} + \underbrace{\frac{2}{2}N_A k dT}_{\text{Vibr.}} \quad (6.29)$$

folgt für die molare Wärmekapazität des zweiatomigen Moleküls

$$C_V = \frac{7}{2}kN_A = \frac{7}{2}R$$

Ein dreiatomiges Gas hat dabei sogar drei Rotationsmöglichkeiten und damit eine entsprechend höhere Zahl an Freiheitsgraden.

#### $C_V$ bei Festkörpern:

Bei Festkörpern ist die Energie in den Vibrationen gespeichert. Jedes Atom kann in drei Raumrichtungen schwingen. Jede Schwingung hat zwei Freiheitsgrade. Im Mittel entfällt je  $\frac{1}{2}kT$  pro Molekül auf die kinetische und die potentielle Energie der Schwingung. Daher beträgt die gesamte innere Energie  $U$  für 1 Mol

$$U = N_A k \left( \underbrace{\frac{3}{2}kT}_{\text{kin.}} + \underbrace{\frac{3}{2}kT}_{\text{kin.}} \right) = 3kN_A T$$

Die Änderung  $dU$  bei einer Änderung von  $T$  um  $dT$  lautet also

$$dU = 3kN_A \cdot T$$

und somit gilt für die molare Wärmekapazität  $C_V$  bei Festkörpern

$$C_V = 3kN_A = 3R$$

Es ist anzumerken, daß die oben berechneten Werte für  $C_V$  bzw.  $C_p$  nur bei hinreichend hohen Temperaturen gelten, da bei tiefen Temperaturen die Energie nicht ausreicht, um die inneren Freiheitsgrade anzuregen. Diese sind dann "eingefroren".

### 6.4.3 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung und Boltzmann-Faktor

Die Moleküle ändern durch Energie- und Impulsaustausch dauernd ihre Geschwindigkeiten (sowohl im Betrag als auch in der Richtung). Es ist daher nicht sinnvoll, sich für die Geschwindigkeit eines bestimmten Moleküls zu interessieren. Sinnvoll ist dagegen die Angabe, wieviele Moleküle Geschwindigkeitsbeträge zwischen  $v$  und  $v + dv$  besitzen. Wegen der großen Zahl an Molekülen hängt die Häufigkeitsverteilung der vorkommenden Geschwindigkeiten nicht von der Zeit ab. Anschaulich hat ein Molekül zu einer späteren Zeit nicht mehr eine Geschwindigkeit in  $dv$ , aber andere Moleküle sind mit ihrer Geschwindigkeit in das Intervall  $dv$  hineingewandert. Wir tragen nun  $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv}$  gegen  $v$  auf. Durch die Division durch  $N$  wird die Verteilung unabhängig von der Zahl der betrachteten Moleküle. Experimentell findet man die

**Maxwell-Verteilung**

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv} \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2. \quad (6.30)$$

Es kommt auf die relative Größe von  $W = \frac{1}{2}mv^2$  zur thermischen Energie, die proportional zu  $kT$  ist, an. Kinetische Energien, die sich stark von  $kT$  unterscheiden, kommen sehr selten vor. Das Maximum liegt bei  $v_{max}$ . Für Wasserstoff ( $H_2$ ) beträgt  $v_{max}$  bei  $20^\circ C$  etwa 400 m/s, d.h. ungefähr Schallgeschwindigkeit. Die Maxwell-Verteilung ist unsymmetrisch. Geschwindigkeiten  $v > v_{max}$  kommen häufiger vor.

**Fizeau-Selektor:**

Es stellt sich nun die prinzipielle Frage, wie man  $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv}$  messen kann. Eine mögliche Methode ist, einen Ofen mit einer Substanz aufzuheizen. Die Atome treten dann mit einer Verteilung aus, deren Form durch die Ofentemperatur gegeben ist. Man blendet einen Strahl aus, der einen Geschwindigkeitsselektor durchläuft. Der Strahl durchläuft zwei geschlitzte Scheiben auf einer Achse, die sich mit  $\omega$  dreht. Es gelangen nur Atome hindurch, die die Strecke zwischen den beiden Schlitzen so zurücklegen, daß jeweils ein Schlitz vorgefunden wird. Einerseits ist

$$\Delta t = \frac{l}{v}$$

und andererseits ist

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\omega}$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkelabstand der Schlitze und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit. Somit ergibt sich für die Durchlaßgeschwindigkeit

$$\Rightarrow v = \frac{l\omega}{\alpha}$$

Durch die Änderung von  $\omega$  wird das durchgelassene  $v$  verändert. Man erhält  $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv}$  also durch sukzessives Ändern von  $\omega$ .

Die Wahrscheinlichkeit, in einem durch die Temperatur  $T$  charakterisierten Ensemble von Teilchen eines mit einer Energie  $W$  im Intervall  $dW$  um  $W$  vorzufinden, ist

$$w \sim \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) \cdot dW$$

Wir wollen nun die Begriffe der mittleren, der wahrscheinlichsten und der mittlere quadratische Geschwindigkeit der Gasmoleküle einführen. Die Verteilungsfunktion  $f(v) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN(v)}{dv}$  lautet

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Das Maximum der Verteilung liegt bei  $v_{max}$ . Sie ist die wahrscheinlichste, d.h. am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit. Sie wird bestimmt aus der Bedingung, daß  $f(v)$  ein Extremum haben soll:

$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v=v_{max}} = 0$$

Es ergibt sich daraus

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist jene, für die Moleküle mit kleinerer Geschwindigkeit und Moleküle mit größerer Geschwindigkeit als  $\bar{v}$  in gleicher Anzahl vorhanden sind:

$$\bar{v} = \int_{v=0}^{\infty} f(v) \cdot v \, dv = 1,13v_{max}$$

Für die mittlere quadratische Geschwindigkeit  $(\overline{v^2})^{frac{1}{2}}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m (\overline{v^2})^{frac{1}{2}} &= \frac{3}{2}kT \\ (\overline{v^2})^{frac{1}{2}} &= \left(\frac{3kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,23v_{max} \end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$(\overline{v^2})^{frac{1}{2}} = \int_{v=0}^{\infty} f(v) \cdot v^2 \, dv$$

**Definition 6.31:** Boltzmann-Faktor

Für den Fall, daß  $W$  als thermische Energie  $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$  vorliegt, nimmt der Boltzmann-Faktor folgende Form an:

$$\exp\left(-\frac{W_{kin}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (6.31)$$

#### 6.4.4 Reale Gase und Gesetz von Joule-Thomson

Die Zustandsgleichung für das ideale Gas lautet (s. Gleichung 6.22):

$$pV = \nu RT = N_A kT$$

Es ist offenbar keine Verflüssigung eines idealen Gases möglich, denn bei Flüssigkeiten spielen Wechselwirkungen eine wichtige Rolle. Bisher wurden als Idealisierungen gemacht:

- Vernachlässigung des Eigenvolumens der Moleküle, d.h. das Molekül wurde als Massenpunkt betrachtet.
- Keine Wechselwirkungen zwischen den Molekülen

**Definition 6.32:** Reales Gas

Ein Gas, das nicht durch die Zustandsgleichung beschrieben wird, heißt reales Gas

Solche Abweichungen sind besonders groß unter Bedingungen, bei denen das Gas in eine Flüssigkeit übergeht.

**Definition 6.33:** Dampf

Dämpfe sind Gase, die unter Normalbedingungen flüssig (fest) sind.

**Modell des realen Gases:**

Wir gehen vom idealen Gas aus und berücksichtigen die bisherigen Idealisierungen. Wir betrachten ein Mol eines Gases.

- Der Raum, der für die Molekülbewegung zur Verfügung steht, ist kleiner als  $V$  wegen des Eigenvolumens der Moleküle. Daher setzt man

$$V \rightarrow (V - b)$$

Dabei ist  $b$  ungefähr das Vierfache des Eigenvolumens aller Moleküle (Kovolumen).

- Die Kräfte zwischen den Molekülen liefern eine Anziehung. Sie haben deshalb dieselbe Wirkung wie ein erhöhter Außendruck, da die thermische Bewegung behindert wird. Es muß zusätzliche Arbeit gegen die zwischenmolekularen Kräfte verrichtet werden, um das Volumen zu vergrößern. Im Inneren heben sich die Kräfte der umgebenden Moleküle auf das betrachtete Teilchen auf, aber an der Wand (Grenzfläche) bleibt eine resultierende Kraft übrig, die die Moleküle nach innen zieht. Sie ist proportional zur Teilchendichte  $n$  der anziehenden Moleküle.  $n$  ist um so größer, je kleiner das Volumen  $V$ , in dem sie sich befinden, ist:

$$\Rightarrow n \sim \frac{1}{V}$$

Die Kraft ist ebenfalls proportional zur Zahl der auf die Wand stoßenden Teilchen selbst, d.h. nochmal zur Teilchenzahldichte. Die Korrektur am Druck  $p$  (der "Binnendruck") ist also insgesamt  $\frac{a}{V^2}$  mit  $a$  einer Proportionalitätskonstanten. Also setzt man

$$p \rightarrow \left( p + \frac{a}{V^2} \right)$$

Aus beiden Korrekturen ergibt sich dann für 1 Mol die

**Van der Waals-Gleichung**

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad (6.34)$$

Die "Konstanten"  $a$  und  $b$  haben für jedes Gas typische Werte. Für beliebige Stoffmengen gilt:

$$\left( p + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT \quad (6.35)$$

Wir wollen nun die Van der Waals-Gleichung für  $CO_2$  diskutieren. Bei hohen Temperaturen und großen Volumina, also kleinen Dichten, ist das Verhalten ähnlich dem idealer Gase. Wir betrachten das p-V-Diagramm in Abbildung 6.1. Läuft man auf der Isotherme zu  $T = 0^\circ C$  entlang, so ergibt sich:

- Wenn Kondensationskeime vorliegen, beginnt die Flüssigkeit bei  $E$  sich abzuscheiden.
- Bis  $A$  steigt  $p$  nicht mehr an, d.h. Volumenverkleinerung führt zu weiterer Verflüssigung. Der gestrichelte Bereich (ACE) zeigt den Koexistenzbereich von Gas und Flüssigkeit.

Es stellt sich die Frage, wie man den Sättigungsdruck (gestrichelte Kurve ACE), bei dem sich das Gas verflüssigt, erhält. Die Gerade ACE ist so zu legen, daß die Flächen (ABC) und

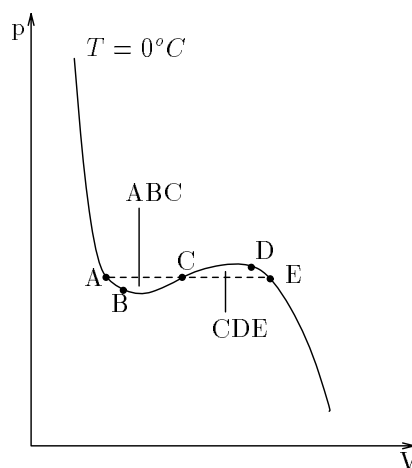


Abbildung 6.1: p-V-Diagramm

(CDE) gleich sind. Bei A ist das gesamte Gas verflüssigt. Zu weiterer Volumenverkleinerung muß ein sehr großer Druck aufgewandt werden. Kurze Stücke der Kurve (ED) und (AB) können durchlaufen werden, wenn Kondensationskeime fehlen bzw. Siedeverzüge auftreten. Die Verflüssigung von Gasen allein durch Kompression ist dann möglich, wenn die Isotherme mindestens eine waagerechte Tangente hat. Folglich gibt es eine kritische Temperatur  $T_K$  und einen kritischen Druck  $p_K$ . Aus der Zustandsgleichung erhält man

$$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2} \text{ und } T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR} \quad (6.36)$$

**Definition 6.37:** Kritischer Punkt

Der kritische Punkt (KP) ist erreicht, wenn die Isotherme erstmals eine waagerechte Tangente aufweist (kritische Temperatur  $T_K$ ).

Bei  $CO_2$  ist  $T_K = 304,2K = 31,4^\circ C$ . Dazu gehören ein kritischer Druck  $p_K$  und ein kritisches Volumen. Für  $He, H_2$  u.a. genügt es nicht nur zu komprimieren, sondern es muß erst unter  $T = T_K$  abgekühlt werden.

Gas	$T_K [K]$	$p_K [10^6 Pa]$
$CO_2$	304,2	7,16
$H_2O$	647,2	21,35
$Ar$	151,0	4,7
$He$	5,3	0,22
$H_2$	33,3	1,25

**Joule-Thomson-Effekt:**

Es sei angemerkt, wenn  $T_K$  größer als die Zimmertemperatur ist, so muß das Gas erst unter Zimmertemperatur abgekühlt werden, bevor Verflüssigung durch Kompression möglich ist. Dazu verwendet man den Joule-Thomson-Effekt. Ein Gasvolumen steht unter dem Druck  $p_1$ . Es werde durch eine Drossel in den Raum  $V_2$  unter dem Druck  $p_2$  entspannt. Wenn ein ideales Gas vorliegen würde, so müßte keine Arbeit gegen Kohäsionskräfte (sind ja nicht vorhanden) verrichtet werden. Die innere Energie  $U$  würde konstant bleiben, denn die links verrichtete



Arbeit würde rechts wieder abgegeben. Eine Temperaturänderung würde nicht stattfinden. Betrachtet man nun ein reales Gas, so findet dort im allgemeinen eine Temperaturabnahme statt. Dieser Effekt rührt von den Abweichungen vom idealen Gas her, d.h. vom Auftreten der Konstanten  $a$  und  $b$ . Anschaulich bedeutet dies, wenn  $a$  berücksichtigt werden muß, so spielt die Arbeit gegen die Kohäsionskräfte eine Rolle, wenn  $V_2 > V_1$  wird. Der Abstand der Moleküle muß gegen die Kohäsionskräfte vergrößert werden. Diese Arbeit muß der inneren Energie des Gases entnommen werden. Folglich kühlt sich das Gas ab.

#### Sauerstoff-Verflüssigung:

Komprimierter Sauerstoff (200 bar) wird über eine Drossel auf 20 bar entspannt. Der Joule-Thomson-Effekt liefert eine Abkühlung von 0,25 K/bar, d.h. insgesamt um  $\Delta T \approx 45 K$ . Das abgekühlte Sauerstoffgas wird nun im Gegenstromverfahren am komprimierten Gas, das sich noch vor der Drossel befindet, vorbeigeführt, um dieses bereits vorzukühlen. Dadurch wird dann nach einiger Zeit eine Verflüssigung erreicht (Linde-Verfahren).

## 6.5 Zustandsänderungen idealer Gase

### 6.5.1 Einführung

Wir betrachten einige Zustandsänderungen idealer Gase, die im Abschnitt über Kreisprozesse wichtig werden. Der Zustand eines idealen Gases ist eindeutig durch die drei Zustandsgrößen  $p, V$  und  $T$  bestimmt. Von diesen sind nur zwei unabhängig wählbar, die dritte ergibt sich aus  $pV = \nu RT$ . Unser Augenmerk liegt nun darauf, ob und wieviel mechanische Arbeit das Gas bei den Zustandsänderungen verrichten kann.

### 6.5.2 Volumenarbeit

Die von einer Gasmenge (z.B. in einem Kolben eingeschlossen) verrichtete Arbeit setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Moleküle zusammen. Auf einen beweglichen Kolben der Fläche  $A$  üben sie durch Impulsübertrag Kräfte aus: Die mittlere Normalkraft ist  $F = pA$ . Wir nehmen an, daß der Kolben der Kraft nachgeben kann. Dann berechnen wir die Arbeit, die bei der Kolbenbewegung um  $dx$  verrichtet wird:

$$-dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F \cdot dx,$$

wobei  $dx$  die Strecke ist, um die der Kolben bewegt wird.

#### Definition 6.38: Vorzeichenkonvention

Eine nach außen abgegebene Arbeit, hier  $dW$ , wird negativ gerechnet.

Mit  $F = pA$  ergibt sich für die Arbeit

$$-dW = pA dx = p dV$$

Erfolgt die Bewegung des Kolbens von  $V_1$  nach  $V_2$ , so wird die Arbeit

$$-W(1 \rightarrow 2) = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

verrichtet. Sie entspricht der Fläche unter der  $p(V)$ -Kurve im "Arbeitsdiagramm". Wir berechnen jetzt die abgegebene Arbeit für verschiedene Prozeßführungen.

1. **Volumenarbeit bei isobarer Expansion:**

Wegen  $p = \text{konst.}$  während  $V_1 \rightarrow V_2$  übergeht, wird

$$-W(1 \rightarrow 2) = p(V_2 - V_1) = p\Delta V \quad (6.39)$$

2. **Volumenarbeit bei isothermer Expansion:**

Bei  $T = \text{konst.}$  ändert sich bei  $V_1 \rightarrow V_2$  auch  $p$ . Dies wird durch die Zustandsgleichung (s. Gleichung 6.22) geregelt.

$$\begin{aligned} -W(1 \rightarrow 2) &= \int_{V_1}^{V_2} p \, dV \\ &= \int_{V_1}^{V_2} p(V) \, dV \\ &= RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \, dV \\ \Rightarrow -W(1 \rightarrow 2) &= RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

3. **Isochore Zustandsänderung  $\Delta V = 0$ :**

Es wird bei konstantem Volumen ( $\Delta V = 0$ ) keine mechanische Arbeit verrichtet. Jede Zufuhr/Abfuhr von Energie (in Form von Wärme  $dQ$ ) führt zu einer entsprechenden Änderung der inneren Energie  $\Delta U$ :

$$dQ = dU = C_V(T_2 - T_1) = C_V \, dT \quad (6.41)$$

4. **Volumenarbeit bei einer adiabatischen Expansion:**

**Definition 6.42:** Adiabatische Prozesse

*Adiabatische Prozesse sind solche, bei denen keine Energie, also auch keine Wärme, mit der Umgebung ausgetauscht wird ( $\Delta Q = 0$ ).*

Die verrichtete Arbeit  $W(1 \rightarrow 2)$  muß aus der inneren Energie  $U$  des Gases herrühren:

$$-W(1 \rightarrow 2) = -\Delta U = (U_1 - U_2) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_2) \quad (6.43)$$

Dies gilt für ein einatomiges Gas (1 Mol) mit drei Freiheitsgraden.

### 6.5.3 Kreisprozesse

Es geht nun um die Umwandlung thermischer Energie in mechanische Energie. Wir wissen, daß jede Energieform in jede andere umgewandelt werden kann. Beispielsweise kann chemische Energie sowohl in mechanische als auch elektrische Energie oder Licht überführt werden. Mechanische Energie kann (vollständig) in Wärme umgewandelt werden. Wärme kann ebenso in mechanische Energie umgeformt werden. Wir lernen in diesem Abschnitt folgende Tatsache: Wärme kann nicht vollständig in mechanische Energie umgewandelt werden, so daß periodisch Wärme aus einem Temperaturbad entnommen und anschließend nur in mechanische Energie umgesetzt wird.

**Heißluftmotor:**

Das Arbeitsgas wird periodisch zwischen zwei Bereichen unterschiedlicher Temperatur hin-

und hergeschoben. Dabei wird offenbar Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt. Folglich läßt sich "im Prinzip" periodisch Wärme in mechanische Arbeit umwandeln. Es stellt sich bloß die Frage, wieviel Wärme muß aufgewandt/eingesetzt werden, um die mechanische Arbeit zu erzielen.

#### Diskussion des p-V-Diagrammes unserer Wärmekraft-Maschine:

Das p-V-Diagramm findet sich im Buch von Niedrig. In diesem Diagramm entspricht der periodisch arbeitenden Maschine offenbar ein Kreisprozeß. Die von der geschlossenen Kurve eingeschlossene Fläche ist die nach außen abgegebene Volumenarbeit, die während des Kreisprozesses auftritt. Auf dem "Hinweg" (1) wird zwar vom Gas eine größere Arbeit verrichtet (Fläche zwischen (1) und der V-Achse), aber auf dem "Rückweg" (2) muß am Gas Arbeit verrichtet werden, um das Gas zu komprimieren. Die Netto-Arbeit ist die schraffierte Fläche  $\Delta W$ . Im gezeigten Fall verläuft der Prozeß zwischen den beiden Temperaturen  $T_1$  (hoch) und  $T_2$  (tief). Die Fläche unter (2) würde nur dann verschwinden, wenn die Rückführung zum Anfang bei  $p = 0$  (d.h. bei absolutem Temperatur-Nullpunkt  $T = 0K$ ) erfolgen würde. Dies ist aber nicht möglich. Wir stellen uns die Frage, wie groß der Wirkungsgrad  $\eta$  einer thermischen Maschine maximal werden kann.

#### Definition 6.44: Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist definiert als

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q_1} \quad (6.44)$$

Dabei ist  $Q_1$  die auf dem Hinweg (längs (1)) umgesetzte Wärmemenge (Fläche zwischen (1) und V-Achse) und  $\Delta W$  der Nettoarbeit (schraffiert). Wir stellen fest, daß gilt:

$$\eta < 1 \quad (6.45)$$

Wir gehen jetzt wie folgt vor: Wir berechnen  $\eta$  für einen speziellen Kreisprozeß, bei dem Zustandsänderungen eines idealen Gases zugrundegelegt werden. Dann ist das tatsächliche  $\eta$  jedenfalls kleiner als das berechnete. Wärmeverluste werden ebenfalls vernachlässigt.

#### Wirkungsgrad des Stirling-Kreisprozesses:

Es werden zwei isotherme und zwei isochore Zustandsänderungen im p-V-Diagramm verknüpft.

- (1  $\rightarrow$  2): Isotherme Expansion bei Temperatur  $T_1$   
Die aufgenommene Wärmemenge  $Q(1 \rightarrow 2)$  (gleich der nach außen abgegebenen Volumenarbeit!) beträgt für 1 Mol ideales Gas

$$Q(1 \rightarrow 2) = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- (2  $\rightarrow$  3): Isochore Abkühlung  
Die abgegebene Wärmemenge stammt aus der inneren Energie, da für  $V = \text{konst.}$  keine Volumenarbeit verrichtet wird. Wieder für 1 Mol gilt

$$Q(2 \rightarrow 3) = -C_V(T_1 - T_2)$$

Wir stellen uns vor, daß wir  $Q(2 \rightarrow 3)$  vollständig zwischenspeichern könnten, um  $Q(2 \rightarrow 3)$  später wieder zu verwenden.

- (3 → 4): Isotherme Kompression  
Bei ihr wird die Wärmemenge  $Q(3 \rightarrow 4)$ , die bei der Kompression (Volumenarbeit) entsteht, aufgenommen:

$$Q(3 \rightarrow 4) = RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- (4 → 1): Isochore Erwärmung  
Um diese Wärmemenge zuzuführen, können wir die zwischengespeicherte Wärmemenge  $Q(2 \rightarrow 3)$  verwenden, denn es ist  $Q(3 \rightarrow 4) = Q(2 \rightarrow 3)$ . Es war

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q(1 \rightarrow 2)}$$

Also wird mit

$$\Delta W = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ und } Q(1 \rightarrow 2) = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

der Wirkungsgrad  $\eta$  gleich

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

und somit

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{6.46}$$

Der Wirkungsgrad aus Gleichung 6.46 ist der Wirkungsgrad eines idealen Stirling-Prozesses ohne Wärmeverluste und mit idealer Zwischenspeicherung.

Moderne Kraftwerke arbeiten zwischen den Temperaturen  $\theta_1 = 550^\circ\text{C} (= 823\text{K})$  und  $\theta_2 = 37^\circ\text{C} (= 310\text{K})$ .

### Achtung !

Bevor man  $\eta$  berechnet, muß man von Celsius-Graden auf Kelvin umrechnen.

Der Wirkungsgrad für den Idealfall ergibt sich damit zu

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 62\%.$$

Tatsächlich erreichbar sind aber etwa nur  $\eta_{eff} \approx 45\%$ .

### Heißluftmotor:

Der Heißluftmotor ist so aufgebaut, daß das Arbeitsgas zwischen zwei Gebieten unterschiedlicher Temperatur ( $T_1$  bzw.  $T_2$ ) hin- und herbewegt wird. Dies bewirkt der (durchbohrte) Verdränger-Kolben. Befindet er sich in der rechten Stellung, so ist das Arbeitsgas im kalten Gebiet mit der Temperatur  $T_K$ . In der linken Stellung dagegen ist das Arbeitsgas im warmen Gebiet der Temperatur  $T_W$ . Das Prinzip ist, das Gas im Gebiet mit  $T_W$  Arbeit verrichten zu lassen. Der Arbeitskolben geht nach rechts. Im Gebiet mit  $T_K$  wird dann am Gas Arbeit verrichtet (Kompression). Die erzeugte Wärme wird an das Wärmebad  $T_K$  abgeführt.

Eine bessere Ausführung ist es, die Wärme nicht an den Wärmespeicher abzuführen, sondern die längs der Isochoren freiwerdende Innere Energie zu speichern, bis man sie längs der zweiten Isochore wieder benötigt.

**Wiederholung:**

Der Wirkungsgrad  $\eta$  war

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q(1 \rightarrow 2)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Es war

$$\Delta W = Q(1 \rightarrow 2) + Q(3 \rightarrow 4)$$

mit  $Q(3 \rightarrow 4)$  negativ. Hiermit und der Definition des Wirkungsgrades (Definition 6.44) folgt

$$\frac{Q(1 \rightarrow 2) + Q(3 \rightarrow 4)}{Q(1 \rightarrow 2)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

oder auch

$$\frac{Q(1 \rightarrow 2)}{T_1} + \frac{Q(3 \rightarrow 4)}{T_2} = 0$$

**Definition 6.47:** Reduzierte Wärmemenge

Die bei der  $i$ -ten Zustandsänderung ( $i \rightarrow h$ ) aufgenommene Wärmemenge  $\Delta Q_i$  bezogen auf die dabei herrschende Temperatur  $T_i$ , also  $\frac{\Delta Q_i}{T_i}$ , heißt reduzierte Wärmemenge.

Beim Stirlingsprozeß ist  $\frac{\Delta Q_i}{T_i}$  entweder  $\frac{Q(1 \rightarrow 2)}{T_1}$  oder  $\frac{Q(3 \rightarrow 4)}{T_2}$ . Die Summe der reduzierten Wärmemengen beim Stirling-Prozeß lautet

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

Die Zustandsänderungen ( $2 \rightarrow 3$ ) und ( $4 \rightarrow 1$ ) können einbezogen werden, weil dort jeweils  $\Delta Q_i = 0$  ist. Also darf die Summe von  $i = 1$  bis 4 laufen.

**Beliebige Kreisprozesse:**

Bisher wurde  $\eta$  für den Stirling-Kreisprozeß berechnet. Sei nun ein beliebiger Kreisprozeß gegeben. Diesen kann man durch eine Folge von Stirling-Prozessen beliebig annähern. Da für jeden Prozeß  $\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$ , also auch  $\eta_{ideal} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$ , galt, gilt dies auch für den gesamten Kreisprozeß, da sich jeweils die Beiträge  $\Delta Q_i$  benachbarter Kreisprozesse herausheben.

**Wichtiges Beispiel:** Carnot-Kreisprozeß

Häufig wird der Wirkungsgrad  $\eta$  für den Carnot-Kreisprozeß hergeleitet. Er hat allerdings keine technische Bedeutung. Er setzt sich zusammen aus zwei isothermen und zwei adiabatischen Zustandsänderungen. Wie beim Stirling-Prozeß erhält man durch direkte Rechnung wieder

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

und

$$\eta_{eff} < \eta_{ideal}$$

und wieder im Idealfall

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

### 6.5.4 Thermische Maschinen

Es stellt sich die Frage, was passiert, wenn man den Carnot-Prozeß rückwärts ablaufen läßt? Bei der niedrigeren Temperatur  $T_2$  wird eine bestimmte Wärmemenge  $\Delta Q_2$  aufgenommen. Durch Aufwand der Arbeit  $W$  wird diese Wärmemenge adiabatisch auf die höhere Temperatur  $T_1$  gebracht. Dort wird während der isothermen Änderung die Wärmemenge  $\Delta Q_1$  an die Umgebung abgegeben.

#### 1. Wärmepumpe:

Der Nutzen besteht in der Abgabe von  $\Delta Q_1$  auf dem Temperaturniveau  $T_1$ . Als Aufwand muß die Arbeit  $W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$  verrichtet werden. Es ergibt sich für die Leistungszahl:

$$\varepsilon = \frac{\text{Nutzen} \Delta Q_1}{\text{Aufwand} W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta}$$

Sie ist um den Faktor  $\eta$  kleiner als jene Energie, die zur direkten "Erzeugung" von  $\Delta Q_1$  auf Niveau  $T_1$  aufzuwenden wäre.

#### 2. Kältemaschine:

Der Nutzen besteht darin, daß dem Wärmebad der Temperatur  $T_2$  die Wärmemenge  $\Delta Q_2$  entnommen wird. Folglich kühlt es sich ab. Für den Aufwand gilt, daß  $\Delta Q_2$  auf  $T_1$  gebracht werden. Dort abgegeben wird  $\Delta Q_1$ . Also ist

$$W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

und damit die Leistungszahl

$$\varepsilon = \frac{\text{Nutzen} \Delta Q_1}{\text{Aufwand} W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Beim Kühlschrank ist zum Beispiel  $T_1=300$  K und  $T_2=263$  K. Als Leistungszahl ergibt sich dann ein Wert von etwa 7. Der Nutzen ist optimal, wenn der Temperaturunterschied so klein wie möglich ist.

Ebenso läßt sich die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes folgern, d.h. die Tatsache, daß  $T_2$  nicht erreichbar ist. Es ist

$$\frac{\text{Aufwand} W}{\text{entzogene Wärmemenge} \Delta Q} \geq \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

Bei der Annäherung an  $T_2 = 0$  rückt die für den Entzug von  $\Delta Q_2$  erforderliche Arbeit  $W$  ins Unendliche. Anschaulich bedeutet dies, daß man keinen Kreisprozeß mehr aufbauen kann, denn bei  $T \rightarrow 0$  fallen Isothermen und Adiabaten praktisch zusammen. Bei  $T = 0$  laufen sie parallel. Für den Carnot-Prozeß müßten sie sich aber bei  $T = 0$  schneiden.

#### Stirling-Prozeß als Wärmepumpe:

Der Übergang  $3 \rightarrow 2$  muß durch die Zufuhr von elektrischer (mechanischer) Energie erreicht werden. Dann wird bei der Kompression  $2 \rightarrow 1$  die Wärmemenge  $\Delta Q_1$  an das obere Wärmebad ( $T_1$ ) abgegeben. Die obere Hälfte des Motors erwärmt sich. Kommt das Gas in Kontakt mit dem kälteren Wärmebad ( $T_2$ ), so geschieht der Übergang  $1 \rightarrow 4$ . Bei der Expansion  $4 \rightarrow 3$  wird  $\Delta Q_2$  aus diesem Wärmebad ( $T_2$ ) entnommen.

#### Stirling-Prozeß als Kältemaschine:

Nur eine andere Sprechweise: Aus dem Bad ( $T_2$ ) wird  $\Delta Q_2$  entnommen,  $W$  wird an elektrischer Energie hineingesteckt, um  $\Delta Q_1$  an das Bad  $T_1$  abgeben zu können.

### 6.5.5 Richtungsablauf von Prozessen

Bisher waren alle Vorgänge reversibel. Der Begriff der “Entropie” ist wichtig im Zusammenhang mit folgenden Problemen

- Kann man reversible Rechner bauen und wird dadurch Energie “gespart”?
- Wieso laufen manche Prozesse nicht ab, obwohl sie dem Energiesatz nicht widersprechen?

Zur physikalischen Größe “Entropie” gelangt man, wenn man vom Begriff der reduzierten Wärmemenge ausgeht. Wir berechnen die Größe

$$S(1 \rightarrow 2) = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

für eine reversible Zustandsänderung, welche das System aus einem Zustand (1) nach (2) überführt.

**Definition 6.48:** Entropie

Die Größe  $S(i)$  heißt Entropie des Zustandes (i) bzgl. des Zustandes (0):

$$S(i) = \int_0^i \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (6.48)$$

Die SI-Einheit von  $S$  ist  $1 \frac{J}{K}$ .

**Reversible/Irreversible Prozesse:**

Wir teilen zunächst die physikalischen Vorgänge in reversible (umkehrbare) und irreversible Prozesse ein. Zunächst ein Beispiel: Isotherme Expansion kann auf unterschiedliche Arten durchgeführt werden.

1. Volumenverdopplung durch Herausziehen eines Schiebers:

Der Prozeß läuft von alleine ab. Arbeit muß nicht verrichtet werden. Der Prozeß kann ohne zusätzliche Maßnahmen (Arbeitsaufwand) nicht umgekehrt werden. Es handelt sich also um eine irreversible Prozeßführung.

2. Volumenverdopplung durch Herausziehen eines Kolbens:

Der Prozeß läuft ab, sobald auch nur ein infinitesimal kleiner Druckunterschied zwischen  $p_a$  und  $p_i$  besteht, wenn also

$$p_a < p_i$$

Arbeit muß dazu praktisch nicht verrichtet werden, da immer  $p_a \approx p_i$  gehalten werden kann. Diese Prozeßführung ist reversibel. Dazu muß nur  $p_a > p_i$  gemacht werden. Dazu reicht ein infinitesimaler Druckunterschied aus. Arbeit muß zur Prozeßumkehrung praktisch nicht verrichtet werden.

Bei der ersten Prozeßführung müßte z.B. eine Turbine eingebaut werden, die - unter Verrichtung von Arbeit - die Moleküle wieder zurückbefördert.

Alle unsere Betrachtungen zum Wirkungsgrad  $\eta$  wurden für reversible Kreisprozesse gemacht, d.h. alle Zustandsänderungen wurden reversibel geführt. Dabei ergab sich

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \text{ oder } \Delta S = 0,$$

d.h. Entropieerhaltung. Für Prozeßführungen, die irreversible Zustandsänderungen enthalten, gilt allgemein

$$\sum \frac{\Delta Q_i^{(irr)}}{T_i} < 0,$$

weil  $\eta < \eta_{ideal}$  ist.

### Richtungsablauf von Prozessen:

Wir betrachten einen Kreisprozeß, der eine irreversible Zustandsänderung enthält, dann ist

$$\int \frac{dQ}{T} < 0.$$

Wir legen die irreversible Zustandsänderung in den Ast ( $1 \rightarrow 2$ ), d.h. wir führen das System über einen irreversiblen Prozeß von ( $2 \rightarrow 1$ ) zurück:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{rev}}{T} &< 0 \\ \Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S(1) - S(2) &< 0 \\ \Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} &< S(2) - S(1) \end{aligned}$$

Der Entropie-Zuwachs ( $S(2)-S(1)$ ) auf dem reversibel geführten Weg ist größer als das Integral

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

für den irreversiblen Prozeß. Aus dem Vergleich des Integrals mit dem Entropie-Zuwachs kann man feststellen, ob der Prozeß irreversibel ist. Für ein abgeschlossenes System kann keine Wärme umgesetzt werden, d.h. es ist  $dQ \equiv 0$ .

$$\Rightarrow S(2) - S(1) > 0$$

Folglich laufen in abgeschlossenen Systemen nur Prozesse ab, bei denen die Entropie zunimmt. Ein Beispiel ist die irreversible Expansion (isotherm). Eine Berechnung der Entropieänderung ergibt, daß die aufgenommene Wärmemenge  $Q_1$  die mechanische Arbeit der Kolbenbewegung  $W$  verrichtet. Die Entropieänderung beträgt also

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T}$$

Wegen  $Q_1 = -W$  folgt für 1 Mol

$$Q_1 = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

und

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

Der umgekehrte Prozeß kann von alleine nicht ablaufen, da  $\Delta S < 0$  ist, solange ein abgeschlossenes System vorliegt.



# Kapitel 7

## Strömungsvorgänge

### 7.1 Einführung

**Definition 7.1:** Strömung

*Der Begriff der Strömung ist definiert als Fortbewegung eines Mediums oder einer nicht materiellen Größe (z.B. Energie).*

Beispiele sind die Strömung von Wasser im Fluß, Blut im Kreislauf oder auch der Wind. Die ursprüngliche Definition war “Fortbewegung von Masse”, d.h. eines flüssigen oder gasförmigen “fluiden” Mediums. Hierbei handelt es sich um einen Massenstrom. Dieser Begriff ist aber erweiterbar auf die Bewegung von Ladungsträgern, z.B. Elektronen in Metallen oder Ionen in Flüssigkeiten (Elektrolyse-Erscheinungen). Der Transport von Ladung, d.h. die Fortbewegung von Ladungsträgern, heißt elektrischer Strom. Ebenso ist der Begriff auf den Transport von Größen, die nicht mit Materie identifizierbar sind, anwendbar. Eine besondere Stellung nimmt dabei der Transport von Energie ein. Dieser tritt beispielsweise auf beim Strahlungsstrom (z.B. von der Sonne zur Erde) oder auch bei der Schallstrahlung von der Schallquelle zum Ohr. Diese Ströme nennt man Energieströme. Besonders wichtig ist hier der Strom von elektromagnetischer Strahlung.

Am einfachsten ist die Behandlung von fluiden Medien, d.h. Massenströme. Daran definieren wir die Grundgrößen, die dann auf weitere Strömungen übertragen werden. Ausführlich behandelt werden dann der elektrische Strom, Energieströme (insbesondere elektromagnetische Strahlung) und die Schallausbreitung.

### 7.2 Grundbegriffe

Unmittelbarer Anlaß für die Betrachtungen ist die Fortbewegung von flüssigen oder gasförmigen Medien. Das Fachgebiet heißt Rheologie (Fließkunde). Die neuen physikalischen Größen wie Strom oder Stromdichte bleiben dieselben, wenn stattdessen die Fortbewegung von Ladungen in Drähten, Flüssigkeiten usw. untersucht wird. Weiterhin sind diese Begriffe anwendbar auf Vorgänge, bei denen überhaupt keine Materie, sondern Energie transportiert wird.

Eine Strömung wird charakterisiert durch ein sogenanntes Strömungsfeld  $\vec{v}(\vec{r})$ . Dabei denken wir uns an jeder Stelle der Flüssigkeit den lokalen Geschwindigkeitsvektor der Teilchen  $\vec{v}(\vec{r})$  angeheftet.

**Definition 7.2:** Stromlinien

Verbindet man die Vektoren  $\vec{v}(\vec{r})$  benachbarter Orte  $\vec{r}$ , so erhält man als Ergebnis die Stromlinien.

**Definition 7.3:** Laminare und turbulente Strömung

Wenn sich die Stromlinien nicht schneiden, so spricht man von laminarer Strömung. Schneiden sich die Stromlinien, so ist die Strömung turbulent.

Wir halten nun einen Meßrahmen der Fläche  $A$  in die Strömung und messen die in  $\Delta t$  durch  $A$  fließende Materiemenge  $\Delta m$ .

**Definition 7.4:** Stromstärke

Die Stromstärke für einen Massenstrom ist definiert als

$$I = \frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (7.4)$$

Die fließende Menge braucht aber nicht unbedingt Masse zu sein. Analog ist der Ladungsstrom definiert als  $I = \frac{dQ}{dt}$ . Der Energiestrom ist gegeben durch  $I = \frac{dW}{dt}$ .

Weil für den Massenstrom speziell  $m = \rho \cdot V$  ist, gilt für konstante Dichte  $\rho$ :

$$I = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt},$$

**Definition 7.5:** Volumenstrom

Den Ausdruck  $\frac{dV}{dt}$  nennt man Volumenstromstärke. Man mißt dazu das Volumen, welches per Zeit  $dt$  durch den Meßrahmen fließt.

**Definition 7.6:** Dichte

Bezieht man eine physikalische Größe (Masse, Ladung, Energie) auf das Volumen, in dem sie definiert ist, so erhält man die Dichte der betreffenden Größe.

In der kinetischen Gastheorie haben wir die Teilchendichte  $n = \frac{dN}{dV}$  bereits kennengelernt. In Worten bedeutet dies, daß sich  $dN$  Teilchen im Volumen  $dV$  befinden. Analog sind nun auch Dichten für die Größen Masse, Ladung und Energie definiert:

- Massendichte:  $\rho = \frac{dm}{dV}$  (Einheit:  $1 \frac{kg}{m^3}$ )
- Ladungsdichte:  $\rho_{el} = \frac{dQ}{dV}$  (Einheit:  $1 \frac{C}{m^3}$ )
- Energiedichte:  $\rho = \frac{dW}{dV}$  (Einheit:  $1 \frac{J}{m^3}$ )

Wird eine physikalische Größe durch eine einzige Sorte von Teilchen transportiert (z.B. Ladung durch Elektronen), dann ist

$$\rho_{el} = e \frac{dN_e}{dV} = e \cdot n,$$

wobei  $dN_e$  die Zahl der Elektronen in  $dV$  ist. In Worten heißt dies, daß die Ladungsdichte  $\rho_{el}$  als Produkt aus Einzelladung  $e$  und Teilchenzahldichte  $n$  geschrieben werden kann.

Es ergibt sich nun die Problematik, daß die Stromstärke von der Orientierung von  $A$  relativ zu  $\vec{v}(\vec{r})$  abhängt. Man sucht also eine davon unabhängige Größe. Dazu macht man  $A$  genügend klein, bezieht  $I$  auf  $A$  und wählt die Orientierung von  $A$  senkrecht zu  $\vec{v}(\vec{r})$ .

**Definition 7.7:** Stromdichte

Die Stromdichte ist definiert über den Quotienten aus dem durch das Flächenelement  $dA$  fließenden Strom  $dI$  und dem Flächenelement selbst:

$$j = \frac{dI}{dA} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (7.7)$$

Man beachte, daß die Flächennormale von  $A$  parallel zu  $\vec{v}(\vec{r})$  ist. Bei einem Massenstrom  $I = \frac{dm}{dt}$  erhält man nun

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta A \cdot \Delta s}{\Delta t} \rho \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot v$$

Offenbar ist die Stromdichte  $\vec{j}$  ein Vektor, der die Richtung von  $\vec{v}$  hat. Allgemein gilt somit:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (7.8)$$

Die Gleichung 7.8 gilt analog für die elektrische Stromdichte  $\vec{j}_{el}$  und die Energiestromdichte  $\vec{j}_w$ . Dabei ist für  $\rho$  die Ladungsdichte bzw. die Energiedichte einzusetzen.

Generell gilt immer der Grundsatz der Massen-, Ladungs- und Energieerhaltung. Als Konsequenz daraus ergibt sich die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Wir untersuchen dazu, was in einer Rohrverjüngung passiert (s. Abbildung 7.1). Wir stellen fest, durch alle drei gezeigten

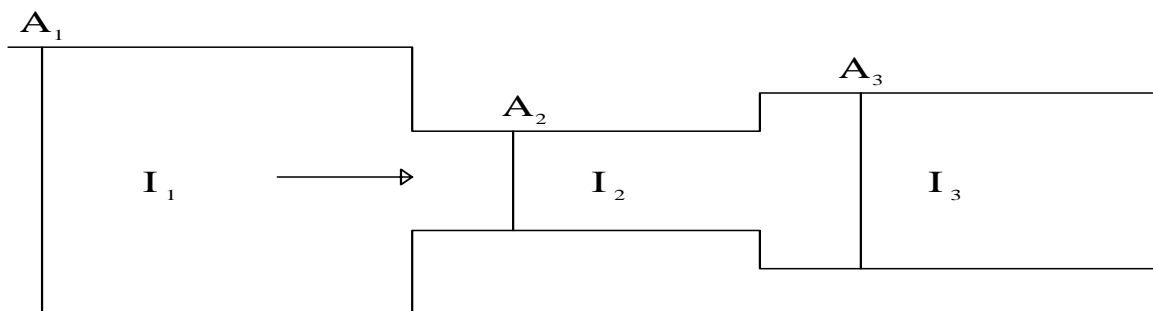


Abbildung 7.1: Rohr

Querschnitte muß in  $\Delta t$  dieselbe Materiemenge fließen. Andernfalls würde sich die Materie irgendwo aufstauen. Es gilt daher  $I_1 = I_2 = I_3$ , d.h.  $I$  ist überall gleich. Es folgt nun aus der umgeformten Definition 7.4 des Massenstromes für jeden der drei Querschnitte

$$I_i = \frac{dm}{dt} = \rho_i \cdot A_i \cdot \frac{ds_i}{dt} = \rho_i \cdot A_i \cdot v_i. \quad (7.9)$$

Wird die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen, d.h. ist  $\rho$  konstant, so gilt die

**Kontinuitätsgleichung**

$$A \cdot v = \text{konst.} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \dots \quad (7.10)$$

Eine Verengung des Rohres erfordert also automatisch eine Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit (siehe Autobahn-Staus).

## 7.3 Strömung fluider Medien

### 7.3.1 Bernoulli-Gleichung

Die Massenerhaltung und damit die Kontinuitätsgleichung fordert, daß die Strömung an einer Querschnittsverengung schneller fließt. Für die zur Beschleunigung notwendige Kraft muß ein Druckunterschied verantwortlich sein. Unser Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen dem lokalen Druck und der Strömungsgeschwindigkeit zu finden. Man macht einige Idealisierungen:

- Die Reibung zwischen den Molekülen und der Wand wird vernachlässigt.

**Definition 7.11:** reibungsfreie Strömung

*Eine Flüssigkeit, bei der die Reibungskräfte vernachlässigt werden, heißt reibungsfreie Strömung.*

**Definition 7.12:** viskos

*Eine Flüssigkeit, bei der die Reibungskräfte berücksichtigt werden, heißt viskos oder zäh.*

- Die Flüssigkeit wird als inkompressibel angenommen, d.h. die Dichte  $\rho$  ist überall konstant.

**Definition 7.13:** ideale Flüssigkeit

*Eine ideale Flüssigkeit ist ein Modell, bei dem die Flüssigkeit als inkompressibel und reibungsfrei angesehen wird. Sonst wird die Flüssigkeit als real bezeichnet.*

Im folgenden handelt es sich um eine ideale Flüssigkeit. Wir betrachten ein Zeitintervall  $\Delta t$ ,

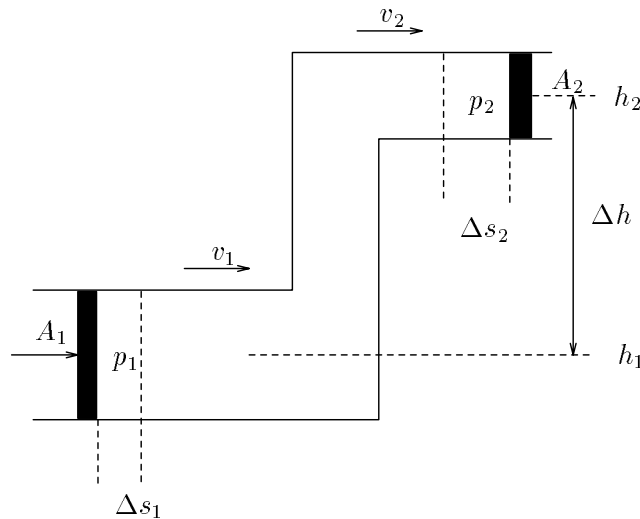


Abbildung 7.2: Kolbendruck

in dem der Kolben (1) in Abbildung 7.2 die Flüssigkeit um  $\Delta s_1$  verschiebt. Der Kolben (2) muß nun wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit um die Strecke  $\Delta s_2$  bewegt werden, wobei gilt

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta s_1 \cdot A_1 = \Delta s_2 \cdot A_2 = \Delta V_2$$

Folgende zu verrichtende Arbeiten tragen nun zur Energiebilanz bei:

1. Volumenarbeit (unten):

$$\Delta W_1 = p_1 \cdot \Delta V$$

2. Volumenarbeit (oben):

$$\Delta W_2 = p_2 \Delta V$$

3. Hubarbeit:

$$\Delta W_H = \Delta m \cdot g \cdot \Delta h \text{ und mit } \Delta m = \rho \cdot \Delta V \text{ wird } \Delta W_H = \rho g \Delta h \Delta V.$$

4. Beschleunigungsarbeit, um die Strömung von  $v_1$  auf  $v_2$  zu bringen:

$$\Delta W_B = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \text{ und damit } W_B = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Aus diesen Arbeiten kann nun die Energiebilanz aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= \Delta W_2 + \Delta W_H + \Delta W_B \\ \Rightarrow p_1 \Delta V &= p_2 \Delta V + \rho g \Delta h \Delta V + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \Delta V \\ \Rightarrow p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die

### Bernoulli-Gleichung

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.} = p_g \quad (7.14)$$

**Definition 7.15:** Statischer, Stau- und Schweredruck

Die Größe  $p$  heißt *statischer Druck (Kolbendruck)*, der Ausdruck  $\frac{1}{2} \rho v^2$  *dynamischer Druck (Staudruck)*, der Term  $\rho g h$  *Schweredruck* und  $p_g$  *Gesamtdruck*.

Wir diskutieren nun einige Aspekte der Bernoulli-Gleichung:

1. Bei einer ruhenden Flüssigkeit ist die Geschwindigkeit  $v = 0$ . Dies führt zu der vereinfachten Gleichung

$$p_1 = p_2 + \rho g (h_2 - h_1)$$

Der Druckunterschied wird hier durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule bewirkt.

2. Befindet sich die Flüssigkeit immer auf gleicher Höhe  $h_1 = h_2$ , hat aber eine Geschwindigkeit  $v \neq 0$ , so ergibt sich

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

In den Querschnittsverjüngungen wird der Druck also kleiner, weil  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  bei  $A_2 < A_1$  und damit also  $v_2 > v_1$  ist. Folglich gibt es einen Druckunterschied

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Das Gesetz von Bernoulli findet Anwendung beispielsweise bei der Wasserstrahlpumpe und dem Zerstäuber. In beiden Fällen wird ausgenutzt, daß in der Umgebung einer Querschnittsverengung Unterdruck herrscht. Dadurch wird etwas Gas in die Flüssigkeit oder etwas Flüssigkeit in das Gas (Zerstäuber) gesaugt.

**Hydrodynamisches Paradoxon:**

Zwei Platten hängen lose zusammen (s.Abb.7.3). Durch die obere Platte strömt Luft in den

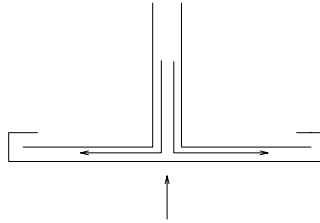


Abbildung 7.3: Hydrodynamisches Paradoxon

Zwischenraum zwischen den beiden Platten ein. An den Plattenrändern erweitert sich der Strömungsquerschnitt. Folglich muß zwischen den Platten ein Unterdruck verglichen zum Atmosphärendruck herrschen, der an den Rändern vorliegt. Als Konsequenz werden die Platten angezogen und der Luftstrom unterbrochen. Die untere Platte fällt ab und der Ablauf beginnt von vorn. Dies ist das Modell für das ‘Schnarchen’. Die Funktion der unteren Platte wird durch das Gaumensegel übernommen.

**Druckmessung:**

Es sind der statische Druck, der Staudruck und der Schweredruck zu messen.

- Der statische Druck ist der Druck, den ein mit der Strömung mitbewegtes Manometer mißt. Alternativ kann ein Manometer verwendet werden, dessen Öffnung senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  steht. Dann ist in dieser Richtung  $\vec{v} = 0$ .
- Der Staudruck kann mit Hilfe eines Prandtl-Staurohres (s.Abb.7.4) gemessen werden. Es gilt:  $v = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{Stau}}$ . Für bekanntes  $\rho$  kann  $v$  direkt abgelesen werden.

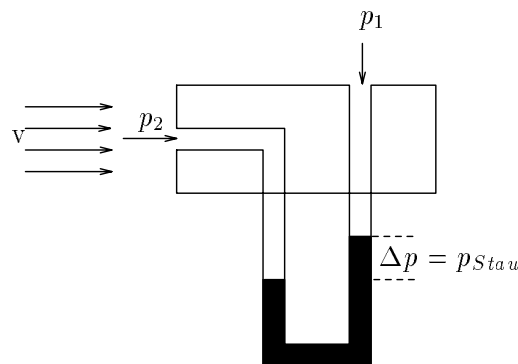


Abbildung 7.4: Prandtl-Rohr

**Magnus-Effekt:**

Wir behandeln jetzt ein Strömungsfeld, in welchem die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  ortsveränderlich ist. Ein einfacher Fall ist die Rotation eines Körpers in einer Flüssigkeit. Zunächst wird aber das Strömungsfeld und die Druckverteilung um einen nicht rotierenden Zylinder betrachtet (s. Abbildung 7.5). Es ist  $p_O = p_U$  und  $p_{stat}$  der statische Druck in der Staulinie.

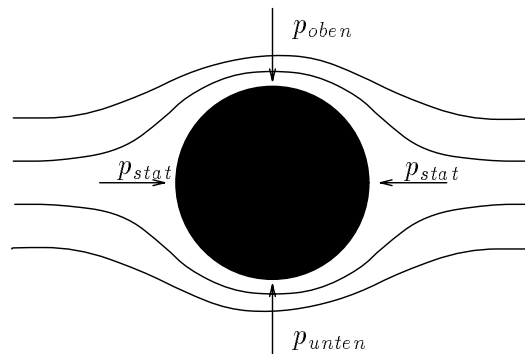


Abbildung 7.5: Strömung um einen Zylinder

Die Kugel bzw. der Zylinder erfährt also keine Nettokraft. Wird der Zylinder nun aber in eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine Längsachse versetzt (s. Abbildung 7.6), so

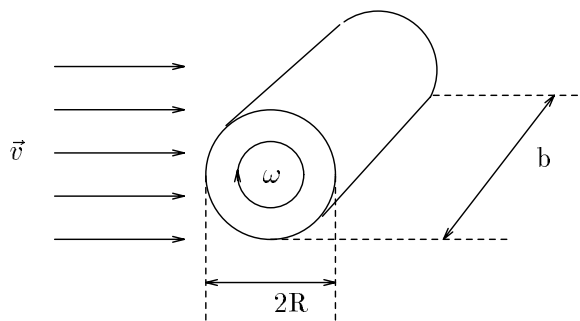


Abbildung 7.6: Magnus-Effekt

erhalten die Flüssigkeitselemente am Zylinder-Umfang oben eine zusätzliche Geschwindigkeit von  $v_z = \omega R$  und unten eine um  $v_z = \omega R$  erniedrigte Geschwindigkeit. Es ist

- $v_O = v + \omega R$
- $v_U = v - \omega R$

Die Bernoulli-Gleichung (s. Gleichung 7.14) liefert nun

$$p_O + \frac{\rho}{2} v_O^2 = p_U + \frac{\rho}{2} v_U^2$$

Als Druckdifferenz ergibt sich daraus

$$\Delta p = p_O - p_U = \Delta p = \frac{\rho}{2} \left( (v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2 \right) = \Delta p = 2\rho v \omega R. \quad (7.16)$$

Das Vorzeichen von  $\Delta p$  hängt dabei von der Drehrichtung, also von  $\omega$  ab. Die Kraft  $|\vec{F}_A|$  quer zur Strömungsrichtung beträgt  $F_A = \Delta p \cdot A$ . Als angeströmte Fläche  $A$  erhält man  $A = \frac{1}{2}2\pi Rb = \pi Rb$ . Setzt man dies in die Gleichung für die Kraft ein, so erhält man

$$F_A = 2\rho v\omega R \cdot \pi Rb = \rho vb \cdot \Gamma, \quad (7.17)$$

wobei  $\Gamma = 2\pi R^2\omega$  den Namen Zirkulation der Strömung trägt.

**Definition 7.18:** Dynamischer Auftrieb

Die Kraft  $F_A$  heißt dynamische Auftriebskraft.

**Versuche zum Magnus-Effekt:**

- Ein fallender und rotierender Zylinder wird seitlich ausgelenkt.
- Geschosse weichen seitlich von ihrer Flugbahn ab, wenn sie Rotationen um ihre Achse ausführen.
- Eine Kugel, die sich um die horizontale Achse dreht, rollt schräg in eine mit Wasser gefüllte Wanne und wird dort durch die dynamische Auftriebskraft abgelenkt. Legt man den Ursprung des Bezugssystems in den Mittelpunkt der Kugel, so scheint diese zu ruhen, während das Wasser an ihr vorbeiströmt (s. Abbildung 7.7).

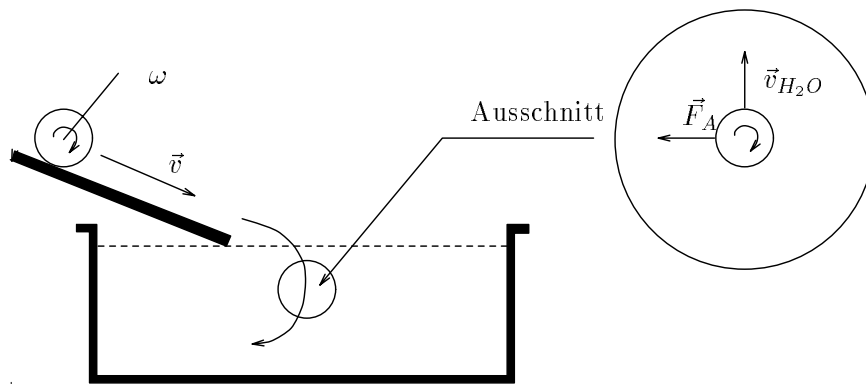


Abbildung 7.7: Ablenkung einer rollenden Kugel

Die Zirkulation  $\Gamma$  berechnet sich allgemein aus dem geschlossenen Wegintegral über den Körperumfang:

$$\Gamma = \oint_{\text{Körper}} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \quad (7.19)$$

wobei die Integration entlang eines Weges geführt wird, welcher den Körper umschließt.  $d\vec{s}$  ist ein Wegelement auf eben diesem Weg. In unserem Beispiel war  $|\vec{v}| = \omega \cdot R$  und der gesamte Weg betrug  $s = 2\pi R$ . Für  $\Gamma$  ergab sich somit

$$\Gamma = 2\pi\omega R^2$$

Verallgemeinert stellt man fest: Immer wenn sich um einen Körper eine Zirkulationsströmung ergibt ( $\Gamma \neq 0$ ), so entsteht eine dynamische Auftriebskraft. Es reicht bereits aus, wenn  $v_O \neq v_U$



ist. Eine Zirkulation entsteht auch, wenn sich von einem Hindernis Wirbel ablösen. Es gilt für einen Körper der "Spannweite"  $l$  allgemein der

**Satz von Kutta-Jukowsky**

$$F_A = \rho v b \cdot \Gamma \quad (7.20)$$

### 7.3.2 Strömungen in realen Flüssigkeiten

Bisher nahmen wir an, daß die Moleküle aufeinander keine Kohäsionskräfte ausüben. Ferner sollte es keine Adhäsionskräfte zwischen den Molekülen und den Wänden geben. Jetzt lassen wir dagegen die Reibung (innere Reibung) zu. Vorausgesetzt wird dagegen, daß es sich um eine laminare Flüssigkeit handelt, d.h. das Strömungsfeld dieser Flüssigkeit zeigt keine Überkreuzungen.

Betrachten wir nun eine reale Flüssigkeit in einer Rohrleitung. Am Einfluß herrscht der Druck  $p_1$  und die Strömungsgeschwindigkeit sei  $v_1$ . Am Ausfluß erwartet man wegen des gleichen Querschnitts auch die gleiche Geschwindigkeit  $v_2 = v_1$ . Nach Bernoulli (s. Gleichung 7.14) müßte nun  $p_2 = p_1$  sein. Man findet aber, daß  $p_2$  kleiner als  $p_1$  ist. Der Grund hierfür ist, daß Volumenarbeit gegen die Kohäsions- bzw. Adhäsionskräfte verrichtet wird. Die verrichtete Arbeit gegen die Reibungskraft ist

$$W = (p_1 - p_2)A \cdot \Delta s \quad (7.21)$$

Ist  $\Delta p$  die auftretende Druckdifferenz und  $I_V = Av$  der gegebene Volumenstrom, so trifft man folgende Definition:

**Definition 7.22:** Strömungswiderstand

*Der Quotient aus Druckabfall und Volumenstrom heißt Strömungswiderstand  $R$ :*

$$R = \frac{\Delta p}{I_V} \quad (7.22)$$

**Definition 7.23:** Newton-Flüssigkeit

*Hängt der Strömungswiderstand  $R$  nicht vom Druckverlust  $\Delta p$  ab, so handelt es sich um eine Newton-Flüssigkeit.*

Obige Definition des Strömungswiderstandes bedeutet anschaulich, je größer der Druckverlust  $\Delta p$  sein muß, um  $I_v$  strömen zu lassen, desto größeren Widerstand setzt die Rohrleitung der Strömung entgegen. Offenbar gilt:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \Delta p Av = \frac{\Delta p}{I_V} I_V^2 = R \cdot I_V^2 \quad (7.24)$$

Um eine anschauliche Erklärung der Viskosität zu finden, betrachte man eine Flüssigkeit, die an einer Platte der Fläche  $A$  vorbeigeleitet. Direkt an der Platte treten zwischen Platte und Flüssigkeitsmolekülen Adhäsionskräfte auf, die die Moleküle festhalten. Die folgenden Schichten müssen nun übereinander weggleiten. Dem stehen aber die Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen entgegen. Folglich wächst die zu überwindende Kraft mit der Fläche  $A$  des Hindernisses, an dem die Moleküle haften. Die Größe der Kraft  $\vec{F}$ , die nötig ist, um einen Körper mit vorgegebener Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch eine ruhende Flüssigkeit zu bewegen, hängt von den Kohäsions- bzw. Adhäsionskräften ab:

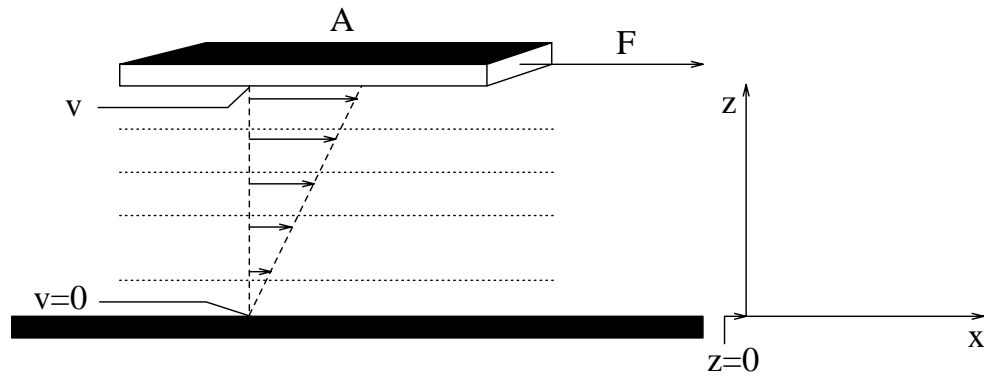


Abbildung 7.8: Adhäsionskräfte an einer Platte

- Die Kraft  $\vec{F}$  muß um so größer sein, je größer die Fläche  $A$  (s. Abbildung 7.8) ist, an der die Adhäsion auftritt:  $F \sim A$ .
- Ebenfalls muß  $\vec{F}$  um so größer sein, je größer  $\vec{v}$  sein soll. Es geht also der Geschwindigkeitsunterschied  $\frac{dv}{dz}$  zur ruhenden Flüssigkeit ein:  $F \sim \frac{dv}{dz}$

Der einfachste Ansatz für die Kraft  $\vec{F}$  heißt

#### Newtonscher Reibungsansatz

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dz} \quad (7.25)$$

#### Definition 7.26: Zähigkeit

Der Proportionalitätsfaktor  $\eta$  heißt *Zähigkeit* oder *Viskosität* der Flüssigkeit und ist charakteristisch für die Molekularkräfte. Die SI-Einheit ist  $1 \text{ N s/m}^2 = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

#### Zahlenbeispiele

Ölsorte ( $t = 55^\circ\text{C}$ )	Zähigkeit $\eta$
SAE 10	$160 \dots 220 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$
SAE 20	$230 \dots 300 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$
SAE 30	$360 \dots 430 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$

Es zeigt sich, daß die Viskosität von der Temperatur abhängt. Dies kann schematisch durch Platzwechsellvorgänge erklärt werden. Wir betrachten die Moleküle der Flüssigkeit als harte Kugeln. Dies erlaubt uns eine qualitative Aussage über die Temperaturabhängigkeit. Die Verzahnung benachbarter Kugelschichten bedingt einen "Potentialberg", der überwunden werden muß, denn die benachbarte Kugelschicht muß etwas angehoben werden. Wenn die Moleküle bereits beträchtliche thermische Energie besitzen, so ist dies leichter möglich. Die Höhe des Potentialberges  $W_a$  stellt die "Aktivierungsenergie" für Platzwechsel dar. Die Wahrscheinlichkeit dafür geht proportional mit  $\exp(-W_a/kT)$ , wie aus Gleichung 6.31 folgt.

#### Versuch zur inneren Reibung (Couette-Viskosimeter):

Das Couette-Viskosimeter ist aus zwei gegeneinander drehbaren Zylindern aufgebaut, deren

Wände den Abstand  $dr \approx 1 \text{ mm}$  haben. Der innere Zylinder ist drehbar und zwischen den Zylindern befindet sich Flüssigkeit bis zu einer Höhe  $h$ . Durch diese Höhe  $h$  kann die mit Flüssigkeit bedeckte Oberfläche  $A$  der Zylinder variiert werden. Der Zylinder wird angetrieben durch eine Gewichtskraft, die am inneren Zylinder ein Drehmoment verursacht und ihn in eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  versetzt. Man erhält folgende Ergebnisse:

1. Die Antriebskraft ist proportional zur Fläche  $A$ .
2. Die Antriebskraft wächst proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .
3. Sie ist ebenfalls abhängig von der Art der Flüssigkeit, d.h. ihrer Viskosität  $\eta$ .
4. Die Verwendung eines Innenzylinders mit kleinerem Abstand zum Außenzylinder verursacht eine größere Kraft zur Aufrechterhaltung der gleichen Geschwindigkeit. Der Grund hierfür ist das Anwachsen der Fläche  $A$  mit wachsendem Radius  $r$ .

Diese Ergebnisse bestätigen den Newtonschen Reibungsansatz (s.Gleichung 7.25), wobei bei uns gilt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d(\omega r)}{dr} = \omega$$

#### Zahlenwerte für die Abhängigkeit der Viskosität von $T$ :

Flüssigkeit	Temperatur $\theta$	Viskosität $\eta$
H <sub>2</sub> O	0°C	$1,79 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
H <sub>2</sub> O	20°C	$1,01 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
H <sub>2</sub> O	50°C	$0,55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
H <sub>2</sub> O	100°C	$0,28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$

#### Anwendungen des Newtonschen Reibungsansatzes:

##### 1. Stokes-Gesetz:

Wir betrachten eine Kugel, die von einem Fluid umströmt wird (Abb.7.9). Fern der

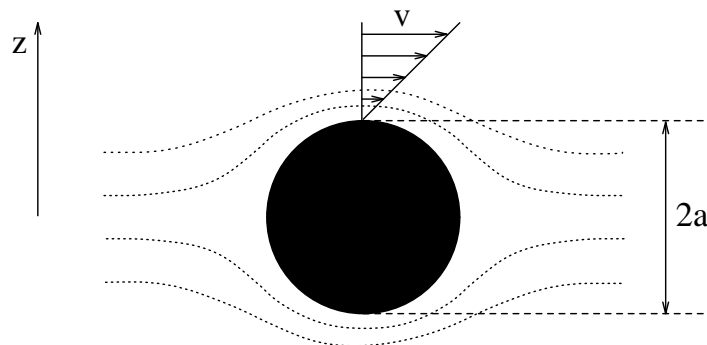


Abbildung 7.9: Strömung um eine Kugel

Kugel sei die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$ . An der Kugel haftet dagegen die angrenzende Flüssigkeitsschicht, d.h.  $\vec{v}$  ist dort Null. Wir haben ein Geschwindigkeitsgefälle von

$$\frac{dv}{dz} \approx \frac{v}{a}$$

mit  $a$  dem Radius der Kugel. Wir verwenden nun den Newtonschen Reibungsansatz. An der Kugeloberfläche greift eine Reibungskraft  $F_R$  an, für die nach Newton (s. Gleichung 7.25) gilt:

$$F_R \approx 4\pi a^2 \eta \frac{v}{a} = 4\pi \eta a v$$

Tatsächlich stellt die Kugel ein Strömungshindernis dar und nach Bernoulli (s. Gleichung 7.14) ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit für  $z > a$  größer als weit vor oder hinter dem Hindernis. Eine strengere Betrachtung liefert daher für  $F_R$  einen etwas größeren Wert als jenen, den wir abgeschätzt haben. Man erhält das

### Stokes-Gesetz

$$F_R = 6\pi \eta a v \quad (7.27)$$

#### Versuch: Kugelfall-Viskosimeter

Wir lassen eine Kugel in einem Fluid fallen. Nach einiger Zeit sind die Schwerkraft und die Reibungskraft gleich groß, d.h. es herrscht Kräftegleichgewicht. Da es sich in diesem Zustand um eine kräftefreie Bewegung handelt, fällt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit. Die Kräftebilanz ergibt

$$F_R = 6\pi \eta a v = F_g = mg = \rho \cdot g \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (7.28)$$

Dabei ist wegen der Auftriebskorrektur  $\rho = \rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Fl.}}$ . Die Fallgeschwindigkeit ergibt sich aus Gleichung 7.28 zu

$$v = \frac{2}{9} g \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{\eta} a^2$$

Die Geschwindigkeit ist also proportional zum Quadrat des Kugelradius. Kennt man nun den Kugelradius sowie die Dichten der Kugel bzw. der Flüssigkeit und mißt die Fallgeschwindigkeit, so kann man die Zähigkeit der Flüssigkeit bestimmen.

#### 2. Gesetz von Hagen-Poiseuille:

Weil die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet ( $v=0$ ), muß eine Kraft  $F_r$  überwunden werden, um eine Strömung mit  $|\vec{v}|$  aufrecht zu erhalten. Dies geschieht durch eine Druckdifferenz zwischen Ein- und Austritt des Rohres. Es ist

$$F_R = \Delta p \pi a^2 \quad (7.29)$$

Innerhalb des Rohres ergibt sich ein Geschwindigkeitsprofil der in Abbildung 7.10 gezeigten Form. Anschaulich ist klar, daß  $v(z) = C \cdot (a^2 - z^2)$  gelten könnte. Man findet in der Tat

$$v(z) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - z^2)$$

Wir schätzen  $F_R$  wieder aus dem Newtonschen Reibungsansatz (Gleichung 7.25) ab und setzen  $A = 2\pi a l$ , d.h.  $A$  ist die innere Oberfläche des Rohres, denn  $l$  ist die Rohrlänge und  $a$  der Rohrradius. Ferner ist  $\frac{dv}{dz} \approx 2\frac{\bar{v}}{a}$ , wobei  $\bar{v}$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in etwa  $\bar{v} = v_{max}/2$  ist. Das Ergebnis unserer Abschätzung lautet

$$F_R \approx 4\pi \eta l \bar{v}$$

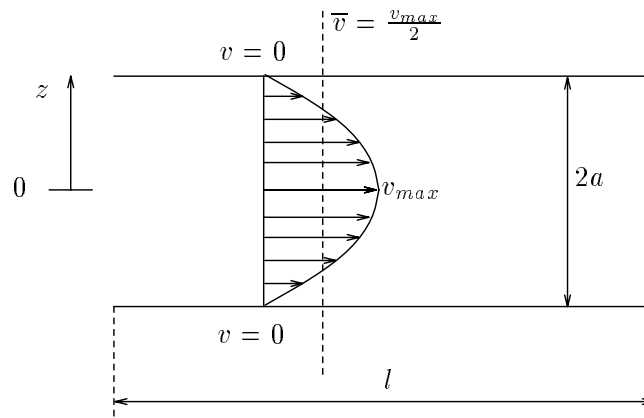


Abbildung 7.10: Strömungsprofil in einer Röhre

Eine strengere Rechnung liefert stattdessen das Ergebnis:

$$F_R = 8\pi\eta l \bar{v} \quad (7.30)$$

Wir berechnen nun noch den Strömungswiderstand  $R$  nach Definition 7.22, wobei der Volumenstrom durch  $I_V = A\bar{v}$  gegeben ist. Durch Gleichung 7.29 und  $\Delta p = \frac{F_R}{\pi a^2}$  folgt somit

$$R = \frac{\Delta p}{I_V} = \frac{\Delta p}{\pi a^2 \bar{v}} = \frac{F_R}{\pi^2 a^4 \bar{v}}.$$

Setzt man nun  $F_R$  gemäß Gleichung 7.30 ein, so ergibt sich das

#### Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$R = \frac{8\eta l}{\pi a^4} \quad (7.31)$$

Der Strömungswiderstand von Röhren hängt also äußerst empfindlich vom Rohrradius ab ( $\sim \frac{1}{a^4}$ ). Wirkung zeigt diese Tatsache z.B. beim menschlichen Blutkreislauf. Ist dort ein Blutgefäß stark verengt, so werden manche Körperteile nicht mehr oder nur wenig mit Sauerstoff versorgt und sind in ihrer Funktion eingeschränkt oder sterben gar ab (Herzinfarkt).

Im Prinzip kann über das Hagen-Poiseuillesche Gesetz auch die Zähigkeit  $\eta$  gemessen werden.

### 7.3.3 Turbulente Strömungen

Man stellt fest, daß oberhalb einer kritischen Strömungsgeschwindigkeit ein Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung stattfindet. Es stellt sich die Frage, wie man dies erkennt. Leitet man die Strömung durch ein Rohr und trägt den Quotienten aus Druckabfall und Länge des Rohrs  $\frac{\Delta p}{l}$  gegen  $\bar{v}$  auf, so ergibt sich das Diagramm in Abbildung 7.11. Wir finden folgende Zusammenhänge:

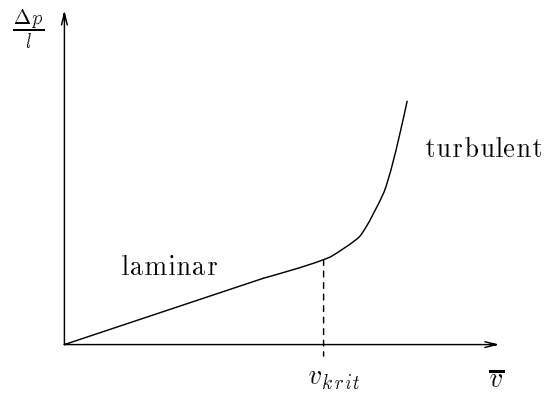


Abbildung 7.11: Diagramm zur Turbulenz

- Für  $\bar{v} < v_{krit}$  ist  $\Delta p \sim \bar{v}$  (s. Gleichung 7.31).
- Für  $\bar{v} > v_{krit}$  dagegen ist  $\Delta p \sim \bar{v}^2$ .

Ein Vergleich von laminarer und turbulenter Strömung ergibt, daß im laminaren Fall das Strömungsfeld im Gegensatz zur Turbulenz nicht explizit von der Zeit abhängt. Ferner kann bei Turbulenz die Bahn eines Flüssigkeitselementes  $\Delta m$  nicht durch einen Stromfaden charakterisiert werden, was im laminaren Fall der Fall ist. Wie wir bereits gesehen haben, unterscheiden sich beide Fälle zudem durch die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Geschwindigkeit. Im Laminarfall hängt dieser linear, bei Turbulenz quadratisch von der Strömungsgeschwindigkeit ab. Letztlich dominieren bei laminarer Strömung die Reibungskräfte, während bei Turbulenz die Druckkräfte überwiegen.

#### Entstehung und Auswirkung der Wirbelbildung:

Wir betrachten den Fall einer Wirbelstraße hinter einer angeströmten Platte. Bei einer idealen Strömung ergibt sich die in Abbildung 7.12 dargestellte Situation. Vor und hinter der Platte

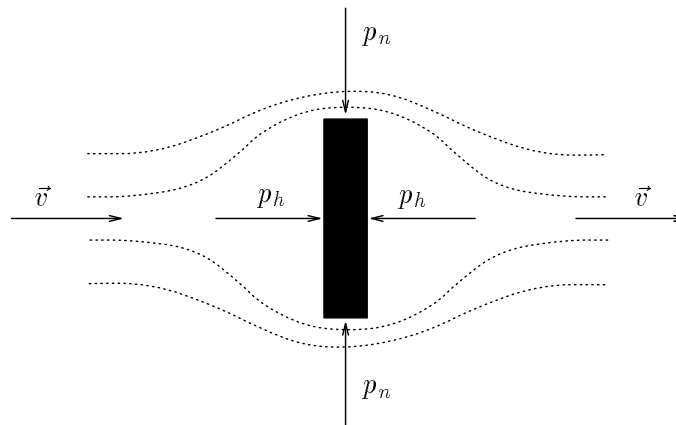


Abbildung 7.12: Ideale Strömung um eine Platte

herrsche der Druck  $p_h$ , oben und unten der Druck  $p_n$ . Der Druck über und unter dem Hindernis

ist natürlich niedriger, weil sich dort die Stromfäden zusammendrängen und somit eine größere Strömungsgeschwindigkeit vorliegt. Die Bernoulli-Gleichung (s.Gl. 7.14) sagt aus:

$$p_n + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_h$$

Der Staudruck muß aus der Druckdifferenz  $p_h - p_n$  stammen. Im Idealfall ist der Strömungsverlauf vor und hinter dem Hindernis identisch. Die "Bewegungsenergie"  $\frac{1}{2}\rho v^2$  reicht gerade aus, um gegen den Druckunterschied  $p_h - p_n$  anzulaufen.

Bei einer viskosen Strömung verrichtet ein Teil der Bewegungsenergie Arbeit gegen die Reibungskräfte. Dadurch kommt die Flüssigkeit nicht mehr gegen das Druckgefälle an. Sie "kehrt um", strömt also auf das Hindernis zu. Diese Gegenströmung muß Arbeit gegen die Reibungskräfte verrichten. Um nun einen Wirbel bilden zu können, muß die Bewegungsenergie in der Gegenströmung hinreichend hoch sein. Ebenso muß die Druckdifferenz eine bestimmte Grenze überschreiten, um einen Wirbel zu erzeugen. Wegen der Drehimpulserhaltung müssen die Wirbel jeweils paarweise entstehen (s.Abbildung 7.13). Wir wollen nun den Strömungswider-

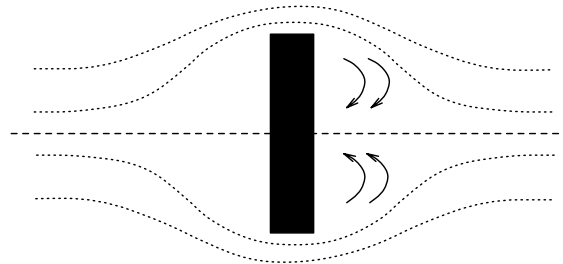


Abbildung 7.13: Wirbelstraße

stand  $R$  in turbulenten Strömungen "berechnen". Die Wirbel enthalten Rotationsenergie, die aus dem Druckunterschied  $p_h - p'_h$  stammen muß. Folglich kann  $p'_h$  hinter dem Hindernis nicht so groß sein wie  $p_h$  vor dem Hindernis. Auf das Hindernis wirkt daher eine Kraft

$$F_D = (p_h - p'_h) \cdot A$$

in Richtung der Strömung ("D" für Druckkraft). Wir wollen  $F_D$  nun abschätzen. Wenn der gesamte Staudruck  $\frac{1}{2}\rho v^2$  in Rotationsenergie umgesetzt würde, dann wäre

$$p_h - p'_h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Dabei vernachlässigen wir die Arbeit gegen die Reibungskräfte. Somit ist

$$F_D = (p_h - p'_h) \cdot A = \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot A$$

In Wirklichkeit ist  $F_D$  auch noch von der Körperform abhängig. Es gilt für die

**Widerstandskraft**

$$F_D = c_w \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot A \quad (7.32)$$

**Definition 7.33:** Widerstandsbeiwert

Der von der Körperform abhängige Proportionalitätsfaktor  $c_w$  heißt Widerstandsbeiwert.

Der Zusammenhang aus Gleichung 7.32 gilt auch noch unter Einschluß des Strömungswiderstandes  $F_R$  aufgrund der Reibung.

**Einführung der Reynoldszahl:**

Wir vergleichen die Druckkraft  $\vec{F}_D$  mit der Reibungskraft  $\vec{F}_R$ . Die Druckkraft muß wesentlich überwiegen, sonst entstehen keine Wirbel. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} F_D &\gg F_R \\ \Rightarrow \Delta p \cdot A &= \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A \gg \eta \frac{v}{a} \cdot A \\ &\Rightarrow \frac{\rho v a}{\eta} \gg 1 \end{aligned} \quad (7.34)$$

**Definition 7.35:** Reynolds-Zahl

Der folgende dimensionslose Parameter  $Re$  heißt Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho v a}{\eta} \quad (7.35)$$

Dabei ist  $v$  die Anströmgeschwindigkeit,  $a$  eine charakteristische Abmessung des umströmten Hindernisses oder des durchströmten Rohres,  $\eta$  die Zähigkeit und  $\rho$  die Flüssigkeitsdichte. Die Reynoldszahl bestimmt, ob Turbulenz auftritt. Man findet experimentell, daß Turbulenz für Reynoldszahlen  $Re \geq 2 \cdot 10^3$  auftritt. Der exakte Wert hängt von der Form des Hindernisses bzw. der Oberflächenbeschaffenheit o.ä. ab. Der angegebene Wert ist eine Faustregel. Strömungen heißen ähnlich, wenn in ihnen die Reynoldszahl denselben Wert hat. Um eine konstante Reynoldszahl zu erreichen, müssen  $a$  und  $v$  (bei gleicher Form des Hindernisses) einander umgekehrt proportional geändert werden.

**Treibstoffverbrauch von Kraftfahrzeugen:**

Wir wenden vorstehende Überlegungen auf die Bewegung von Kraftfahrzeugen an. Die aufzuwendende chemische Energie wird gebraucht, um die Druckwiderstandskraft  $F_D$  zu überwinden. Die Rollreibung kann vernachlässigt werden. Die benötigte Leistung beträgt

$$P = F_D \cdot v = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^3 \cdot A,$$

wenn man  $F_D$  aus Gleichung 7.32 einsetzt. Man muß also entweder die angeströmte Fläche oder den Widerstandsbeiwert möglichst klein machen.

**Typische Widerstandsbeiwerte:**

Widerstandskörper	$c_w$ -Wert
Rennwagen	0,25...0,35
PKW (Golf I)	0,41
PKW (Passat Bj.1983)	0,38
Kugel	0,25...0,43

Die genauen Werte hängen von der Oberflächenbeschaffenheit des jeweiligen Körpers ab. Den Fahrer interessiert besonders die aufzuwendende Energie pro Fahrtstrecke  $s$ :

$$\frac{W}{s} = \frac{F_D \cdot s}{s} = \frac{1}{2} c_w \rho v^2 A$$



Der Betrag der aufzuwendenden Energie steigt also proportional mit  $v^2$  an. Wesentliche Einsparungen setzen die Entwicklung sparsamerer Motoren bzw. eine sparsame Fahrweise voraus.

#### Auftrieb und Widerstandskraft beim Fliegen:

Die Strömungsgeschwindigkeit  $v_o$  muß größer als unter der Tragfläche (s. Abbildung 7.14) sein,

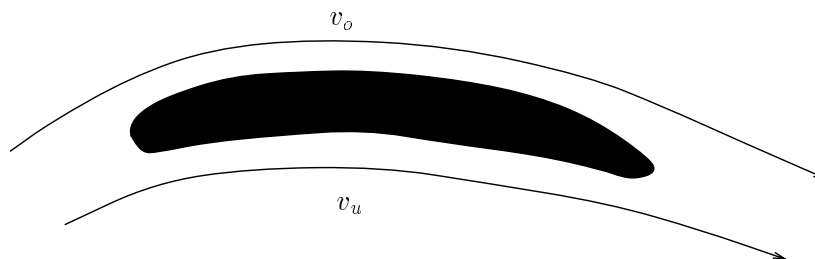


Abbildung 7.14: Zirkulation um einen Tragflügel

da der von der Luft zurückgelegte Weg oben größer ist. Die Bernoulli-Gleichung (s. 7.14) sagt aus, daß der Druck  $p_u > p_o$  ist. Der Tragflügel erfährt also eine dynamische Auftriebskraft  $F_A$ . Es gilt Gleichung 7.20, d.h. um den Tragflügel besteht eine Zirkulation ( $\Gamma \neq 0$ ). Obwohl der Tragflügel eine Stromlinienform hat, lösen sich (seitlich) Wirbel ab. Der Tragflügel erfährt also einen Druckwiderstand. Die Größe dieser Kraft ergibt sich aus Gleichung 7.32. Die Resultierende dieser beiden Kräfte zeigt nach oben (Abbildung 7.15). Sowohl die dyna-

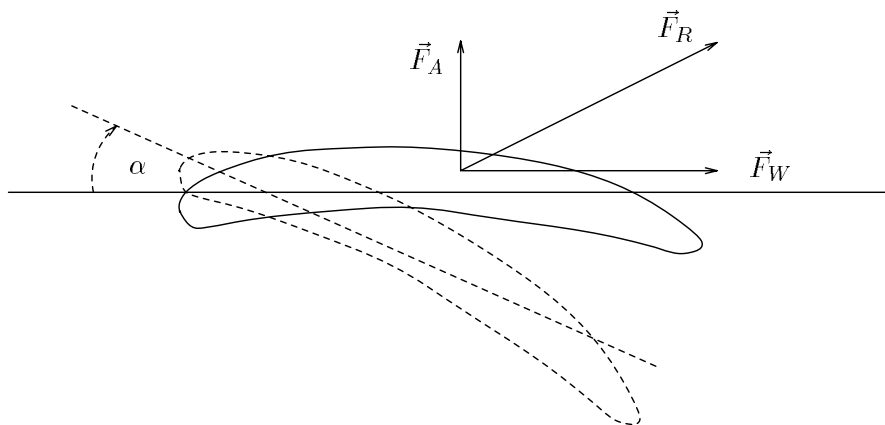


Abbildung 7.15: Situation an einem Tragflügel

mische Auftriebskraft als auch die Druckkraft hängen vom Anstellwinkel  $\alpha$  des Tragflügels ab, allerdings in unterschiedlicher Weise. Aus einem Modellversuch erhält man die folgenden Werte.

#### Abhängigkeit der Auftriebs- und der Druckkraft vom Anstellwinkel

$\alpha [deg]$	$F_A [N]$	$F_D [N]$	$\frac{F_A}{F_D}$
0	3,5	3,5	1
10	35	4	$\sim 9$
20	57	10	$\sim 6$
30	60	30	2

## 7.4 Elektrischer Gleichstrom

### 7.4.1 Strom und Widerstand

Charakteristisch für eine ruhende Ladung war ihr elektrisches Feld  $\vec{E}$ , welches auf eine Probeladung  $q$  eine Kraft

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

ausübt. Bewegte Ladungen zeigen dagegen zusätzliche Wirkungen:

- Ein vom Strom durchflossener Leiter erwärmt sich.
- In der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters wird eine Magnetnadel abgelenkt - wie durch einen Stabmagneten. Ein Strom ist also von einem Magnetfeld umgeben.
- Zwischen stromführenden Leitern existieren Kräfte. Anschaulich wird dies durch die Magnetfelder um die beiden Leiter hervorgerufen.
- Der Strom verursacht chemische Prozesse, z.B. steigen aus einem Elektrolysebad Gasblasen an den Elektroden auf.
- Bei Gasentladungen wird elektrische Energie in Licht umgewandelt.

**Definition 7.36:** Elektrischer Strom

*Elektrischer Strom ist ein Transport von Ladungsträgern.*

Normalerweise versteht man darunter Elektronen, die sich mit kleiner Geschwindigkeit in Metallen vorwärts bewegen. Ladungsträger sind an Materie gekoppelt.

**Exotisches Beispiel:** Aufstehen vom Stuhl

Beim Aufstehen von einem Stuhl kann man sich elektrisch aufladen. Wenn man nun so aufgeladen durch das Zimmer geht, so transportiert man diese Ladung. Man stellt also einen Strom dar.

Der Ladungstransport ist leicht möglich in sogenannten Leitern. Dies sind in den allermeisten Fällen Metalle und ihre Legierungen. Die Elektronen des Metalls (bestehend aus Ionenrümpfen und Elektronengas) sind leicht verschiebbar. Der Ladungstransport ist dagegen schwer möglich, wenn kein Elektronengas vorhanden ist, sondern die Elektronen an bestimmte Gitterplätze festgebunden sind. Solche Stoffe heißen Isolatoren. Beispiele sind Glas, Kunststoff, bestimmte Keramik und Holz.

**Definition 7.37:** Elektrischer Strom  $I$

*Der Strom  $I$  ist die Ladungsmenge  $\Delta Q$ , die im Zeitintervall  $\Delta t$  durch eine vorgegebene Leiterquerschnittsfläche  $A$  fließt:*

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t) \quad (7.37)$$

Die Gesamtladung  $Q$ , die zwischen  $t_1$  und  $t_2$  durch  $A$  hindurch geflossen ist, beträgt dann

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \quad (7.38)$$

Der Nachteil bei der Definition des Stromes besteht darin, daß er von der Größe und der Orientierung der Fläche  $A$  abhängt. Deshalb führt man die Stromdichte  $j$  ein.

**Definition 7.39:** Stromdichte

Die elektrische Stromdichte ist definiert durch

$$\vec{j} = \frac{dI}{dA} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (7.39)$$

Dabei stellt  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  den Einheitsvektor in Richtung des Stromes dar. Man kann (analog der Strömungsmechanik) die Stromdichte durch die Ladungsträgerdichte  $\rho_{el}$  und die Ladungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  ausdrücken:

$$\vec{j} = \rho_{el} \cdot \vec{v} = q \cdot n \cdot \vec{v} \quad (7.40)$$

Dabei ist  $q$  die Größe der einzelnen Ladung und  $n$  die Ladungsträgerdichte, d.h. die Zahl der Ladungen pro Volumen.

**Definition 7.41:** Stromrichtung

Der Strom hat die Richtung von  $\vec{v}$ , wenn die Ladung  $q$  positiv ist. Sonst ist  $\vec{j}$  entgegengesetzt gerichtet.

**Definition 7.42:** Elektrische Leistung

Die elektrische Leistung ist über die Spannung  $U$  und den Strom  $I$  definiert als

$$P_{el} = I \cdot U \quad (7.42)$$

Die SI-Einheit der elektrischen Leistung ist  $1 \text{ VA} = 1 \text{ W}$  ( $\text{W} = \text{Watt}$ ) =  $1 \text{ J/s}$ .

Ein Vergleich mit den Strömungen in Fluiden ergibt, daß der Volumenstrom dort von der Druckdifferenz aufrecht erhalten wurde. Analog wird dies für den elektrischen Strom von der Potentialdifferenz, der Spannung, übernommen. Wir kommen nun zum Begriff des elektrischen Widerstandes. Er entspricht dem Strömungswiderstand  $R$  beim Massenstrom gemäß Definition 7.22. Um einen Ladungsstrom konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  aufrecht zu erhalten, muß offenbar Beschleunigungsarbeit verrichtet werden. Man muß daher an den Leiter eine Spannung  $U$  anlegen. Wir berechnen nun die Arbeit  $W_{el}$ , die an den Elektronen beim Durchlaufen von  $U$  verrichtet wird.  $W_{el}$  ist pro Ladungsträger

$$W_{el} = q \cdot U \quad (7.43)$$

Für mehrere ( $N$ ) Ladungsträger gilt, wenn  $Q$  die Gesamtladung ist:

$$W_{el} = NqU = Q \cdot U$$

Für metallische Leiter gilt im allgemeinen ein linearer Zusammenhang zwischen  $I$  und  $U$ . Je größer die angelegte Spannung  $U$  ist, desto größer (proportional) ist der fließende Strom. Dieser Zusammenhang trägt den Namen

**Ohmsches Gesetz**

$$U = R \cdot I \quad (7.44)$$

**Definition 7.45:** Elektrischer Widerstand

Die in Gleichung 7.44 auftretende Proportionalitätskonstante  $R$  heißt elektrischer Widerstand.

Die SI-Einheit für den elektrischen Widerstand ist  $1\text{ V/A}=1\ \Omega$ . Für einen homogenen, zylindrischen Leiter ist offenbar der Widerstand proportional zur Länge des Leiters und zu seinem Querschnitt. Es ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$R = \varrho_{el} \frac{l}{A} \quad (7.46)$$

In diesem Zusammenhang ist der Proportionalitätsfaktor  $\varrho_{el}$  keine Ladungsträgerdichte, sondern s. folgende Definition:

**Definition 7.47:** spezifischer Widerstand

$\varrho_{el}$  heißt spezifischer Widerstand und ist eine Materialkonstante.

Es stellt sich nun die Frage, wie man  $R$  erhält. Die Antwort ist, daß man eine Strom-Spannungscharakteristik  $I(U)$  aufnimmt. Dazu wird für jeden Spannungswert  $U$  der zugehörige Strom  $I$  gesucht und  $R=U/I$  ausgerechnet. Man stellt schließlich fest, daß  $R$  von  $U$  abhängt. Der Grund hierfür ist die Tatsache, daß der Widerstand sich erwärmt und  $R$  von  $T$  abhängt, weil die Bewegung der Elektronen mit wachsendem  $T$  stärker wird.

**Definition 7.48:** differentieller Widerstand

Die Steigung der  $I(U)$ -Kurve liefert den differentiellen Widerstand:

$$R_{diff} = \frac{dU}{dI}$$

Spricht man allgemein vom Widerstand, so meint man stets den statischen Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz (s.Gleichung 7.44).

Der Widerstand des menschlichen Körpers hängt von der Konstitution und vom Übergangswiderstand der Haut ab. Er nimmt mit wachsender Spannung ab. Stromschädigungen können für Ströme  $\geq 20\text{ mA}$  auftreten. Auch können keine größeren Spannungen am Menschen eingestellt werden.

Unter Verwendung von  $R$  kann man für Gleichung 7.42 schreiben:

$$P_{el} = I^2 \cdot R^w$$

D.h. die elektrische Leistung, die erforderlich ist, um einen bestimmten Strom zu erhalten, wächst linear mit  $R$  an.

## 7.4.2 Elektrische Schaltungen

Der einfachste Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle und einem Voltmeter zur Spannungsmessung (Abbildung 7.16). Ein Strich ist dabei ein elektrischer Leiter. Generell werden die von uns benötigten elektrischen Bauelemente durch die Symbole aus Abbildung 7.17 dargestellt. Bei einem Strom- oder Spannungsmeßgerät erkennt man aus der Schaltung, um welches Gerät es sich handelt. Man kann identisch gebaute Geräte für beide Messungen verwenden. Weitere häufig vorkommende Symbole sind die Leiterverzweigung, die mit einem Punkt gekennzeichnet wird, der elektrische Widerstand (offenes Rechteck), Kondensator (zwei symbolisierte Kondensatorplatten) und die Induktivität (gefülltes Rechteck). Die beiden letzten Bauelemente werden in späteren Kapiteln ausführlicher behandelt. Der Begriff der "Erde" oder "Erdung" bedeutet, daß man alle Körper, die sich aufladen können, durch eine metallische Leitung miteinander und mit der Umgebung verbindet (z.B. mit der Wasserleitung oder der Heizung).

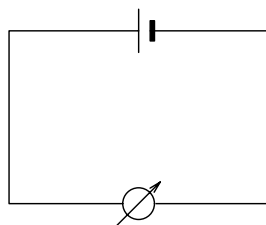


Abbildung 7.16: Einfachster Stromkreis

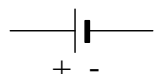
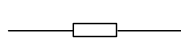
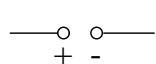

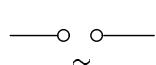

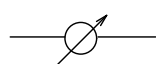


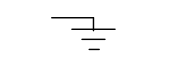
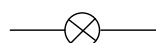

	Galvanisches Element		Elektrischer Widerstand
	Gleichspannungsquelle (DC)		Induktivität
	Wechselspannungsquelle (AC)		Induktivität (Spule)
	Strom-/Spannungsmeßgerät		Kondensator
	Leiterverzweigung		Erdung
	Lampe (Verbraucher)		Induktivität mit Eisenkern

Abbildung 7.17: Elektrische Bauelemente

Anschaulich kann man sich die Situation an einem Widerstand so vorstellen, als würden sich dort die Elektronen stauen, zu einer Ladungsanhäufung führen und somit den Spannungsunterschied zwischen den Widerstandsenden hervorgerufen (“Spannungsabfall”).

### Beispiel für eine Schaltung mit Strom- und Spannungsmessung:

Eine Taschenlampenbatterie betreibt eine Glühlampe. Der Strom der Elektronen versucht, das Ladungsungleichgewicht zwischen den Klemmen auszugleichen. Dazu müssen sich die Elektronen durch die Heizwendel der Glühlampe “hindurchquetschen”. Dabei wird Wärme aus elektrischer Energie erzeugt. Die Folge ist, daß sich die Wendel bis zum Glühen aufheizt. In Abbildung 7.18 ist die Schaltung mit einer Spannungsmessung bzw. mit Strom- und Spannungsmessung zu sehen.

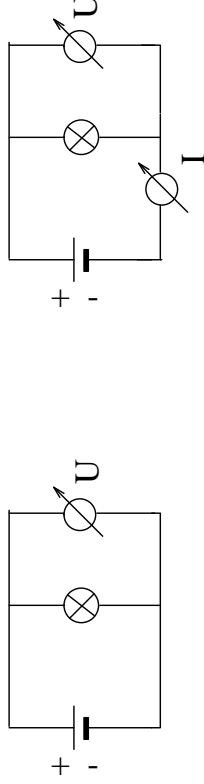


Abbildung 7.18: Stromkreis mit einer Glühlampe

### 7.4.3 Elektrische Spannungsquellen

Wir stellen die Frage, unter welchen Bedingungen sich Ladungen bewegen, d.h. ein Strom fließt. Es ist eine experimentelle Erfahrung, daß man einen Leiter mit einer Spannungsquelle verbinden muß, damit die Ladungsträger in Bewegung geraten. Die Elektronen des Leiters erfahren eine elektrische Kraft  $F_{el}$ , denn sonst würden sie sich nicht bewegen. Mit anderen Worten: Die Ladung befindet sich in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$ .

#### Definition 7.49: Elektrisches Feld

Das elektrische Feld ist definiert durch

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{el}}{q} \quad (7.49)$$

In Worten heißt das, die Kraft  $F_{el}$ , bezogen auf die Größe der Probeladung  $q$ , wird elektrisches Feld genannt. Das elektrische Feld ändert sich nicht über den Bereich von  $q$ . Das elektrische Feld ist im gewissen Sinne mit dem Gravitationsfeld zu vergleichen.

Es stellt sich die Frage nach der Ursache für  $\vec{F}_{el}$ . Diese Kraft wird durch nicht kompensierte Ladungen hervorgerufen. Wir schließen daher: Zwischen den Polen der Spannungsquelle besteht ein Ladungsungleichgewicht. Genauer muß die Spannung der “Spannungsquelle” durch eine Ladungsanhäufung erzeugt werden, denn eine ungleichmäßige Ladungsverteilung bedeutet elektrische Kräfte, somit auch ein elektrisches Feld, eine Beschleunigung von  $Q$  und damit einen Stromfluß. Die Spannung ist ein Maß für die Größe von Ladungsanhäufung zwischen den Enden des Leiters. Beispiele für Spannungsquellen sind die Taschenlampenbatterie, die Steckdose und das Thermoelement.

#### Wirkungsweise einer Spannungsquelle:

### 1. Galvanisches Element:

Ein galvanisches Element besteht aus zwei Stäben verschiedener Metalle, die z.B. in Schwefelsäure eingetaucht sind. Verschiedene Metalle haben ein unterschiedliches Bestreben aufgrund der Adhäsionskräfte zwischen Metall- und Flüssigkeitsmolekülen in Lösung zu gehen. Dabei treten die Metallatome als Ionen in die Flüssigkeit über. Die Elektronen bleiben im Metall zurück.

#### Definition 7.50: Ion

*Ein Atom, welches nicht neutral ist, da zur Kompensation der Kernladung entweder ein Elektron fehlt (positives Ion) oder zuviel ist (negatives Ion).*

Gehen nun bei z.B. Zink (Zn) mehr Ionen in Lösung als bei z.B. Kupfer (Cu), so lädt sich das Zink negativ gegen das Kupfer auf. Wir haben ein Ladungsungleichgewicht, denn in der Zinkelektrode häufen sich negative Ladungen (verglichen mit Kupfer) an. Zwischen den beiden Elektroden besteht folglich eine Spannung  $U$ . Verbinden wir die beiden Metallelektroden, so werden die Elektronen durch den Draht "gepumpt". Das galvanische Element ist eine Ladungspumpe. Ihre Leistungsfähigkeit hängt davon ab, wieviele Ionen pro Zeit in Lösung gehen können. Der Elektronenstrom läßt sich konstant aufrecht erhalten, denn wenn sich der Unterschied in der Ladungsdichte ausgleichen kann, gehen dauernd weitere Ionen in Lösung. Gelangen nun Zink-Ionen zur Kupferelektrode, so nehmen sie 2 Elektronen auf und scheiden als neutrales Zink auf der Cu-Elektrode ab.

### 2. Erzeugung hoher Spannungen (Bandgenerator):

Besonders hohe Spannungen werden durch einen Bandgenerator nach van de Graaff erzeugt, wie er in Abbildung 7.19 zu sehen ist. Im Punkt P werden von der Kugel L

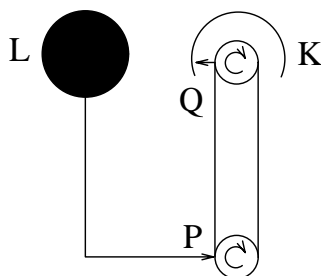


Abbildung 7.19: Bandgenerator nach Van-de-Graaff

stammende Ladungen auf das rotierende Band aufgebracht. Im Punkt Q werden diese Ladungen vom Band an die Kugel K abgegeben. Auf diese Art und Weise entsteht zwischen L und K durch Ladungstrennung eine hohe Spannung ( $\sim 10^6$  V).

#### 7.4.4 Elektrische Netzwerke

1. **Kirchhoff-Gesetz I (Knotenregel):** Da Ströme bewegte Ladungen darstellen, können sie aufgrund der Ladungserhaltung nicht einfach verschwinden. Sie können sich nur in beliebig viele andere Ströme aufteilen. Wir betrachten einen Schaltungspunkt, in dem mehrere Leiter zusammen kommen. Dabei sollen hineinfließende Ströme ein positives und herausfließende Ströme ein negatives Vorzeichen haben. Es gilt das

**1. Kirchhoff-Gesetz**

$$\sum_{i=1}^N I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0 \quad (7.51)$$

In Worten: Was in einen Knoten hineinfließt, muß auch wieder herausfließen.

2. **Kirchhoff-Gesetz II (Maschenregel):** Kein Punkt einer Schaltung kann gegen sich selbst eine Spannung haben, d.h. ein Unterschied in der Ladungsverteilung (Ladungsgleichgewicht) kann nur zwischen zwei verschiedenen Punkten bestehen. Wir betrachten einen geschlossenen Schaltungsteil ("Masche"). Sie kann Widerstände, Spannungsquellen und andere Bauteile, die wir später kennenlernen werden, enthalten. Spannungsabfälle treten auf, wenn durch Widerstände Strom fließt. Die Summe der Spannungen in einem geschlossenen Stromkreis, den man in einer festen Richtung durchläuft, liefert also Null. Dies ist das

**2. Kirchhoff-Gesetz**

$$\sum_{i=1}^N U_i = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0 \quad (7.52)$$

Die beiden Kirchhoffschen Gesetze finden Anwendung bei der Parallel- und Serienschaltung von Widerständen.

- Parallelschaltung:

Drei Widerstände seien parallel in einen Stromkreis eingebaut (Abbildung 7.20).

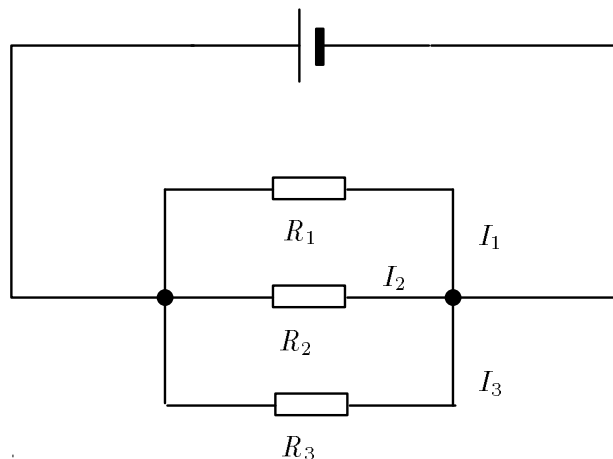


Abbildung 7.20: Parallelschaltung von 3 Widerständen

Aufgrund der Ladungserhaltung und somit wegen Gleichung 7.51 gilt der folgende Zu-



sammenhang

$$\sum_{i=1}^3 I_i = I.$$

Jeder “Verbraucher” läßt einen bestimmten Strom  $I_i$  zu, der aus dem Ohmschen Gesetz (s. Gleichung 7.44) folgt, weil  $U$  denselben Wert für alle Verbraucher hat. Somit ist

$$I = \sum_i I_i = U \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{ges}}$$

**Definition 7.53:** Leitwert

Der Kehrwert eines Widerstandes  $G=1/R$  wird Leitwert genannt. Die SI-Einheit des Leitwertes ist  $1 \text{ A/V} = 1 \text{ } \Omega^{-1} = 1 \text{ S}$  (S=Siemens).

Es ergibt sich daher als Gleichung für den Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  bzw. den Gesamtleitwert

**Gesamtleitwert der Parallelschaltung**

$$G_{ges} = \frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (7.54)$$

Bei der Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Kehrwerte der Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes. Anders ausgedrückt kann man sagen, in einer Parallelschaltung addieren sich die Einzelleitwerte zum Gesamtleitwert.

- **Serienschaltung:**

Drei Widerstände werden gemäß der Abbildung 7.21 hintereinander in einen Stromkreis eingebaut. Der Strom  $I$  muß nun durch alle Verbraucher fließen. Er kann sich nicht

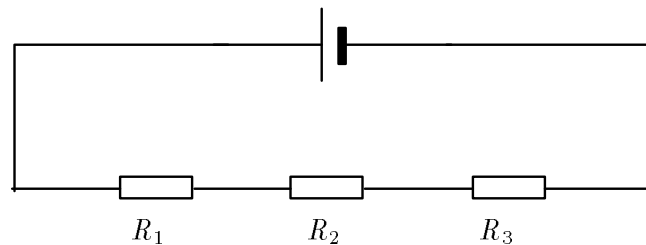


Abbildung 7.21: Serienschaltung von 3 Widerständen

aufteilen oder stauen. An jedem Verbraucher  $R_i$  tritt ein Spannungsabfall  $U_i = R_i \cdot I$  auf. Die Summe aller Spannungsabfälle muß nach der zweiten Kirchhoffschen Regel (Maschenregel, s. Gleichung 7.52) die Gesamtspannung  $U$  ergeben:

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i = I \cdot \sum_{i=1}^3 R_i = I \cdot R_{ges}$$

Es ergibt sich als

### Gesamtwiderstand der Serienschaltung

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^3 R_i = R_1 + R_2 + R_3 \quad (7.55)$$

Bei der Serienschaltung addieren sich die Einzelwiderstände zum Gesamtwiderstand.

#### Spannungsteilung und Kompensation:

Wir stellen die Frage, wie man sich eine gewünschte Spannung verschaffen kann. Die Spannung die über einen Metalldraht abfällt, ist proportional zu dessen Länge  $l$  (vgl. Gleichung 7.46). Betrachten wir nun eine typische Spannungsteilerschaltung (Abbildung 7.22). Ist die Länge  $x$

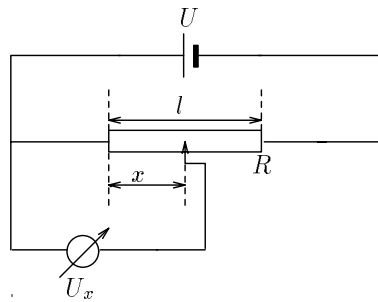


Abbildung 7.22: Spannungsteiler

der Teil des Drahtes, über dem die Spannung abgegriffen wird, so unterteilt der Abgriff den Widerstand  $R$  im Verhältnis  $x/l$ , denn es ist nach Gleichung 7.46

$$\frac{R_x}{R} = \frac{x}{l}$$

Am Abgriff wird also die Spannung  $U_x = U \cdot \frac{x}{l}$  abgegriffen. Entlang des Drahtwiderstandes tritt ein linearer Spannungsabfall auf. Allgemein unterteilt der Abgriff den Gesamtwiderstand  $R$  in zwei Teilwiderstände  $R_1$  und  $R_2$ . Diese stehen im Verhältnis der jeweiligen Drahtlängen. Durch beide Teilwiderstände  $R_i$  fließt derselbe Strom  $I$ . Es ist also  $U_i = R_i I$  und daher wegen Gleichung 7.55

$$U = (R_1 + R_2) \cdot I$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ \frac{U_2}{U} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Im folgenden sind eine unbelastete (Abb.7.23) und eine belastete Spannungsteilerschaltung (Abb.7.24) dargestellt:

Bei der belasteten Schaltung gilt für  $U_x$  an  $R_x$ :

$$U_x = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

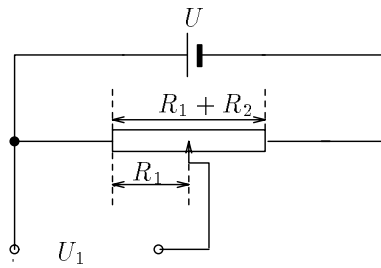


Abbildung 7.23: Unbelasteter Spannungsteiler

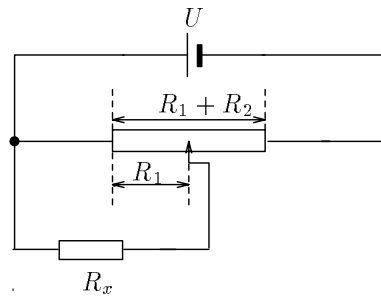


Abbildung 7.24: Belasteter Strahlenteiler

Damit  $U_x$  aber korrekt berechnet werden kann, muß  $R_x \gg R_1$  gelten, denn für die Spannungsteilung ist die Parallelschaltung aus  $R_x$  und  $R_1$  maßgebend. Sie muß bei der Berechnung von  $U_x$  verwendet werden.

#### Kompensationsschaltung:

Wir stellen die Behauptung auf, daß mit einer Spannungsquelle bekannter Spannung  $U$ , einem Strommeßgerät und einem Spannungsteiler jede unbekannte Spannung  $U_x \leq U$  gemessen werden kann. Eine Schaltung, die dies leisten kann, zeigt Abbildung 7.25.

Über  $R_1$  fällt  $U'$  ab.  $R_1$  und  $R_2$  werden solange variiert, bis  $U' = U_x$  wird. Dann gibt es im Verbraucherstromkreis keine Spannungsquelle, die Ladungen in Bewegung setzt. Der Strom im Verbraucherstromkreis ist daher Null. Der Strom muß nicht gemessen, sondern nur auf Null abgeglichen werden. Dies geschieht durch ein sogenanntes Nullinstrument. Man kann schließen: Wenn  $I=0$  ist, dann muß  $U'$  gleich  $U_x$  sein.  $U'$  kann aus dem Verhältnis der beiden Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  bestimmt werden. Die Spannungsquelle mit  $U_x$  wird nicht belastet, da  $I=0$  im Verbraucherstromkreis ist. Verwendung findet eine Kompensationsschaltung bei der Wheatstone-Brücke, deren Schaltbild aus Abbildung 7.26 hervorgeht. Es fließt kein Strom durch das Nullinstrument, wenn an beiden Seiten des Nullinstrumentes die gleiche Spannung anliegt. Dies ist der Fall, wenn beide Spannungsteiler die Spannung  $U$  im gleichen Verhältnis unterteilen:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Die Wheatstone-Brücke dient zur Bestimmung unbekannter Widerstände. Sei  $R_x = R_4$  der unbekannte Widerstand. Dann ist

$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

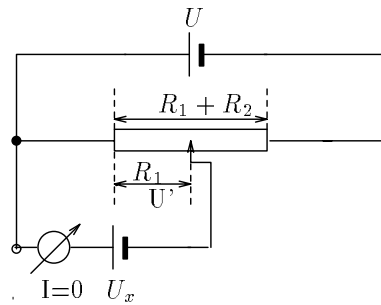


Abbildung 7.25: Kompensationsschaltung

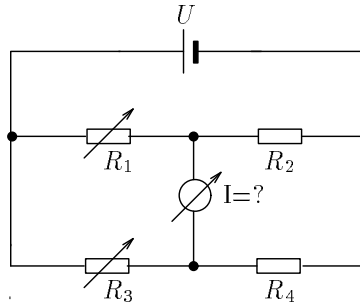


Abbildung 7.26: Wheatstone-Brücke

Der Vorteil ist, daß kein kalibriertes Strommeßgerät benötigt wird.

Die Wheatstone-Brücke kann aber auch anderweitig eingesetzt werden. Im Normalfall ist die Brücke nicht abgeglichen, weil  $R_x(T)$  eine Funktion eines Parameters, hier der Temperatur, ist. Sei die Brücke zunächst für  $T = T_0$  auf Null abgeglichen. Tritt dann eine Temperaturänderung auf, so ändert sich auch  $R_x$ . Der Strom durch das Nullinstrument wird ungleich Null. Es ergibt sich so eine Möglichkeit zur Umeichung der Brücke auf  $(T - T_0)$ -Werte. Ferner kann die Wheatstone-Brücke in einem Meßwandler eingesetzt werden. Dazu wird die Änderung einer anderen physikalischen Größe, z.B. Druckänderung, Längenänderung oder Durchbiegung, in eine Widerstandsänderung umgewandelt. Diese Änderung des Widerstandes wird in der Brücke gemessen. Eicht man diese Brücke um, so hat man die eingangs erwähnte physikalische Größe einer Messung zugänglich gemacht.

#### Vergleich Flüssigkeitsströmung - elektrischer Strom:

Bei der Flüssigkeit erfahren die Moleküle eine Kraft, die sie in Bewegung hält. Die Kraft rührt her von einem Druckunterschied zwischen Ein- und Auslauf her. Der Druckunterschied  $\Delta p$  steht für eine Zusatzkraft per Fläche, durch die der Stromfluß erfolgt. Beim elektrischen Strom hält die elektrische Kraft die Elektronen in Bewegung. Sie rührt her von einem Ladungsungleichgewicht zwischen den beiden Enden einer Spannungsquelle (Spannungsunterschied  $\Delta U$ ). Die Spannung  $U$  entspricht also dem Druck bei einer Flüssigkeitsströmung. In beiden Fällen werden mengenartige Größen bewegt (Masse bzw. Ladung).

#### Stromwirkung auf den menschlichen Körper: (Wichtig für Arbeiten in den Praktika!)

Die Physiologen haben herausgefunden: Wenn menschliche Zellen in einen Stromkreis geraten, erfolgen chemische Wirkungen des Stromes. Es kann zu Konzentrationsänderungen im

Ionenhaushalt und damit zu einer Änderung von Membranspannungen kommen. Dies hat eine Muskelkontraktion zur Folge. Besonders gefährlich ist es, wenn wichtige Organe wie das Herz betroffen sind. Die Strombahn sollte also nie durch den Brustkorb führen. Vorsicht ist also beim Hantieren mit beiden Händen geraten. Zum Schutz gegen Stromschläge sollte man sehr schlecht geerdet sein, also Holzschuhe oder Schuhe mit dicker Sohle tragen. Dann ist nur ein kleiner Stromfluß möglich. Elektroschocks verursachen eine unregelmäßige Kontraktion der Herzkammern. Das sogenannte "Herzflimmern" wird gerade noch vermieden, wenn für die Schockdauer  $\Delta t$  und den Strom folgender Zusammenhang gilt:

$$I_{max}^2 \leq (0,116)^2 \frac{A^2}{s} \cdot \Delta t$$

Dieser Zusammenhang wurde vor geraumer Zeit aus Tierversuchen ermittelt. Ein Schock von 1 s Dauer ist bei Netzstrom von 116 mA noch nicht gefährlich. Bei 4 s sind aber nur noch 58 mA verträglich. Eine weitere Nebenwirkung des Stromes besteht in einer "Lösungshemmung": Man kann das spannungsführende Teil nicht mehr loslassen. Man weiß, daß Lösungshemmung beispielsweise für 25 mA schon beim Anliegen von 30 V an einem Bauteil auftreten.

## 7.5 Elektrischer Strom und Magnetfelder

### 7.5.1 Magnetismus

Wir stellen fest, daß ein magnetischer Dipol, z.B. eine Kompaßnadel in der Umgebung eines stromführenden geraden Leiters ein Drehmoment  $T$  erfährt. Der Dipol stellt sich in Richtung des Magnetfeldes ein. Die Richtung des Magnetfeldes ergibt aus der sogenannten

#### Rechte-Hand-Regel

*Zeigt der Daumen der rechten Hand in die konventionelle Stromrichtung, d.h. zum Minuspol der Spannungsquelle, dann geben die Finger der Hand die Richtung des Magnetfeldes an.*

**Definition 7.56:** Magnetfeld

Das Magnetfeld  $\vec{H}$  ist eine vektorielle physikalische Größe und wird auch magnetische Feldstärke genannt.

Die Richtung des Magnetfeldes ist durch die Rechte-Hand-Regel gegeben, der Betrag kann aus dem Drehmoment  $\vec{T}$  bestimmt werden, welches der magnetische Dipol in  $\vec{H}$  erfährt. Die Charakterisierung des magnetischen Dipols muß durch ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{p}_m$  erfolgen. Die Orientierung benachbarter Dipole kennzeichnet den Verlauf des  $\vec{H}$ -Feldes. Verbindet man die Richtung benachbarter Dipole, so erhält man Linien, die geschlossen sind. Diese Linien heißen Magnetfeldlinien oder Kraftlinien. Der Verlauf der Kraftlinien kennzeichnet die Richtung von  $\vec{H}$ .

Weitere interessante Magnetfelder sind das Magnetfeld einer Leiterschleife (Kreisstrom) und das Magnetfeld eines kleinen Stabmagneten. Man stellt fest, daß die Magnetfelder eines Kreisstromes und eines magnetischen Dipols, der senkrecht auf der Ebene des Kreisstromes steht, gleich sind. Eine Spule ist dabei die Summe aus vielen Leiterschleifen.

**Magnetfeld-Messung:**

Wir kennen die Richtung von  $\vec{H}$ . Die Stärke  $|\vec{H}|$  müssen wir dagegen noch eindeutig festlegen.

Wir brauchen also ein Magnetometer. Dieses besteht im Prinzip aus einem magnetischen Dipol, der um eine Achse senkrecht zu  $\vec{p}_m$  drehbar ist, und in das  $\vec{H}$ -Feld senkrecht zur Richtung der Kraftlinien eingebracht wird. Das Drehmoment, das  $\vec{p}_m$  erfährt, wird durch ein rücktreibendes Drehmoment  $T$  kompensiert, so daß das Gleichgewicht erhalten bleibt. Die Größe des rücktreibenden Drehmomentes ist ein Maß für die Stärke von  $|\vec{H}|$ . Bringen wir das Magnetometer in das Magnetfeld einer Spule ein, so finden wir folgenden experimentellen Zusammenhang:

$$T \sim \frac{nI}{l}$$

Die festgestellten Abhängigkeiten hängen nicht von dem verwendeten magnetischen Dipol ab. Sie sind Eigenschaften des Magnetfeldes.  $|\vec{H}|$  muß somit ebenfalls proportional zum Drehmoment sein:

$$|\vec{H}| \sim \frac{nI}{l}$$

**Definition 7.57:** Betrag des Magnetfeldes in einer Spule

Der Betrag des Magnetfeldes  $|\vec{H}| = H$  hat für eine Spule den Wert

$$H = \frac{n \cdot I}{l} \quad (7.57)$$

Die SI-Einheit des Magnetfeldes ist  $[H]=1 \text{ A/m}$ .

Wir haben das Magnetfeld  $\vec{H}$  nun nach Betrag und Richtung festgelegt und besitzen eine Meßmethode. Sie kann für die Messung beliebiger  $\vec{H}$ -Felder, nicht nur für jene von Spulen, verwendet werden.  $\vec{H}$  ist als physikalische Größe daher vollständig bestimmt. Es folgt die Festlegung der Größe des magnetischen Momentes  $|\vec{p}_m|$ . Die Richtung von  $\vec{p}_m$  ist die magnetische Dipolachse (die Einstellrichtung im Magnetfeld). Man stellt fest:

$$|\vec{T}| \sim H \cdot p_m \cdot \sin(\vec{p}_m, \vec{H})$$

Mathematisch genau ist die folgende Formulierung unter Verwendung des Kreuzproduktes:

$$\vec{T} \sim \vec{p}_m \times \vec{H}, \quad (7.58)$$

d.h. das Drehmoment ist proportional zum Kreuzprodukt aus magnetischem Dipolmoment und Magnetfeld. Zur Festlegung der Proportionalitätskonstanten fordern wir, daß ein Kreisstrom ein magnetisches Moment

$$p_m = I \cdot A \quad (7.59)$$

besitzen soll. Man findet schließlich den Zusammenhang

$$T = \mu_0 \cdot I \cdot A \cdot H$$

und damit im allgemeinen Fall in vektorieller Schreibweise

$$\vec{T} = \mu_0 \left[ \vec{p}_m \times \vec{H} \right] \quad (7.60)$$

Die SI-Einheit von  $p_m$  ist  $[p_m]=1 \text{ Am}^2$ .

**Definition 7.61:** Magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante)

Die Größe  $\mu_0$  trägt den Namen *magnetische Feldkonstante oder Induktionskonstante*. Sie beträgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (7.61)$$

### 7.5.2 Magnetfelder stromdurchflossener Leiter

Wir untersuchen die magnetische Feldstärke in der Umgebung diverser Leiteranordnungen, die stromdurchflossen sind, z.B. mit dem Magnetometer.

#### 1. Gerader stromdurchflossener Leiter:

Eine Messung des Drehmomentes  $\vec{M}$ , das unser magnetisches Dipolmoment in der Umgebung erfährt, ergibt

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r} \quad (7.62)$$

mit  $r$  dem Abstand des Dipoldrehpunktes vom Draht und  $I$  der Stromstärke. Die Richtung von  $\vec{H}$  ergibt sich aus der Rechte-Hand-Regel.

#### 2. Stromdurchflossene, lange Spule:

Es gilt (vgl. Definition 7.57)

$$|\vec{H}| = \frac{n \cdot I}{l}$$

mit  $l$  der Spulenlänge,  $I$  dem Spulenstrom und  $n$  der Windungszahl der Spule.

Beide Befunde lassen sich wie folgt interpretieren: Man kann  $\vec{H}$  berechnen, indem man das Linienintegral

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

längs einer Kurve ( $K$ ) um die stromführende Anordnung berechnet. In beiden Fällen liefert das Integral den Zusammenhang, der

#### Ampere'sches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = n \cdot I \quad (7.63)$$

heißt. Es gilt für beliebige stromführende Leiteranordnungen.

#### Beispiel: Draht

Wir wählen für ( $K$ ) Kreise um den Draht, durch den der Strom  $I$  fließt. Dann ist  $|\vec{H}|$  überall längs ( $K$ ) konstant und  $\vec{H}$  hat die Richtung von  $d\vec{s}$ . Es ist also mit  $n=1$

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot |\vec{H}(r)| = I$$

und daher (vgl. Gleichung 7.62)

$$|\vec{H}(r)| = \frac{I}{2\pi r}$$

### 7.5.3 Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

Wir betrachten eine sogenannte Stromschaukel (s. Abbildung 7.27). Wir bringen einen Draht der Länge  $l$ , der von  $I$  durchflossen wird, in das Magnetfeld  $\vec{H}$ . Wir messen eine Kraft  $\vec{F}$ , die

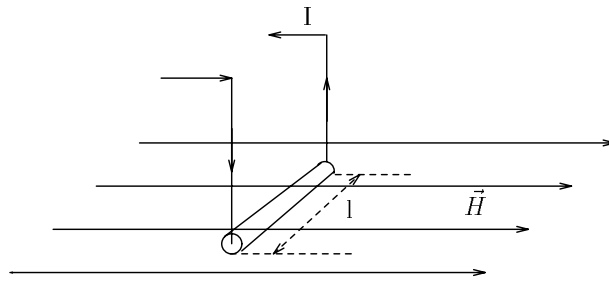


Abbildung 7.27: Stromschaukel

von der Richtung der Stromdichte  $\vec{j}$  relativ zu  $\vec{H}$  abhängt. Sie ist maximal, wenn der Draht senkrecht zu  $\vec{H}$  hängt. Das quantitative Ergebnis lautet:

$$|\vec{F}| = \mu_0 |\vec{H}| \cdot I \cdot l$$

**Definition 7.64:** Magnetische Induktion (magnetische Flußdichte)

Das Produkt aus der magnetischen Feldkonstante und dem magnetischen Feld heißt magnetische Induktion  $\vec{B}$  (im Vakuum):

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (7.64)$$

Es ist  $I = A \cdot q \cdot n \cdot |\vec{v}|$ . Für beliebige Winkel zwischen  $\vec{j}$  und  $\vec{H}$  gilt

$$\vec{F} = q \cdot A \cdot n \cdot l \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

mit A dem Leiterquerschnitt, n der Anzahldichte der Ladungsträger,  $\vec{v}$  der Strömungsgeschwindigkeit und q der Ladung (der Elektronen). Dabei kann man das Produkt  $A \cdot l$  zum Volumen V des Leiters zusammenfassen. Weiterhin gilt für die Anzahl N der Ladungsträger, die sich im Feld  $\vec{B}$  bewegen der Zusammenhang  $N = n \cdot V$ . Damit erhält man für die Kraft

$$\vec{F} = N \cdot q \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

Die Kraft auf einen einzelnen Ladungsträger der Ladung q, der sich mit  $\vec{v}$  in  $\vec{B}$  bewegt, ist die

**Lorentz-Kraft**

$$\vec{F}_L = q \cdot \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (7.65)$$

Eine rechteckige stromführende Leiterschleife erfährt im homogenen  $\vec{B}$ -Feld ein Drehmoment  $\vec{T}$ . Dieses rührt von dem Kräftepaar her, welches von den beiden Längsseiten stammt, die in umgekehrter Richtung Strom führen. Das Drehmoment  $\vec{T}$  ist streng proportional zum Strom I. Diese Tatsache findet bei zur Messung des Stromes durch Drehspul-Amperemeter Verwendung.

**Kräfte zwischen parallelen stromführenden Leitern:**

Zwei stromführende, zueinander parallele Drähte üben aufeinander Kräfte aus, da sich jeder



im Magnetfeld des jeweils anderen Leiters befindet. Die Kraft  $\vec{F}_{12}$  von Leiter 1 auf Leiter 2 beträgt (s.o.)

$$|\vec{F}_{12}| = \mu_0 \cdot I_2 \cdot l \cdot |\vec{H}_1|$$

Nach dem 3. Newton'schen Axiom (actio=reactio) wirkt auf  $I_1$  die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Gleichgerichtete Ströme ziehen sich also an, entgegengesetzt fließende Ströme stoßen sich ab.

**Definition 7.66:** SI-Einheit Ampere

Die Basiseinheit 1 Ampere ist die Stärke des Stromes  $I$ , der, wenn er durch zwei im Abstand von 1 m befindliche Leiter fließt, zwischen diesen Leitern pro 1 m Leiterlänge die Kraft  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  hervorruft. Die Anordnung ist im Vakuum aufzubauen, und der Drahtquerschnitt muß vernachlässigbar klein gegen den Drahtabstand sein.

### 7.5.4 Atomistische Deutung des Magnetismus

Das magnetische Verhalten makroskopischer Körper wird auf das magnetische Verhalten seiner Einzelbestandteile, der Atome, zurückgeführt. Zum qualitativen Verständnis beachten wir, daß jedes um einen Atomkern kreisende Elektron einen Kreisstrom darstellt:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{-e}{\tau} = \frac{-e\omega}{2\pi} \quad (7.67)$$

mit  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  der Umlaufszeit und  $\omega$  der zugehörigen Kreisfrequenz. Mit dem Kreisstrom ist wie bei jeder Kreisbewegung einer Masse ein Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  verknüpft:

$$\vec{L} = m_e \cdot [\vec{r} \times \vec{v}] = m_e r^2 \vec{\omega}$$

Somit kann man für den elektrischen Kreisstrom durch Einsetzen in Gleichung 7.67 auch schreiben:

$$I = -\frac{e}{2\pi m_e r^2} |\vec{L}|$$

Mit einem Kreisstrom ist nach Gleichung 7.59 das magnetische Moment  $|\vec{\mu}| = I \cdot A$  verknüpft. Dabei ist  $A = \pi r^2$  die Fläche der Kreisbahn des Elektrons. Setzt man dies und den obigen Ausdruck für den Kreisstrom ein, dann ergibt sich als

#### Magnetisches Dipolmoment

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (7.68)$$

**Definition 7.69:** Gyromagnetisches Verhältnis

Das gyromagnetische Verhältnis  $\gamma$  ist der Ausdruck

$$\gamma = \frac{e}{2m_e} \quad (7.69)$$

Das gesamte magnetische Moment einer makroskopischen Probe ist die vektorielle Überlagerung aller seiner "Elementarmagnete", charakterisiert durch ihre magnetischen Momente.



# Kapitel 8

## Wechselwirkungen und Felder

### 8.1 Elektromagnetische Induktionserscheinungen

Bisher wissen wir nur, daß ein stationäres elektrisches Feld, welches für einen stationären Strom verantwortlich ist, ein zeitlich konstantes Magnetfeld hervorruft. Wir wollen nun die Umkehrung untersuchen.

**Definition 8.1:** Elektromagnetische Induktion

*Unter elektromagnetischer Induktion versteht man die Erregung von elektrischen Spannungen durch zeitlich veränderliche magnetische Felder.*

Dies bedeutet, daß Magnetfelder, die sich zeitlich ändern, mit elektrischen Feldern verknüpft sind. Es stellt sich nun die Frage, wie man dies zeigen kann. Eine Möglichkeit ist, den durch die elektrische Kraft  $\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}(t)$  hervorgerufenen Ladungstransport nachzuweisen. Im folgenden wird die Verknüpfung

$$\vec{H}(t) \Rightarrow \vec{E}(t)$$

an einer Reihe von Experimenten demonstriert.

Wir werden z.B. finden, daß in der Induktionsspule ein Strom fließt, der eine Spannung  $U_i$  zwischen ihren Enden induziert, wenn  $\vec{H}$  sich zeitlich ändert. Es wird gemessen:

- Zeitlicher Verlauf von  $H(t)$ :  
Dazu messen wir den Spannungsabfall an  $R$  im "Feldkreis", wenn dort ein Strom fließt.
- Zeitlicher Verlauf von  $U_i(t)$ :  
Hierzu schließen wir ein Oszilloskop zwischen den Enden der Induktionsspule an. Alternativ kann auch ein ballistisches Galvanometer verwendet werden.

**Definition 8.2:** Oszilloskop

*Ein Oszilloskop ist ein Gerät, das zeitabhängige elektromagnetische Signale, z.B. Wechselströme und -spannungen, registrieren kann.*

Bei den meisten Experimenten genügt es festzustellen, wieviel Ladung in der Zeit, in der sich  $H(t)$  zeitlich ändert, geflossen ist. Der "Induktionskreis" einschließlich Spannungsmeßgerät habe den Widerstand  $R_i$ . Es fließe der Induktionsstrom  $I_i(t)$ . Dann gilt wegen des Ohmschen Gesetzes (Gleichung 7.44):

$$U_i(t) = R_i \cdot I_i(t)$$

Integriert man nun auf beiden Seiten nach der Zeit  $t$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int U_i(t) dt &= R_i \cdot \int_{U_i(t) \neq 0} I_i(t) dt \\ &= R_i \cdot Q\end{aligned}$$

Dabei ist  $Q$  die Ladung, die während der gesamten Zeit  $t$ , in der sich  $H(t)$  ändert, fließt.

**Definition 8.3:** Spannungsstoß

Der Spannungsstoß ist definiert durch den Ausdruck

$$\int_{t_0}^{t_1} U_i(t) dt \quad (8.3)$$

Der Spannungsstoß ist proportional zur zwischen  $t_0$  und  $t_1$  bewegten Ladung. Wir brauchen daher ein Gerät, das den Spannungsstoß mißt. Man erhält ein solches Instrument, wenn man ein Drehspulinstrument verwendet, welches eine Schwingungsdauer wesentlich größer als die Dauer von  $U_i(t)$  hat. Sein Ausschlag ist dann proportional zu  $Q$  und damit zum Spannungsstoß.

**Definition 8.4:** Ballistisches Galvanometer

Drehspulinstrumente, die zur Ladungsmessung verwendet werden, heißen ballistische Galvanometer.

Wir wollen nun eine Reihe von Induktionsgrundversuchen behandeln, die uns ein tieferes Verständnis ermöglichen sollen.

**1. Versuchsreihe:** Änderung von  $H(t)$

- Induktion mit Spulen:

Ein Oszilloskop dient zum Nachweis von  $U_i$ . Das Feld  $H(t)$  wird über einen Schalter ein- bzw. ausgeschaltet. Die Feldspule bei eingeschaltetem Feldstrom gegen die Induktionsspule bewegt.

- Induktion mit einem Stabmagneten:

Ein ballistisches Galvanometer dient hier zum Nachweis des Spannungsstoßes  $\int U_i(t) dt$ , der proportional zur geflossenen Ladung  $Q$  ist. Zu beachten ist dabei, daß der Ausschlag des ballistischen Galvanometers nicht von der Geschwindigkeit abhängt, mit der der Stabmagnet relativ zur Leiterschleife bewegt wird. Es kommt nur auf den Spannungsstoß  $\int U_i(t) dt$  an. Eine Umkehrung der Stromrichtung in der Feldspule oder die Drehung des Stabmagneten um  $180^\circ$  ändert das Vorzeichen von  $U_i(t)$ .

- Änderung der Windungszahl  $n$  der Induktionsspule:

Man stellt fest, daß die induzierte Spannung  $U_i(t)$  der Windungszahl proportional ist, d.h. es ist

$$U_i(t) \equiv n$$

**2. Versuchsreihe:** Änderung der von  $\vec{H}$  durchsetzten Fläche

Wir lassen die Stärke und Richtung von  $\vec{H}$  unverändert und beschäftigen uns mit der eventuellen Änderung von  $U_i(t)$ , wenn die Orientierung und die Form der Induktionsschleife verändert wird. Folgende Versuche werden unternommen:

- Drehung einer Leiterschleife in einem zeitlich konstanten  $\vec{H}$ -Feld

- Veränderung der vom  $\vec{H}$ -Feld durchsetzten Fläche  $A_i$  der Leiterschleife, in dem die Form der Leiterschleife verändert wird.

Faßt man die Ergebnisse der Versuchsreihen 1 und 2 zusammen, so ergibt sich, daß die bewegte Ladungsmenge  $Q$  und damit die induzierte Spannung  $U_i$  abhängt von

- der zeitlichen Änderung von  $\vec{H}(t)$
- der zeitlichen Änderung der von  $\vec{H}(t)$  durchsetzten Fläche  $A$ .

Wir können folgern, es kommt auf die zeitliche Änderung des Produktes von  $\vec{H}(t)$  und  $A(t)$  an. Für die induzierte Spannung gilt daher

$$U_{ind} \sim \frac{d}{dt} (H(t) \cdot A(t))$$

Detailliertere Untersuchungen zeigen, daß es auf die relative Orientierung von  $\vec{H}$  und dem Normalenvektor  $\hat{a}$  auf  $A$  ankommt. Es geht das Skalarprodukt  $\vec{H} \cdot \hat{a} \cdot A$  ein. Damit erhält man

$$U_{ind}(t) \sim \frac{d}{dt} (\vec{H}(t) \cdot \vec{A}(t)) \quad (8.5)$$

Berücksichtigen wir noch die Abhängigkeit von der Windungszahl der Induktionsspule, so folgt

$$U_{ind}(t) \sim n \cdot \frac{d}{dt} (\vec{H}(t) \cdot \vec{A}(t)) \quad (8.6)$$

Es verbleibt die Frage nach dem Vorzeichen der induzierten Spannung:

$$U_{ind}(t) \sim -n \cdot \frac{d}{dt} (\vec{H}(t) \cdot \vec{A}(t)) \quad (8.7)$$

Das Minuszeichen sagt, daß  $U_{ind}$  durch einen Ladungstransport verursacht wird, dessen Richtung jener des felderzeugenden Stromes in der Feldspule entgegen gerichtet ist. Dies ist die

### Lenzsche Regel

*Der Induktionsstrom wirkt der Ursache seiner Entstehung entgegen.*

Folgend beschriebener Versuch demonstriert diese Tatsache. Als Induktionsspule diene ein Aluminiumring, als Feldspule eine stromdurchflossene Spule. Der Strom in der Induktionsschleife fließt so, daß sich sein Magnetfeld und das der Feldspule abstoßen. Daraus folgt, daß die Ströme  $I_i$  (Induktionsstrom) und  $I$  (Feldstrom) entgegengesetzt fließen. Die Fläche  $A$  braucht nicht eben zu sein. Dann zerlegen wir  $A$  in viele kleine ebene Flächen  $d\vec{A}$  und aus  $\vec{H} \cot \vec{A}$  wird  $\int \vec{H} \cdot d\vec{A}$ . Damit ergibt sich letztendlich für die

$$U_{ind}(t) \sim -n \frac{d}{dt} \left( \int \vec{H}(t) \cdot d\vec{A}(t) \right) \quad (8.8)$$

### 3. Versuchsreihe: Abhängigkeit von $\vec{B}$ statt allein von $\vec{H}$

Wir machen die folgenden Versuche, um die Abhängigkeiten zu klären:

- Die Feldspule erhält bei konstantem Spulenstrom einen Eisenkern. Das Einschieben des Eisenkerns induziert eine enorme Spannung.

- $U_{ind}$  mit/ohne Eisenkern

Es kommt folglich nicht alleine auf die magnetische Feldstärke  $H(t)$  an, denn das  $\vec{H}$ -Feld ist ja allein durch den Feldspulenstrom  $I(t)$  gegeben, sofern die Spulendimensionen konstant gehalten werden. Wir haben daher eine neue Größe  $\vec{B}(t)$  gefunden, die zur Charakterisierung von Magnetfeldern dienen muß.

**Definition 8.9:** Magnetische Induktion

Wir wählen den Vektor  $\vec{B}(t)$ , den wir magnetische Induktion nennen wollen, so daß gilt:

$$U_{ind}(t) = -n \frac{d}{dt} (\vec{B}(t) \cdot \vec{A}) \quad (8.9)$$

**Definition 8.10:** Magnetischer Fluß

Das Skalarprodukt aus der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  und der Leiterschleifenfläche  $\vec{A}$ , hier mit  $\Phi$  bezeichnet, heißt der magnetische Fluß. Es gilt

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A(t) \cdot \cos(\vec{B}, \hat{a}) \quad (8.10)$$

Man kann also auch schreiben:

$$U_{ind}(t) \sim n \frac{d}{dt} \Phi = -n \dot{\Phi}(t) \quad (8.11)$$

Wir wollen nun  $\vec{B}(t)$  messen.

- Richtung von  $\vec{b}$ :  
Wir orientieren die Schleifennormale  $\hat{a}$  so, daß  $\Phi$  und damit auch  $\frac{d}{dt} \Phi$ , d.h.  $U_{ind}$ , maximal werden.  $\hat{a}$  gibt nun die Richtung von  $\vec{B}$  an, da dann das Skalarprodukt maximal wird. Also ist  $\hat{a} \parallel \vec{B}$  in diesem Fall.
- Betrag von  $|\vec{B}|$ :  
Beim Einschalten von  $\vec{B}(t)$  erhalten wir nach Integration über  $t$ :

$$-\frac{1}{n} \int_0^\infty U_{ind}(t) dt = \Phi(t = \infty) - \Phi(t = 0) = \Phi(t = \infty)$$

Mit  $\Phi(t = \infty) = B \cdot A$  folgt daraus

$$\frac{1}{nA} \int U_{ind}(t) dt = B(t = \infty)$$

und mit  $\int_{t_0}^{t_1} U_{ind}(t) dt = R_i \cdot Q$  (s. Definition defSpannungsstoss) folgt:

$$B(t = \infty) = \frac{1}{nA} R_i \cdot Q \quad (8.12)$$

Folglich kann aus der Messung des Spannungsstoßes bzw. der Ladung  $Q$  mit dem ballistischen Galvanometer  $|\vec{B}|$  bestimmt werden.

Die SI-Einheit von  $\vec{B}$  ist  $1 \frac{Vs}{m^2} = 1 T$ , wobei T für Tesla steht.

Wir behandeln nun den Zusammenhang zwischen  $\vec{B}(t)$  und  $\vec{H}(t)$ . Wir besitzen jetzt zwei voneinander unabhängig definierte physikalische Größen zur Charakterisierung von Magnetfeldern:

- $\vec{H}(t)$  in  $\frac{A}{m}$ : Messung mit Magnetometer
- $\vec{B}(t)$  in  $\frac{Vs}{m^2}$ : Messung mit Induktionsschleife

Der Zusammenhang wird durch eine Messung von  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  am selben Ort hergestellt. Wir stellen fest:

- Im materiefreien Raum besteht eine exakte Proportionalität zwischen  $\vec{B}(t)$  und  $\vec{H}_a(t)$ , dem angelegten, externen Feld:

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \vec{H}_a(t)$$

Dabei ist  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$  die magnetische Feldkonstante (vgl. Definition 7.61).

- Im materiefüllten Raum gilt mit Ausnahme der ferromagnetischen Stoffe ebenfalls eine Proportionalität, aber:

$$\vec{B}(t) = \mu \mu_0 \vec{H}_a(t) \quad (8.13)$$

Dabei ist  $\mu$  eine materialabhängige Proportionalitätskonstante, die dimensionslos ist.

**Definition 8.14:** Permeabilitätszahl

Man nennt  $\mu$  die Permeabilitätszahl.

Magnetische Materie haben wir durch ihre Magnetisierung  $\vec{M}$  charakterisiert. Dies war die Summe aller durch das äußere Feld verursachten magnetischen Dipolmomente per Volumen. Dabei ist

$$\vec{M} = \chi \vec{H}_a \quad (8.15)$$

mit  $\chi$  der magnetischen Suszeptibilität. Wir interpretieren:

Die Magnetisierung  $\vec{M}$  liefert den Beitrag zum Magnetfeld  $\vec{H}$ , der von der Materie stammt, die sich im äußeren Feld  $\vec{H}_a$  befindet.  $\vec{M}$  ist die Summe aller atomaren Kreisströme  $I_i$  multipliziert mit der umflossenen Fläche  $A_i$  und bezogen auf das Probenvolumen  $V$  (vgl. Gleichung 7.59)

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_m \vec{p}_m \quad (8.16)$$

Es gilt allgemein der Zusammenhang

$$\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{M} = \vec{H}_a(1 + \chi)$$

Es gilt ferner:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H}_a$$

Andererseits gilt der die Gleichung 8.13, so daß für den Zusammenhang zwischen Permeabilitätszahl und Suszeptibilität durch einfachen Vergleich folgt

$$\mu = 1 + \chi \quad (8.17)$$

**Definition 8.18:** diamagnetisch

Ein Stoff heißt diamagnetisch, wenn gilt:

$$\mu < 1 \text{ und damit } \chi < 0 \quad (8.18)$$

**Definition 8.19:** paramagnetisch

Ein Stoff heißt dagegen paramagnetisch, wenn gilt:

$$\mu > 1 \text{ und damit } \chi > 0 \quad (8.19)$$

Wir geben uns nun eine Fläche  $A_i$  vor. Durch sie greift ein magnetischer Fluß

$$\Phi = \int_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Die Fläche  $A_i$  wird von einer Randkurve (K) begrenzt. Das Induktionsgesetz sagt, daß an den Enden der Leierschleife, die durch die Randkurve (K) gegeben ist, sich die Induktionsspannung

$$U_i = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt} \left( \int_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

abgreifen läßt. Wir verallgemeinern dies dadurch, daß wir  $U_i$  durch das Feld  $\vec{E}$  ausdrücken, welches die Ladungen im Leiter verschiebt:

$$U_i = \oint_{(K)} \vec{E}(t) \cdot d\vec{s}$$

Dabei ist für die Existenz von  $\vec{E}$  das Vorhandensein des Leiters unwesentlich. Durch ihn wird über die Messung von  $U_i$  lediglich die Existenz von  $\vec{E}$  sichtbar gemacht. Man erhält so die

### 2.Maxwell-Gleichung

$$\oint_{(K)} \vec{E}(t) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (8.20)$$

Dabei ist (K) die die Fläche ( $A_i$ ) begrenzende Randkurve.

Die 2.Maxwellsche Gleichung besagt, daß ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$ -Feld mit einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  verknüpft ist. Ob ein Leiter vorhanden ist, spielt dabei keine Rolle.

**Demonstrationsbeispiel:** Betatron

Durch ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$  - Feld werden Elektronen beschleunigt und auf einer Kreisbahn gehalten. Die Feldlinien beginnen nicht bei den Ladungen, sondern sind in sich geschlossen.

## 8.2 Wechselstrom-Generator und Transformator

Wir beginnen mit dem Generator. Es herrsche ein homogenes Magnetfeld  $\vec{B}$  und eine Leierschleife dreht sich darin mit konstanter Geschwindigkeit  $\omega$ . Der magnetische Fluß, der durch die Schleife hindurchgeht, beträgt

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos(\alpha(t))$$

bzw. für eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius  $R$ :

$$\Phi(t) = B\pi R^2 \cdot \cos(\alpha(t))$$



Die Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bedingt:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\alpha}{dt} = \text{konst.} \\ \Rightarrow \alpha(t) &= \omega t\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}U_{ind} &= \frac{d}{dt}(B\pi R^2 \cos \omega t) \\ \Rightarrow U_{ind} &= -B\pi R^2 \omega \sin \omega t\end{aligned}\tag{8.21}$$

Der Wirkungsgrad ist  $\eta \approx 1$ .

Kommen wir nun zum Transformator. Er hat den Zweck, Wechselspannungsamplituden zu verändern. Im Prinzip ist er aus zwei Spulen aufgebaut, die sich auf einem gemeinsamen Eisenkern befinden. Es kommt auf den Fluß  $\Phi$  an. An die Primärspule wird eine Wechselspannung  $U_1(t)$  gelegt, wodurch es zu einem Wechselstrom  $I_1(t)$  durch diese Spule kommt. Der Wechselstrom ist von einem Magnetfeld  $\vec{B}(t)$  umgeben. Die Primärspule wird daher von einem veränderlichen magnetischen Fluß durchsetzt ( $\dot{\Phi} \neq 0$ ). Dadurch wird in der Primärspule eine Spannung  $U_i$  induziert. Sie muß entgegengesetzt gleich  $U_1(t)$  sein, solange der ohmsche Widerstand des Primärkreises zu vernachlässigen ist (Kirchhoffsche Maschenregel).

$$\Rightarrow U_i = -n_1 \dot{\Phi}(t) = -U_1(t)$$

mit  $n_1$  der Windungszahl der Primärspule. In der Sekundärspule wird die Spannung  $U_2(t)$  induziert:

$$U_2(t) = -n_2 \dot{\Phi}(t)$$

wenn der gesamte magnetische Fluß  $\Phi$  durch die Sekundärspule hindurchgeht und mit  $\Phi$  dem selben Fluß wie durch Spule 1 und  $n_2$  der Windungszahl der Sekundärspule.

$$\Rightarrow \frac{U_1(t)}{U_2(t)} = -\frac{n_1}{n_2}$$

Der Phasenunterschied zwischen angelegter Spannung  $U_1$  und  $U_2$  beträgt  $180^\circ$ . Es stellt sich nun die Frage, was passiert, wenn ein Verbraucher angeschlossen wird, d.h. in den Sekundärkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  gelegt wird. Es fließt ein Verbraucherstrom  $I_2(t)$ . Folglich wird von der Sekundärspule im Eisenkern durch  $I_2(t)$  ein magnetisches Feld induziert, welches zeitlich veränderlich ist. Daher ändert sich der magnetische Fluß, und es kommt zu einer Rückwirkung auf die Primärseite. Es fließt auf der Primärseite ein Strom  $I_1(t)$ , der nicht mehr um  $90^\circ$  zur Spannung phasenverschoben ist. Der Energiesatz muß erfüllt sein, d.h. die auf der Sekundärseite entnommene Leistung muß auf der Primärseite bereitgestellt werden:

$$I_1 \cdot U_1 = I_2 \cdot U_2$$

und damit gilt

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{n_1}{n_2}\tag{8.22}$$

**Versuch:** E.Thomson

Eine Spule sitze mit einem Aluminium-Ring auf einem Eisenkern. Nach dem Anschalten des

Wechselstromes entsteht im Ring ein Kurzschlußstrom, der dem Strom in der Primärspule entgegengesetzt ist. Das Ergebnis ist, daß die Ströme sich abstoßen und der Ring weggeschleudert wird. Der Grund ist die gegenseitige Beeinflußung der Elektronen durch das Magnetfeld, das der andere Strom erzeugt. Ein Ring mit Schlitz wird dagegen nicht weggeschleudert.

**Versuch:** Selbstinduktion am Trafo

Beim Einschalten sind  $U_i(t)$  und  $U_2(t)$  proportional zu  $\dot{\Phi}$ . Die Birnchen B1 und B2 leuchten kurzzeitig auf, solange  $U_i, U_2$  genügend groß sind. B2 leuchtet sogar zuerst auf. Anschließend leuchtet nur noch B1, da die Gleichspannung  $U_0$  an B1 anliegt. Beim Ausschalten sind dann  $U_i$  und  $U_0$  gleichgerichtet. Daher leuchtet B1 besonders hell, B2 leuchtet auf, solange  $U_2$  groß genug ist.

## 8.3 Selbstinduktion und Energiegehalt magnetischer Felder

### 8.3.1 Induktivitäten

Eine zeitlich veränderliche Spannung  $U(t)$  bedingt einen Strom  $I(t)$  durch eine Spule  $L$ . Die stromdurchflossene Spule wird von einem axialen Magnetfeld  $\vec{H}$  durchsetzt. Letzteres folgt aus dem Ampere'schen Durchflutungsgesetz (vgl. Gleichung 7.63). Mit  $\vec{H}$  ist die magnetische Induktion  $\vec{B}$  verknüpft. Sie hängt von der Zeit ab, weil der Strom  $I(t)$  zeitabhängig ist. Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz induziert der veränderliche Fluß

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A$$

in einer Spule mit der Querschnittsfläche  $A$  an den Enden der Spule die Spannung

$$U_{ind} = n \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = nA \frac{dB(t)}{dt}$$

Wir verwenden nun die Tatsache, daß gilt  $B(t) \sim I(t)$ . Dies folgt aus dem Durchflutungsgesetz. Damit wird

$$U_{ind} \sim -\frac{dB}{dt} \sim -\frac{dI}{dt}$$

Wir führen nun die neue Konstante  $L$  ein, so daß gilt

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \tag{8.23}$$

Wenn der Spannungsabfall am ohmschen Widerstand  $R$  vernachlässigbar ist, dann ist nach Kirchhoff  $U_{ind} = -U(t)$ .

**Definition 8.24:** Induktivität

Die Proportionalitätskonstante  $L$  heißt Induktivität. Sie kennzeichnet die Spule bezüglich ihrer Wechselstromeigenschaften.

Die SI-Einheit von  $L$  ist  $1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$ , wobei H für Henry steht. Das Minuszeichen in Gleichung 8.23 bedeutet, daß  $U_{ind}(t)$  der ursprünglichen Wechselspannung  $U_{\sim}(t)$  entgegen gerichtet ist.  $L$  hängt wesentlich von der Bauart der Spule ab. Allgemein hat jedes elektronische Bauteil hat eine mehr oder minder große Induktivität (Drahtbügel, Widerstand usw.).

### 8.3.2 Magnetfeld als Energiespeicher

Wir stellen fest, daß die Quellenspannung  $U_{\sim}$  den Strom  $I_i(t)$  zum Aufbau des Magnetfeldes durch die Spule "treiben" muß, d.h. zu jedem Zeitpunkt muß die Spannung  $U(t) = -U_i(t)$  zur Verfügung gestellt werden. Daraus folgt, daß für den Aufbau des Magnetfeldes die Arbeit

$$W_e = \int_0^{\infty} I_i(t) \cdot U_i(t) dt \quad (8.25)$$

verrichtet werden muß. Diese Arbeit muß nach dem Energiesatz als magnetische Feldenergie  $W_m$  im Magnetfeld der Spule gespeichert sein. Wir berechnen  $W_m$  für den Fall, daß der Strom nach dem Einschalten der Spannung von  $I = 0$  auf  $I_0$  steigt:

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^{\infty} U(t) \cdot I(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-U_i(t)) \cdot I_i(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (L\dot{I}(t))I(t) dt \\ &= L \int_0^{\infty} I(t) \frac{dI}{dt} dt \end{aligned}$$

Substituiert man nun die Zeitvariable  $t$  durch die Stromvariable  $I$ , so erhält man

$$\begin{aligned} W_m &= L \int_0^{I_0} I(t) dI \\ &= \frac{1}{2} L I_0^2 \end{aligned}$$

Es gilt also für die gespeicherte Energie im Magnetfeld:

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (8.26)$$

Wir suchen jetzt nach einem Ausdruck, der von der Induktivität  $L$  unabhängig ist und stattdessen das Magnetfeld enthält. Für die lange Spule gilt für den Zusammenhang zwischen  $I_0$  und dem Magnetfeld  $H$  in der Spule (s.Gleichung 7.57):

$$H \cdot l = N \cdot I_0$$

Eine lange Spule hat die Induktivität  $L$ , wobei

$$L = \mu_0 A N^2 \frac{1}{l}.$$

Daher erhält man durch Einsetzen

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \mu_0 A l H^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 V H^2 \end{aligned}$$

wobei  $V$  das Volumen der Spule ist, welche von  $H$  durchsetzt wird.

**Definition 8.27:** Energiedichte

Die Energiedichte  $w_m$  ist definiert durch den Ausdruck

$$w_m = \frac{W_m}{V} \quad (8.27)$$

In diesem Fall beträgt die Energiedichte also

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \quad (8.28)$$

Die Energiedichte  $w_m$  ist unabhängig von der Form des von  $\vec{H}$  durchsetzten Volumens  $V$ . Daher gilt diese Formel allgemein für den materiefreien Raum, d.h.  $\mu_r = 1$ . Sonst gilt:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

wobei  $|\vec{B}| = \mu_0 \mu_r |\vec{H}|$  ist (s. Gleichung 8.13).

## 8.4 Wechselstromkreise

### 8.4.1 Ein- und Ausschalten von Stromkreisen

Betrachten wir zunächst den Stromkreis in Abbildung 8.1. Wir wollen den Fall des Ausschalt-

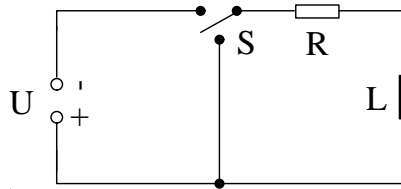


Abbildung 8.1: Stromkreis mit Induktivität und Widerstand

und den des Einschaltvorganges untersuchen.

1. Ausschaltvorgang:

Wir stellen die Frage, was passiert, wenn wir den Schalter so umlegen, daß der Stromkreis zwar noch geschlossen, die Spannungsquelle aber abgeklemmt ist, und sich vorher ein Magnetfeld in der Spule aufgebaut hatte.

2. Einschaltvorgang:

Der Schalter wird so gestellt, daß die Spannungsquelle in den Stromkreis eingebunden ist.

In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe aller Spannungen unter Beachtung ihrer Vorzeichen Null (vgl. Gleichung 7.52). In diesem Fall gilt also:

$$U_0 + U_R + U_{ind} = 0$$

wobei  $U_0$  die Klemmenspannung der Spannungsquelle,  $U_R$  der Spannungsabfall am ohmschen Widerstand und  $U_{ind}$  der Spannungsabfall an der Spule sind. Letztere sind der Klemmenspannung entgegengerichtet. Es gilt folglich

$$U_0 - RI - L\dot{I} = 0$$

1. Ausschaltvorgang:

Bei  $t = 0$  wurde der Schalter so umgelegt, daß die Spannungsquelle abgeklemmt ist. Es fließt der "Kurzschlußstrom"  $I(t)$ . Es stellt sich die Frage, wie lange der Strom braucht, um von  $I_0$  auf  $I = 0$  zu fallen. Wir wenden die Kirchhoffsche Maschenregel (Gleichung 7.52) an. Über  $L$  wird die Spannung  $U_i$  induziert:

$$U_i = -L\dot{I}(t)$$

Die Gesamtspannung im Kreis muß Null ergeben:

$$\begin{aligned} U_i &= -L\dot{I}(t) = RI(t) \\ \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}I(t) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Wir erhalten also eine Differentialgleichung. In ihr sind der Strom  $I(t)$  und seine zeitliche Ableitung  $\frac{dI(t)}{dt}$  verknüpft. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.30)$$

Dies überprüft man durch Einsetzen in die DGL. Dabei sind

- $I_0 = I(t = 0)$
- $\tau = \frac{L}{R}$  eine "Zeitkonstante", die angibt, nach welcher Zeit  $t = \tau$  der Kurzschlußstrom  $I(t)$  auf den Wert  $I_0 \cdot \frac{1}{e}$  abgefallen ist.

2. Einschaltvorgang:

Wir untersuchen, was passiert, wenn in den kurzgeschlossenen Stromkreis eine Spannungsquelle eingefügt wird, d.h. Umlegen des Schalters. Der Strom  $I(t)$  muß vom Wert  $I = 0$  auf einen Endwert anwachsen. Dabei baut sich in der Induktivität ein Magnetfeld auf. Wir erhalten nun aus der Spannungsbilanz

$$\begin{aligned} U_0 + U_i &= RI(t) \\ \Rightarrow U_0 - L\dot{I}(t) &= RI(t) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Auch hier handelt es sich um eine Differentialgleichung für  $I$ , deren Lösung diesmal lautet

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (8.32)$$

Die Überprüfung erfolgt wiederum durch das Einsetzen in die Differentialgleichung.  $I_0 = \frac{U_0}{R}$  wäre der Strom sofort nach dem Anschalten, wenn die Induktivität  $L = 0$  wäre.

**Zahlenbeispiel:**

Seien  $L = 0,2H$  und  $R = 10\Omega$ . Für  $\tau = \frac{L}{R}$  erhält man also

$$\tau = \frac{0,2H}{10\Omega} = 0,02s = 2 \cdot 10^{-2}s$$

**Periodische Rechteckimpulse an ein RL-Glied:** Wir stellen uns vor, daß wir den Schalter periodisch umlegen. Dieses entspricht den Rechteck-Spannungs-Impulsen eines Impulsgenerators. Wir betrachten den Spannungsverlauf  $U_R(t)$  am ohmschen Widerstand  $R$ . Damit das an  $R$  abgegriffene Signal noch einigermaßen wie ein Rechteckimpuls aussieht, muß die Pulsdauer  $T \gg \tau = \frac{L}{R}$  sein.

**RL-Tiefpaß:**

Mit dem RL-Glied können längere Impulse übertragen werden, da die Bedingung

$$T \gg \tau$$

erfüllt ist. Für kurze Impulse, d.h. höhere Frequenz, ist dies nicht mehr der Fall. Daher kommt der Name Tiefpaß.

**8.4.2 Induktivitäten in Wechselstromkreisen**

Wir betrachten folgende Schaltung mit

- Wechselspannungsquelle  $U_{\sim}$
- Induktivität  $L$

Wir interessieren uns für den Zusammenhang zwischen  $U_L(t)$  und dem Strom  $I_{\sim}$  im Kreis. Insbesondere betrachten wir, was passiert, wenn wir einen Wechselstrom

$$I_{\sim}(t) = I_0 \sin \omega t$$

fließen lassen. Dabei sind sowohl die Amplitude als auch die Phasenlage von  $U_L(t)$  von Interesse.

**Wechselstromwiderstand eines Bauteils mit der Induktivität L:**

Der Zusammenhang zwischen dem fließenden Strom und der induzierten Spannung lautet

$$U_i(t) = -L\dot{I}(t)$$

Wir lassen ein Wechselstrom  $I(t)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  fließen:

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

Damit ergibt sich für die induzierte Spannung

$$\begin{aligned} U_i &= -LI_0\omega \cos \omega t \\ &= \omega LI_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Die Spannung eilt dem Strom also um eine Viertelperiode vor. Sie ist um  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  gegenüber dem Strom phasenverschoben.

**Definition 8.33:** Induktiver Widerstand

Der induktive Widerstand  $R_L$  eines Bauteils mit der Induktivität  $L$  errechnet sich zu

$$R_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega L \quad (8.33)$$

An  $L$  wird im Zeitmittel keine Leistung  $P$  umgesetzt, denn

$$\begin{aligned} P_{\sim}(t) &= U_L(t) \cdot I_{\sim}(t) \\ \Rightarrow P_{\sim}(t) &= \omega L I_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, daß der zeitliche Mittelwert von  $P$  Null sein muß, denn sowohl der Cosinus als auch der Sinus ergeben bei der Mittelung über eine Periode Null.

**8.4.3 Auf- und Entladen von Kapazitäten**

Wir untersuchen jetzt noch den Fall, daß die Induktivität  $L$  durch eine Kapazität  $C$  ersetzt wird (s. Abbildung 8.2).

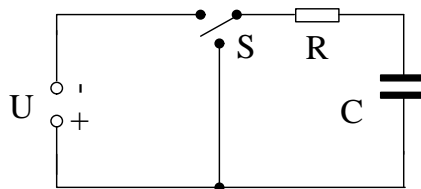


Abbildung 8.2: Stromkreis mit Kapazität und Widerstand

## 1. Entladevorgang:

Der aufgeladene Kondensator kann sich über den Widerstand entladen. Dabei wurde der Schalter so umgestellt, daß die Stromquelle sich nicht im Kreis befindet. Es gilt nach der Kirchhoffschen Maschenregel

$$U_R(t) + U_C(t) = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Somit folgt als Differentialgleichung

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (8.34)$$

Dabei wurde die Definition des Stromes als  $I = \frac{dQ}{dt}$  verwendet. Teilt man nun durch  $R$ , so ergibt sich

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = 0$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Lösung lautet

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Nach  $\tau$  ist die Ladung  $Q(t)$  auf der Kapazität  $C$  auf  $\frac{1}{e}Q_0$  abgefallen, wobei  $Q_0 = Q(t=0)$  ist. Die Spannung  $U_C(t)$  ergibt sich mit  $C = \frac{Q(t)}{U_C(t)}$  zu

$$U_C(t) = U(t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.35)$$

## 2. Aufladevorgang:

In diesem Fall wurde der Schalter so gestellt, daß sich die Gleichstromquelle innerhalb des Stromkreises befindet. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt nun wiederum

$$U_0 = U_C(t) + U_R(t)$$

Dabei wird für  $t=0$  mit der Aufladung begonnen. Für  $t=0$  ist  $U_C(t=0) = 0$ , d.h. die Kapazität ist nicht aufgeladen. Mit  $U_C = \frac{1}{C}Q(t)$  und  $U_R = RI(t) = R\frac{dQ}{dt}$  ergibt sich

$$\frac{1}{C}Q(t) + R\frac{dQ}{dt} = U_0 \quad (8.36)$$

Auch dies ist wieder eine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung. Ihre Lösung lautet diesmal

$$Q(t) = U_0C \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (8.37)$$

Nach  $t = \tau$  ist  $C$  auf ca.  $\frac{2}{3}$  des Maximalwertes  $Q_{max} = U_0C$  aufgeladen.

### Zahlenbeispiel:

Seien  $R = 2k\Omega$  und  $C = 2500\mu F$ . Dann ist

$$\tau = RC = (2 \cdot 10^3\Omega) \cdot (2,5 \cdot 10^{-3}F) = 5s$$

### Periodische Rechteckimpulse an ein RC-Glied:

Es werden periodische Rechteck-Impulse eines Impulsgenerators an ein RC-Glied gegeben. Dabei wird im ersten Fall die Spannung über dem Kondensator abgegriffen, im zweiten Fall über dem ohmschen Widerstand.

#### 1. Abgriff von $U_C$ :

$U_C$  steigt exponentiell an. Damit der Impuls einigermaßen formgetreu übertragen wird, muß für die Periodendauer  $T$  gelten:

$$T \gg \tau = RC$$

d.h. die Schaltung arbeitet als Tiefpaß, weil nur niedrige Frequenzen "übertragen" werden.

#### 2. Abgriff von $U_R$ :

Beim Einschalten liegt zunächst  $U_0$  vollständig an  $R$ . Beim Ausschalten muß  $U_R$  die Spannung  $U_C$  kompensieren, d.h. an  $R$  fällt  $-U_C$  ab. Folglich werden die Pulse an  $R$  nur übertragen, wenn sie kurz sind, d.h.

$$T \ll \tau = RC$$

In diesem Fall werden also nur die hohen Frequenzen einigermaßen formgetreu übertragen, d.h. die Schaltung arbeitet als Hochpaß.



### 8.4.4 Kapazitäten in Wechselstromkreisen

Wir diskutieren einen Stromkreis bestehend aus einer Wechselstromquelle  $U_{sim}$  und einer Kapazität  $C$ . Es interessiert uns der Zusammenhang zwischen der angelegten Wechselspannung  $U_{\sim}(t)$  und dem dadurch hervorgerufenen Lade- bzw. Entladestrom  $I_{\sim}(t)$ . Es sei z.B.

$$U_{\sim}(t) = U_0 \sin \omega t$$

und mit  $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$  erhalten wir zunächst  $Q(t)$ , die momentane Ladung auf dem Kondensator. Durch Differentiation nach der Zeit erhält man also

$$\dot{Q}(t) = C \dot{U}_C(t)$$

und wegen

$$\dot{Q}(t) = I_{\sim}(t)$$

somit den gesuchten Strom  $I_{\sim}(t)$ . Setzt man nun für  $U_C(t) = +U_{\sim}(t)$  ein, so ergibt sich

$$I_{\sim}(t) = C U_0 \omega \cos \omega t = C U_0 \omega \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

d.h. der Strom und die Spannung sind auch hier um  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  phasenverschoben. Allerdings eilt hier die Spannung, im Gegensatz zur Induktivität, dem Strom um eine Viertelperiode hinterher.

**Definition 8.38:** Kapazitiver Widerstand

Der kapazitive Widerstand  $R_C$  ist definiert als das Verhältnis der Amplituden von  $U_{\sim}$  und  $I_{\sim}$

$$R_C = \frac{U_{\sim,0}}{I_{\sim,0}} = \frac{U_0}{U_0 \omega C} = \frac{1}{\omega C} \quad (8.38)$$

Der kapazitive Widerstand  $R_C$  ist wieder ein Blindwiderstand, d.h. im Zeitmittel wird an  $R_C$  keine Leistung umgesetzt. Die Arbeit, die zum Aufladen von  $C$  hineingesteckt wird, gewinnt man beim Entladen zurück:

$$\bar{P} \equiv 0.$$

Dabei muß mindestens über die Zeitdauer gemittelt werden, die einem kompletten Auf- und Entladevorgang entspricht.

## 8.5 Maxwell'sche Gleichungen

Wir verallgemeinern das Ampere'sche Durchflutungsgesetz (vgl. Gleichung 7.63). Es besagt zunächst, daß jeder Strom von geschlossenen Feldlinien umgeben ist. Dies gilt auch für den Ladestrom, der beim Aufladen eines Kondensators fließt. Nicht geklärt ist jedoch, was zwischen den Kondensatorplatten passiert. Dort fließt ja kein Leitungsstrom  $I$ . Leitungsströme sind nicht die einzige Ursache für  $\vec{H}/\vec{B}$ -Felder. Wir werden sehen, daß jedes zeitlich veränderliche elektrische  $\vec{E}$ -Feld mit einem zeitlich veränderlichen  $\vec{B}$ -Feld verknüpft ist. Wir betrachten also einen Kondensator. Dieser sei mit Materie der Dielektrizitätszahl  $\varepsilon$  gefüllt. Beim Aufladen fließen Ladungen auf die Platten, d.h.  $dQ$  ist die Ladung, die in  $dt$  auf den Kondensator fließt (vergleiche Definition des Stromes). Wir drücken nun das elektrische Feld  $\vec{E}$ , welches durch

die auf die Platten fließenden Ladungen im Kondensator entsteht, durch das Gaußsche Gesetz aus:

$$Q = \varepsilon\varepsilon_0 \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \psi \quad (8.39)$$

Dabei sind  $\psi$  der elektrische Fluß,  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$  die dielektrische Verschiebungsdichte und  $(S)$  die Hüllfläche einer Kondensatorplatte. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \\ \Rightarrow I &= \frac{d}{dt} \left( \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \end{aligned}$$

Dabei ist  $(S)$  wieder eine geschlossene Fläche, die eine Kondensatorplatte einschließt.

**Spezialfall:** Plattenkondensator

Hier gilt

$$\left( \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) = DA = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot A \quad (8.40)$$

mit  $A$  der Kondensatorfläche und  $E$  dem Betrag des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten. Folglich gilt für das Innere des Kondensators:

$$I = \varepsilon\varepsilon_0 A \frac{d}{dt} |\vec{E}| \quad (8.41)$$

Jedes sich ändernde elektrische Feld  $\vec{E}(t)$  "entspricht" also einem Strom und muß gleichwertig zu den Leitungsströmen berücksichtigt werden. Dies macht plausibel, daß man ergänzend schreiben muß:

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \oint_{(S)} \vec{D}(t) \cdot d\vec{A} \quad (8.42)$$

Insbesondere gilt als Antwort auf unsere ursprüngliche Frage, daß ein  $\vec{H}$ -Feld um die Kondensatorplatten existiert, solange sich  $\vec{E}$  ändert, d.h. solange ein Ladungsstrom fließt.

Auch wenn wir das Dielektrikum entfernen, besteht zwischen den Platten ein zeitlich veränderliches  $\vec{E}$ -Feld, und zwar wiederum solange sich die Flächenladungsdichte auf den Platten ändert.

**Begründung der 1. Maxwell'schen Gleichung:**

- Wir bestimmen die Leitungsströme durch  $A$ . Ihre Summe sei  $I$ .
- Dazu zählen wir den "Strombeitrag", der vom veränderlichen  $\vec{E}$ -Feld kommt, das  $A$  durchsetzt:

$$\frac{d}{dt} \oint_{(S)} \vec{D}(t) \cdot d\vec{A}$$

- Die Summe

$$I + \frac{d}{dt} \oint_{(S)} \vec{D}(t) \cdot d\vec{A}$$

liefert dann

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s}.$$

Das Ergebnis ist schließlich die

**1.Maxwellsche Gleichung**

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \oint_{(S)} \vec{D}(t) \cdot d\vec{A} \quad (8.43)$$

Das Linienintegral  $\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s}$  ist längs der Randkurve ( $K$ ) von  $A$  zu berechnen. Der Fall  $I = 0$ , d.h. keine Leitungsströme, ist für die drahtlose Übertragung elektromagnetischer Energie verantwortlich (Telekommunikation).

Wir können noch statt  $I$  die Stromdichte  $\vec{j}$  einführen und erhalten dann

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_{(S)} \left( \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right)$$

Wir kommen nun zur 2.Maxwellschen Gleichung. Wir geben uns eine Fläche  $A_i$  vor. Durch diese greift ein magnetischer Fluß

$$\Phi = \oint_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Die Fläche  $A_i$  wird von einer Randkurve ( $K$ ) begrenzt. Das Induktionsgesetz besagt, daß sich an den Enden einer Leiterschleife, die durch die Randkurve ( $K$ ) gegeben ist, die Induktionsspannung

$$U_i = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} \left( \oint_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

abgreifen läßt.

Wir wollen dies verallgemeinern und drücken  $U_i$  durch das Feld  $\vec{E}$  aus, welches die Ladungen im Leiter verschiebt:

$$U_i = \oint_{(K)} \vec{E}(t) \cdot d\vec{s}$$

Für die Existenz von  $\vec{E}$  ist das Vorhandensein des Leiters unwesentlich. Durch ihn wird über die Messung von  $U_i$  lediglich die Existenz von  $\vec{E}$  sichtbar gemacht. Hier gilt die

**2.Maxwellsche Gleichung**

$$\oint_{(K)} \vec{E}(t) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left( \oint_{(A_i)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \quad (8.44)$$

Dabei ist ( $K$ ) die die Fläche  $A_i$  begrenzende Randkurve.

**Physikalischer Inhalt der 2.Maxwell'schen Gleichung:**

Ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$ -Feld ist mit einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  verknüpft. Ob ein Leiter vorhanden ist, spielt dabei keine Rolle. Eine direkte und überzeugende Demonstration ist das Betatron. Durch ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$ -Feld werden die Elektronen beschleunigt und auf einer Kreisbahn gehalten. Die Feldlinien beginnen nicht bei den Ladungen, sondern sind in sich geschlossen.

Eine weitere Maxwellsche Gleichung ist die

**3. Maxwellsche Gleichung**

$$\oint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sum_i Q_i \quad (8.45)$$

Diese Gleichung liefert die Ladungsmenge, die in dem von  $A$  umschlossenen Volumen enthalten ist. Es folgt die letzte der Maxwellschen Gleichungen, die

**4. Maxwell'sche Gleichung**

$$\oint_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (8.46)$$

Diese Gleichung besagt, daß es keine magnetischen Ladungen gibt, d.h. magnetische Feldlinien sind immer geschlossen. Zu diesen Gleichungen kommen dann noch die sogenannten Materialgleichungen:

- $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$
- $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

**Elektrische Kraft und Lorentz-Kraft:**

Die Verknüpfung zwischen den elektrischen und magnetischen Feldgrößen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  und der Kraft  $\vec{F}$  auf eine Einzelladung  $q$  lautet

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right)$$

mit  $\vec{v}$  der Geschwindigkeit der Einzelladung.

# Kapitel 9

## Schwingungen

### 9.1 Einleitung

Wir betrachten Bewegungen, die periodisch sind. Beispiele, die wir schon kennen, sind

- Federpendel
- Fadenpendel
- Drehpendel

Gemeinsam ist für alle Systeme, daß sich der Zustand  $\psi(t)$  (Auslenkung, Verdrillungswinkel u.ä.) periodisch mit der Zeit ändert.

**Definition 9.1:** Periodische Bewegung

*Eine periodische Bewegung ist ein Vorgang, der sich räumlich oder zeitlich betrachtet wiederholt.*

**Beispiel:** Pendelausschlag  $x(t)$

Es ist  $x(t + T) = x(t)$  für eine periodische Bewegung.

**Definition 9.2:** Schwingungsdauer oder auch Periode

*Eine Größe  $x(t)$  nimmt nach der Schwingungsdauer (Periode)  $T$  wieder ihren ursprünglichen Wert an.*

**Definition 9.3:** Frequenz

*Die Frequenz eines periodischen Vorgangs ist definiert als*

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{9.3}$$

Die Einheit der Frequenz ist  $s^{-1} = \text{Hertz}$ .

Wir werden nun in Kapitel 9 die Schwingungen, in Kapitel ?? dann die Wellen betrachten.

**Definition 9.4:** Schwingungen

*Bei Schwingungen pendelt die Energie periodisch zwischen zwei Energiespeichern hin und her.*

**Beispiele:**

1. Federpendel:

Die mechanische Energie pendelt zwischen Spannungsenergie (potentieller Energie) und kinetischer Energie einer sich periodisch bewegenden Masse hin und her.

2. Fadenpendel:  
Periodischer Austausch zwischen Lageenergie und kinetischer Energie einer Masse.
3. E-Lehre:  
Die elektrische Energie ist in Form eines elektrischen Feldes in einem Kondensator gespeichert (Energiespeicher I). Die magnetische Energie ist analog in Form eines magnetischen Feldes in einer Spule gespeichert (Energiespeicher II).

Ein Teil der vorhandenen Energie wird beim Pendeln auch wieder in Wärme umgesetzt. Deswegen kommt ein Pendel auch wieder zur Ruhe.

**Definition 9.5:** Wellen

*Werden von dem Energieaustausch viele gekoppelte Elemente erfaßt, so treten Wellen auf.*

## 9.2 Freie Schwingungen: Harmonischer Oszillator

### 9.2.1 Federpendel

Es stellt sich die Frage, wie es beim Federpendel zum periodischen Austausch zwischen zwei Energiespeichern kommt.

1. Stauchung/Dehnung der zwei Federn:  
Eine bestimmte Menge Spannungsenergie wird in das System "hineingepackt".
2. Die gespeicherte (potentielle) Energie wird nach dem Loslassen der Masse in kinetische Energie umgesetzt.
3. Da die beschleunigte Masse Trägheit besitzt, beginnt sich die Feder wieder zu stauchen (dehnen).

Damit hat man einen Zyklus periodischer Umsetzung zwischen Spannungs- und kinetischer Energie. Wir wollen nun die Bewegungsgleichung für ein Federpendel aufstellen. Die Gleichgewichtslage vor dem ersten Auslenken sei  $x = 0$  für  $t < 0$ . Nach dem Auslenken der Masse befinde sich diese bei  $x(t = 0) = x_0$ . Diese Situation heiße Anfangszustand. Aus der Grundgleichung der Dynamik folgt, daß eine Masse  $m$  an der Feder nach dem Loslassen zur Zeit  $t$  eine rücktreibende Beschleunigung

$$a = \ddot{x}(t),$$

erfährt. Damit ergibt sich

$$F_r(t) = m\ddot{x}(t),$$

wobei die rücktreibende Kraft  $F_r$  von zwei Federn mit identischer Federkonstante  $\frac{D}{2}$ ) herrührt:

$$F_r(t) = -\frac{D}{2}x(t) - \frac{D}{2}x(t),$$

d.h. die eine Feder zieht, die andere schiebt:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) \tag{9.6}$$

Hieraus folgt die sogenannte

**Schwingungsgleichung für ein Federpendel**

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t) \quad (9.7)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Auslenkung  $x(t)$ . Die gesuchte Lösung  $x(t)$  muß so beschaffen sein, daß sie sich nach 2-maligem Ableiten bis auf einen Faktor  $-\frac{D}{m}$  reproduziert.

**Lösung der Schwingungsgleichung:**

Man macht einen Lösungsansatz

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (9.8)$$

mit  $\omega$  der Kreisfrequenz. Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

wobei  $\nu$  die Frequenz ist. Durch Einsetzen erhält man mit

$$\ddot{x}(t) = -x_0\omega^2 \cos \omega t$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_0 &= -x_0 \frac{D}{m} \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{D}{m} \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (9.10)$$

**Beachte:**

Die Kreisfrequenz  $\omega$  hängt nicht von der Schwingungsamplitude  $x_0$  und auch nicht von der Anfangsphase ab.

**Definition 9.11:** Harmonischer Oszillator

*Ein schwingungsfähiges System, welches eine sinusförmige Schwingung ausführt, heißt harmonischer Oszillator.*

Die Voraussetzung dafür ist, wie wir gerade gelernt haben, ein lineares Kraftgesetz (vgl. Gleichung 9.6):

$$F_r(x) = -Dx,$$

d.h. die rücktreibende Kraft muß proportional mit der Auslenkung  $x(t)$  anwachsen. Die Schwingungsdauer  $T$ , nach der sich der Bewegungsvorgang wiederholt, ist offenbar

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}},$$

d.h. die Frequenz  $\nu$  ist

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

**Energiebilanz:**

Die momentan zur Zeit  $t$  vorhandene Spannungsenergie ist

$$W_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2(t) \quad (9.12)$$

Die momentan vorhandene kinetische Energie beträgt

$$W_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \quad (9.13)$$

Verwendet man den Lösungsansatz

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

und erhält danach für die Ableitung

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega \sin \omega t$$

mit  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ , so erhält man für die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} W_{ges} &= W_{pot}^{(t)} + W_{kin}^{(t)} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{D}{2}x^2(t) \\ &= \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{D}{2}x_0^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}mx_0^2\frac{D}{m} \sin^2 \omega t + \frac{D}{2}x_0^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}Dx_0^2 \end{aligned}$$

= const. Die Gesamtenergie ist also unabhängig von  $t$  eine konstante Größe des Systems, obwohl die potentielle Energie  $W_{pot}(t)$  und die kinetische Energie  $W_{kin}(t)$  für sich jede von  $t$  abhängen.

**9.2.2 Drehpendel**

Die Auslenkung eines drehbaren Körpers um einen Drehwinkel  $\varphi$  soll ein rücktreibendes Drehmoment  $\vec{M}(\varphi)$  hervorrufen. Nach dem Loslassen erfährt der Körper eine Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$ , die zu einer Zunahme seines Drehimpulses  $L(t)$  führt.

**Aufstellung der Bewegungsgleichung:**

Sei  $I$  das Trägheitsmoment des Körpers; dann ist

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (9.14)$$

wobei  $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist. Die Grundgleichung der Dynamik lautet

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (9.15)$$

Für das Moment  $\vec{M}$  setzen wir an, daß

$$|\vec{M}(\varphi)| = -D_\varphi\varphi(t)$$

ist. Alle Vektoren haben die Richtung der Drehachse. Im folgenden schreiben wir nur die Komponente längs dieser Richtung auf.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= I\frac{d\omega}{dt} = -D_\varphi\varphi(t) \\ \Rightarrow I\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -D_\varphi\varphi(t) \end{aligned} \quad (9.16)$$



Die Gleichung ?? ist formal die gleiche Differentialgleichung, wie bei der Federschwingung. Nur werden einige Größen der linearen Bewegung durch Größen der Kreisbewegung ersetzt:

- $I \leftrightarrow m$
- $\varphi \leftrightarrow x$
- $D_\varphi \leftrightarrow D$

Die Frequenz  $\nu$  der Drehschwingung ist

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{D_\varphi}{I} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und die Schwingungsdauer  $T$  somit

$$T = 2\pi \left( \frac{I}{D_\varphi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Beliebte konkrete Fälle:

1. Torsionspendel:

Hier ist  $I = 2mr^2$ .

2. Physikalisches Pendel:

Hier fällt der Drehpunkt  $A$  nicht mit dem Schwerpunkt  $S$  zusammen. Das rücktreibende Moment  $|\vec{M}|$  wird durch die in  $S$  vereinigt gedachte Gesamtmasse  $m$  hervorgerufen, wobei das Moment

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

mit der Schwerkraft  $m \cdot \vec{g}$  zu berechnen ist. Dabei ist  $\vec{r}$  der Vektor von  $A$  nach  $S$  mit der Länge  $l$  und  $\varphi$  der Winkel zur Vertikalen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= lmg \cdot \sin \varphi(t) \\ &\approx lmg\varphi(t) \quad (\text{für kleine Winkel } \varphi(t)) \end{aligned}$$

### 9.2.3 Schwingkreis: elektromagnetische Schwingungen

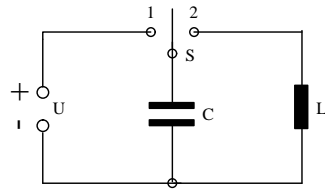
Wir wissen bereits, daß ein Kondensator ein Speicher für elektrische Energie in Form eines elektrischen Feldes zwischen den Platten ist. Eine Induktivität dagegen ist ein Speicher für magnetische Energie in Form eines magnetischen Feldes z.B. um eine stromdurchflossene Spule. Die folgende Anordnung gestattet einfach die periodische Umwandlung der beiden Energien ineinander:

#### 1. Schritt:

Der Kondensator wird mit dem Schalter in Pos.1 aufgeladen.

#### 2. Schritt:

Der Schalter wird in Position 2 umgelegt. Dadurch entlädt sich der Kondensator über die Spule. In dieser stromdurchflossenen Spule baut sich ein Magnetfeld auf. Wenn der Kondensator ganz entladen ist, hört der Strom nicht gleich auf, weil das zusammenbrechende Magnetfeld



Induktivität

Kondensator

Erdung

Abbildung 9.1: LC-Kreis

den Strom weiter durch die Spule treibt. Der Kondensator beginnt sich folglich in umgekehrter Richtung aufzuladen usw. Infolgedessen gibt es Ladungsschwingungen im LC-Kreis.

### Aufstellung der Schwingungsgleichung:

Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf den Kreis mit dem Schalter in Position 2 an. Die momentanen Spannungen an  $C$  und  $L$  sind

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{und} \quad U_L(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}.$$

Wir bilden nach der Kirchhoffschen Maschenregel:  $U_C(t) + U_L(t) = 0$ . Dies lässt sich durch Einsetzen von  $U_C$  und  $U_L$  schreiben als:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (9.17)$$

Wir verwenden den Zusammenhang  $\frac{dQ}{dt} = I(t)$  *unterhalten nach dem Ableiten der obigen Gleichung* :to

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} I(t) + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

### Schwingungsgleichung für den LC-Kreis

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot I(t) = 0 \quad (9.19)$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung lautet analog den mechanischen Schwingungen:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.20)$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wurde der Schalter umgelegt. Es gilt  $Q(t = 0) = Q_0$ , denn der Kondensator war auf  $Q_0$  aufgeladen. Es gilt also für die Ladung

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$$

und damit für den Strom, der die zeitliche Ableitung der Ladung ist:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin \omega t$$

Somit ist also  $I_0 = -\omega Q_0$  und  $\varphi = \pi$ . Die Kreisfrequenz des Schwingkreises ist  $\omega = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}$  und daher gilt für die Schwingungsdauer die

**Thompson-Gleichung**

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (9.21)$$

## 9.3 Gedämpfte freie Schwingung

### 9.3.1 Mechanische gedämpfte Schwingung

Wir nehmen jetzt an, daß ein Teil der Energie in den beiden Energiespeichern  $W_1$  und  $W_2$  in Wärme umgesetzt wird. Es gilt immer noch

$$W_{ges}(t) = W_1(t) + W_2(t).$$

Dabei  $W_{ges}$  die gesamte Energie, die sich in den beiden Speichern befindet. Allerdings nimmt  $W_{ges}$  jetzt im LAufe der Zeit ab. Wir betrachten speziell

$$W_{ges}(t) = W_0 \exp(-2\delta t).$$

Auch für die Energieinhalte der einzelnen Speicher gilt, daß sie gemittelt über die Schwingung, die durch den Energieaustausch zwischen (1) und (2) herrührt, abnehmen:

$$\overline{W_1(t)} \sim \exp(-2\delta t)$$

$$\overline{W_2(t)} \sim \exp(-2\delta t)$$

Der Hochstrich bezeichnet die Mittelung über mindestens eine Schwingungsperiode.

**Ansatz:**

Wir vermuten, daß folgender Ansatz die Gegebenheiten richtig beschreibt:

$$\psi(t) = \psi_0 \exp(-2\delta t) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Um diese Vermutung zu überprüfen, stellen wir die Bewegungsgleichung für eine Masse, die sich unter dem Einfluß einer elastischen rücktreibenden Kraft und einer Reibungskraft befindet, auf. Es muß gelten, daß die Summe aus Trägheitskraft, Federkraft und Reibungskraft Null ist:

$$F_t + F_D + F_r = 0$$

Für die einzelnen Kräfte gilt:

- Federkraft:

$$F_D = D\psi(t)$$

- Trägheitskraft:

$$F_t = m\ddot{\psi}(t)$$

- Reibungskraft:

$$F_r = 2\delta \cdot m \cdot \dot{\psi}(t),$$

d.h. die Reibung wird proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{\psi}(t)$  angesetzt. Siehe hierzu auch *Stokes-Reibung* (Fall einer Kugel im reibenden Medium).

Es ergibt sich also

$$m\ddot{\psi}(t) + D\psi(t) + 2\delta m\dot{\psi}(t) = 0$$

und somit als Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\psi}(t) + 2\delta\dot{\psi}(t) + \omega_0^2\psi(t) = 0,$$

wobei  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$  ist.

**Lösung:**

Lösung dieser Differentialgleichung ist in der Tat

$$\psi(t) = \psi_0 \exp(-\delta t) \sin(\omega t + \varphi),$$

sofern für  $\omega$  gilt:

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\delta < \omega \text{ (Bedingung für das Zustandekommen einer Schwingung)}$$

bleibt.

Die Parameter  $\psi_0$  und  $\varphi$  heißen *Anfangswerte* und hängen von den Anregungsbedingungen ab.

**Mittlerer Energieinhalt der beiden Speicher:**

Gemittelt über mindestens eine Schwingungsperiode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ergibt sich der Energieinhalt der beiden Speicher zu

$$\overline{W_1(t)} = \frac{m}{2} \dot{\psi}^2(t) = \frac{m}{2} \omega^2 \psi_0^2 \cdot \exp -2\delta t \frac{1}{2}$$

$$\overline{W_2(t)} = \frac{D}{2} \psi^2(t) = \frac{D}{2} \psi_0^2 \exp(-2\delta t) \frac{1}{2}$$

und der Gesamtenergiegehalt zu

$$W_{ges} = \frac{1}{2} D \psi_0^2 \exp(-2\delta t)$$

**Diskussion:**

Wir bilden das Verhältnis der mechanischen Energien, die nach zwei aufeinanderfolgenden Extremwerten gleicher Orientierung von  $x(t)$  noch vorhanden sind:

$$\frac{W_{ges}(t = T)}{W_{ges}(t = 2T)} = \frac{e^{-2\delta T}}{e^{-2\delta 2T}} = e^{2\delta T},$$

d.h. das Verhältnis hat für je zwei beliebige Extrema immer denselben Wert.

$$\Rightarrow \lg \left( \frac{W_{ges}(T)}{W_{ges}(2T)} \right) = \lg e^{2\delta T}$$

Dieser Logarithmus ist proportional zur Dämpfung  $\delta$  der Schwingung.

**Definition:**

Der Ausdruck

$$10 \lg \left( \frac{W_{ges}(T)}{W_{ges}(2T)} \right)$$

heißt *Regelmaß*.

Diese Größe wird in dB, d.h. Dezibel, angegeben.

**Beispiele:**

$\frac{W(T)}{W(2T)}$	1	10	100	1000
dB	0	10	20	30

**Definition:**

Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden beträgt

$$\frac{x_i^{max}}{x_{i+1}^{max}} = e^{\delta T}.$$

Den Exponenten der Exponentialfunktion, d.h.

$$\ln(e^{\delta T}) = \delta T,$$

nennt man das *logarithmische Dekrement*.

**Definition:**

Der *Gütefaktor*  $Q$  ist definiert als

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Gesamtenergie}}{\text{Energieverlust in einer Periode}}$$

### 9.3.2 Gedämpfter Schwingkreis

Wir gehen vom Schwingkreis (LC-Kombination) aus. Dieser lieferte ungedämpfte elektrische Schwingungen. Jetzt fügen wir einen ohmschen Widerstand  $R$  in den Kreis ein. Dies zeigt folgendes Schaltbild:

Wir laden  $C$  wieder über einen Schalter in Pos.1 auf. Danach legen wir den Schalter in Pos.2 um. Der Kondensator entlädt sich über  $L$  und  $R$ . Dabei wird ein Teil der Energie in  $R$  in Stromwärme umgesetzt, d.h.  $R$  wird heiß.

**Aufstellung der Schwingungsgleichung:**

Analoges Vorgehen wie beim Schwingkreis liefert

$$\begin{aligned} U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) &= 0 \\ \Rightarrow L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) &= 0 \end{aligned}$$

Wir leiten einmal nach der Zeit  $t$  ab und erhalten

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$$

**Ansatz:**

$$I(t) = I_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Dabei sind  $I_0$  und  $\varphi$  durch die vorgegebenen "Anfangsbedingungen" festgelegt, z.B. zu welchem Zeitpunkt der Schalter  $S$  umgelegt wird.

Das Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung für  $I(t)$  liefert

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ und } \delta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2.$$

**Diskussion:**

Es können drei von ihrer Natur her verschiedene Fälle auftreten:

1. Schwingfall, d.h.  $\omega_0 > \delta$ .
2. Kriechfall, d.h.  $\omega_0 < \delta$ .
3. Aperiodischer Grenzfall, d.h.  $\omega_0 = \delta$ .

**Schwingfall:**

Dieser ist bereits ausführlich diskutiert worden.

**Kriechfall:**

In diesem Fall ist

$$\omega_0 < \delta$$

oder für den elektrischen Schwingkreis

$$R^2 > \frac{4L}{C}.$$

Dabei bewegt sich die ausgelenkte Masse, Ladung etc. langsam exponentiell abfallend auf die Gleichgewichtslage zu, *ohne* sie einmal zu durchqueren (daher der Name "Kriechfall"). Der Bewegungsablauf im Kriechfall ist eine Überlagerung von zwei Exponentialfunktionen.

**Aperiodischer Grenzfall:**

Man kann den Energieverlust so steuern, daß keine gedämpfte Schwingung mehr stattfinden kann, der Kriechfall aber gerade erst beginnt. Dies ist der Fall für

$$\omega_0 = \delta \text{ d.h. } \omega = 0$$

Für den elektrischen Schwingkreis also

$$R^2 = \frac{4L}{C}.$$

In diesem Fall erreicht das System (Masse, Ladung o.ä.) am schnellsten von allen RCL-Kombinationen "praktisch" den Ruhezustand.

## 9.4 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

### 9.4.1 Erzwungene mechanische Schwingungen

**Definition:**

Ein schwingungsfähiges System führt unter dem Einfluß einer äußeren periodischen Kraft  $\vec{F}(t)$  *erzwungene Schwingungen* aus.

**Wichtiger Spezialfall:**

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

**Beispiel:**

Pohl'sches Rad

**Einschwingvorgang:**

Wird die äußere periodische Kraft angeschaltet, so zeigt das schwingungsfähige System komplizierte Bewegungsformen, die mit der Zeit aber abklingen. Die Zeit zwischen dem Einschalten der Kraft und dem Zeitpunkt, an dem die obengenannten Bewegungsformen nicht mehr zu sehen sind, nennt man *Einschwingvorgang*

**Stationärer Zustand:** Nach dem Einschwingvorgang bewegt sich das System mit der Frequenz der erregenden Kraft. Dieses bezeichnet man als *stationären Zustand*.

**Charakterisierung des stationären Zustandes:**

- Sehr kleine Kreisfrequenz  $\omega$ :  
Schwinger und Erregerkraft sind "im Takt", schwingen also in Phase:

$$x(t) = x_0(\omega) \cos \omega t$$

Die Amplitude  $x_0$  ist klein für alle  $\omega$  in diesem Bereich.

- $\omega \approx \omega_0$ :  
Die Phasenverschiebung beträgt  $90^\circ$  oder auch  $\frac{\pi}{2}$ .  
Die Amplitude  $x_0$  ist sehr groß.

$$\Rightarrow x(t) \cong x_0(\omega_0) \sin \omega_0 t$$

Die Schwingungsphase hinkt hinter der Erregerkraft hinterher.

**Definition:**

Wenn unter dem Einfluß einer Erregerkraft die Amplitude eines schwingungsfähigen Systems sehr groß wird, dann liegt *Resonanz* vor.

- Große Kreisfrequenz  $\omega \gg \omega_0$ :  
Die Amplitude  $x_0$  ist wieder sehr klein.  
Die Phasenverschiebung beträgt ungefähr  $180^\circ$  oder auch  $\pi$ .

$$\Rightarrow x(t) = -x_0(\omega) \cos \omega t$$

Dies bedeutet, daß sich das schwingungsfähige System der erregenden Kraft entgegen bewegt.

**Resonanzkurve:**

Eine *Resonanzkurve* ist die Auftragung der Amplitude  $x_0(\omega)$  gegen die Kreisfrequenz der erregenden Kraft, d.h.  $\omega$ . Diese Kurve zeigt ein ziemlich steiles Maximum (Peak) für  $\omega = \omega_0$ , d.h. wenn die Erregerfrequenz der Eigenfrequenz des Systems entspricht. Außerhalb dieses Peaks fällt die Amplitude schnell auf relativ kleine Werte ab.

**Phasendiagramm:**

In diesem Diagramm wird die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen der Erregerphase und der Schwin- gerphase gegen die Kreisfrequenz  $\omega$  aufgetragen.

Dabei steigt  $\varphi(\omega)$  von Null über  $90^\circ$  ( $= \frac{\pi}{2}$ ) bei  $\omega = \omega_0$  auf  $180^\circ$  ( $= \pi$ ) an.

**Allgemein:**

Im stationären Fall gilt

$$x(t) = x_0(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

wenn  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ .

**Bewegungsgleichung für mechanische erzwungene Systeme:**

Die Grundgleichung der Dynamik sagt, daß die Beschleunigung  $a = \ddot{x}(t)$  von der Summe aller am System angreifenden Kräfte herrührt:

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 2\delta m\dot{x}(t) + F_0 \cos \omega t$$

Die Erregerkraft hat hier speziell eine harmonische Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Diese Kreisfrequenz ist von der Schwingfrequenz  $\omega_0$  des freien (ungedämpften) Systems (Eigenfrequenz) klar zu unterscheiden.

**Qualitative Behandlung der Lösung der Bewegungsgleichung:**

Wir wissen aus dem Experiment, daß die stationäre Lösung von der Bauweise

$$x(t) = x_0(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

ist. Sowohl die Amplitude als auch die Phase  $\varphi(\omega)$  der Schwingung (relativ zur erregenden Kraft) hängen von  $\omega$  ab.

Wir bilden:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x_0(\omega)\omega \sin(\omega t - \varphi(\omega)) \\ \Rightarrow |\dot{x}(t)| &\leq x_0(\omega) \cdot \omega, \text{ weil } |\sin(\dots)| \leq 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -x_0(\omega) \cdot \omega^2 \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \\ \Rightarrow |\ddot{x}(t)| &\leq x_0(\omega) \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

Wir diskutieren jetzt die relative Größe der einzelnen Summanden in der Bewegungsgleichung als Funktion von  $\omega$ :

- Kleine  $\omega$ :  
Noch allgemein gilt

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 2\delta m\dot{x}(t) + F_0 \cos \omega t$$

Näherungsweise gilt (s.o.):

$$+Dx(t) \cong F_0 \cos \omega t,$$

weil die beiden anderen Summanden  $m\ddot{x}(t)$  und  $2\delta m\dot{x}(t)$  klein gegenüber  $Dx(t)$  sind. Sie enthalten als Faktor  $\omega$  oder gar  $\omega^2$ .

Für kleine  $\omega$  gilt mit

$$\begin{aligned} Dx(t) &\simeq F_0 \cos \omega t \\ \Rightarrow x(t) &\approx \frac{F_0}{D} \cos \omega t = \frac{1}{D} F(t) \end{aligned}$$

Erzwungene Schwingung  $x(t)$  und Erregerkraft sind in Phase.



- Große  $\omega$ :  
Noch allgemein:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 2\delta m\dot{x}(t) + F_0 \cos \omega t$$

Jetzt ist wegen des Faktors  $\omega^2$  der Summand

$$m\ddot{x}(t)$$

am größten. Somit gilt

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Wegen

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

folgt

$$x(t) \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t$$

Die erzwungene Schwingung ist hier gegenphasig zu  $F(t)$ . Die Amplitude ist klein, da  $\omega^2$  im Nenner steht.

#### Diskussion:

Die Phase von  $x(t)$  geht für wachsendes  $\omega$  von  $\varphi(\omega) \approx 0$  auf  $\varphi(\omega) \approx 180^\circ (= \pi)$ . Irgendwo muß  $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$  werden. Das passiert bei  $\omega = \omega_0$ , wobei  $\omega_0$  die Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung (Eigenfrequenz) ist.

#### Diskussion des Resonanzverhaltens:

Im Falle der Resonanz ist

$$x(t) = x_0 \sin \omega t,$$

wenn

$$F(t) = F_0 \cos \omega t,$$

d.h. der Schwinger hinkt um  $90^\circ$  hinter dem Erreger her.

Es stellt sich nun die Frage nach der über mindestens eine Schwingungsdauer aufgenommenen Leistung. Noch vor der Mittelung über die Zeit gilt

$$P(t) = F(t)\dot{x}(t)$$

Gemittelt ergibt sich also

$$\overline{P(t)} = \overline{F(t)\dot{x}(t)}.$$

$\overline{P(t)}$  ist nicht Null, weil

$$\dot{x}(t) \sim \cos \omega t \text{ und } F(t) \sim \cos \omega t$$

$$\Rightarrow P(t) \sim \cos^2 \omega t$$

Die zeitliche Mittelung von  $\cos^2 \omega t$  ergibt

$$\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{P(t)} \neq 0,$$

d.h. in Resonanz ( $\omega \approx \omega_0$ ) wird vom Erreger Energie an das zu erregende System abgegeben. Folglich "schaukelt sich die erzwungene Schwingung auf".

### Ausprägung der Resonanz:

Es stellt sich ebenfalls die Frage, wie groß die Resonanz wird, d.h. wie groß wird  $x_0(\omega)$  ?

Die Amplitude  $x_0(\omega)$  wächst solange an, bis die Reibungskraft die Erregerkraft kompensiert, denn in Resonanz ( $\omega \approx \omega_0$ ) kompensieren sich gerade Trägheitskraft und elastische Kraft:

$\omega = \omega_0$  :

$$m\ddot{x}(t) + Dx(t) = 0$$

wegen  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ .

$$\Rightarrow 2\delta m\dot{X}(t) = F_0 \cos \omega_0 t$$

Mit

$$\dot{x}(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t) x_0$$

wird

$$2\delta m\omega_0 x_0 = F_0$$

und damit

$$|x_0(\omega_0)| = \frac{F_0}{2\delta m\omega_0}$$

Dies bedeutet:

Je kleiner die Dämpfung  $\delta$ , desto größer die Amplitude der Schwingung in der Resonanz.

### 9.4.2 Wechselstromkreise mit Erregerspannung

Wir betrachten einen LRC-Kreis, in den eine periodische Wechselspannung

$$U_{\sim}(t) = U_0 \sin \omega t$$

eingespeist wird.

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_0 \sin \omega t$$

Ersetzt man  $I(t)$  und  $\frac{dI}{dt}$  durch die Ableitungen der Ladung  $Q(t)$ , so erhält man

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \text{ bzw. } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

Verwendet man weiterhin

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ und } 2\delta = \frac{R}{L},$$

so ergibt sich

$$\Rightarrow \ddot{Q}(t) + 2\delta\dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{U_0}{L} \sin \omega t.$$

### Diskussion:

Diese Differentialgleichung ist analog der DGL für erzwungene mechanische Schwingungen aufgebaut. Es gelten folgende Analogien

- $m \leftrightarrow L$
- $x(t) \leftrightarrow Q(t)$
- $F(t) \leftrightarrow U(t)$
- $D \leftrightarrow \frac{1}{C}$
- $\dot{x}(t) \leftrightarrow I(t)$
- $2\delta m \leftrightarrow R$

**Amplitude  $I_0(\omega)$ :**

Im stationären Zustand muß gelten

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega))$$

Für  $I(t)$  folgt (ohne Herleitung!)

$$I(t) = \omega_0 Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Dabei gilt für  $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$  (ohne Herleitung!):

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Das Maximum liegt kurz unterhalb von

$$\omega_0 = \left( \frac{1}{LC} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Phasenwinkel  $\varphi(\omega)$ :**

- Bei kleinen  $\omega$ -Werten spielt die Induktivität keine Rolle, denn der induktive Widerstand lautet  $R_L = \omega L$ . Folge ist eine  $90^\circ$ -Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.
- Bei großen  $\omega$ -Werten spielt die Kapazität keine Rolle, denn der kapazitive Widerstand beträgt  $R_C = \frac{1}{\omega C}$ . Es resultiert hier eine  $-90^\circ$ -Phasenverschiebung.

## 9.5 Gekoppelte Oszillatoren

### 9.5.1 Doppelpendel

Bisher haben wir mechanische Systeme betrachtet, bei denen die periodische Bewegung durch *eine* Variable beschrieben werden kann. Sie besitzen also einen *Freiheitsgrad*.

Wir untersuchen jetzt Systeme, bei denen mehr als eine Variable zur Beschreibung des Bewegungszustandes benötigt wird.

**Beispiele für Systeme mit zwei Freiheitsgraden:**

1. Gekoppelte Pendel (Fadenpendel, Federpendel)

## 2. Gekoppelte Längs- und Torsionsschwingung

**Feststellungen:**

- Einfache Bewegungsformen:

Beide Körper schwingen mit gleicher Frequenz und Phase, d.h. sie gehen zur gleichen Zeit durch ihre Nullagen.

**Definition:**

Eine Bewegungsform, bei der alle beteiligten Teile mit derselben Frequenz und Phase schwingen, heißt *Eigenschwingung* oder *Fundamentalschwingung*.

Unsere zwei gekoppelten Pendel besitzen zwei Eigenschwingungen unterschiedlicher Frequenz:

- Gleichtakt
- Gegentakt

Die höhere Eigenfrequenz hängt von der *Kopplungsstärke* zwischen beiden Systemen ab.

- Komplizierte Bewegungsformen:

Wird ein Pendel zur Zeit  $t = 0$  ausgelenkt, so geht mit der Zeit die Schwingungsenergie auf das zweite Pendel über und anschließend kehrt sie in das erste Pendel zurück. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

**Definition:**

Eine Schwingung, bei der die Amplitude langsam periodisch schwankt, heißt *Schwebung*.

Eine stärkere Kopplung beschleunigt den Energieaustausch zwischen den beiden gekoppelten Pendeln. Später werden wir sehen, daß eine Schwebung als Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz dargestellt werden kann. In diesem Fall kann sie als Überlagerung der Eigenschwingungen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beschrieben werden.

**Rückführung der gekoppelten Pendel auf die erzwungene Schwingung:**

Jedes Pendel stellt die erregende Kraft  $F(t)$  für das jeweils andere Pendel dar. Die erregende Kraft und das anzuregende System haben die selben "Eigenfrequenzen". Daher sind Erreger und anzuregendes System in Resonanz und letzteres entnimmt dem anregenden System Energie. Folglich fließt Energie vom erregenden in das anzuregende System. Und zwar solange, bis der Erreger *alle* Energie abgegeben hat. Beide Pendel tauschen ihre Funktion, wenn *alle* Energie in das anzuregende System geflossen ist.

**Das System der beiden Bewegungsgleichungen:** gekoppelte Federpendel

Wir addieren die Kräfte, die auf jeden der beiden Körper einwirken. Beide mögen die gleiche Masse  $m$  besitzen.

Seien die Richtkonstanten aller Federn gleich  $D$  und die Abweichung der Masse  $i$  aus ihrer Ruhelage gleich  $x_i$ .

Für die erste Masse  $m_1$  erhält man dann

$$m\ddot{x}_1(t) = -Dx_1 + D(x_2 - x_1)$$

Von links zieht die Feder mit der Kraft  $-Dx_1(t)$  in die Ruhelage zurück ( $x_1$ : Auslenkung aus der Ruhelage). Auf der rechten Seite hat die Kopplungsfeder eine Länge, die um  $(x_2 - x_1)$  von

der "Ruhelänge" abweicht. Folglich ist  $(x_2 - x_1)$  die Auslenkung und die Kraft nach rechts ist  $D(x_2(t) - x_1(t))$ .

Wenn  $x_2 > x_1$  wird, dann zieht das System nach rechts. Wird  $x_1 = x_2$ , so verschwindet der 2. Summand, da die Kopplungsfeder nicht gespannt ist.

Für die zweite Masse gilt entsprechend

$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - D(x_2 - x_1)$$

### Diskussion:

Wir dividieren durch die Masse  $m$  und führen ein:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$\omega_0$  ist die Kreisfrequenz der beiden nicht gekoppelten Pendel bei der freien Schwingung.

### Schwingungsgleichungen der gekoppelten Pendel:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 (x_2(t) - x_1(t)) \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 x_2(t) - \omega_0^2 (x_2(t) - x_1(t))\end{aligned}$$

### Bemerkung:

Wenn die Kopplungsfeder eine andere Federkonstante  $D^*$  ( $D^* \neq D$ ) hat, dann ist in den zweiten Summanden  $\omega_0^2$  durch  $\kappa^2 = \frac{D^*}{m}$  zu ersetzen.

### Lösungen der beiden gekoppelten DGL's:

Wir raten die Lösung. Die Diskussion wird klarmachen, daß wir richtig geraten haben. Die komplette Herleitung der Lösungen findet man in fast jedem guten Physikbuch (z.B. Niedrig, Kap.5.6).

Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

### Anfangswerte:

Die  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) und die  $\varphi_i$  hängen von der Art der Anregung ab.

### Diskussion der Lösungen:

Wir verifizieren Schwingungsformen, die auftreten:

- Fundamentalschwingungen:

- $A_1 = 0$ :  
Es folgt

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \Rightarrow x_1(t) &= -x_2(t)\end{aligned}$$

Die Schwingung der beiden Pendel ist immer gegenphasig. Sie erfolgt mit  $\omega_2$ . Es gilt

$$\omega_2^2 = \frac{3D}{m}$$

$A_1 = 0$  liefert also die 2.Eigenschwingung ( $\omega_2$ ). Wir wissen auch, wie wir anregen müssen:

Beide Pendel in entgegengesetzte Richtungen auslenken, dann loslassen.

–  $A_2 = 0$ :

Wir erhalten

$$x_1(t) = x_2(t)$$

Es handelt sich also um eine gleichphasige Schwingung beider Pendel. Die Kopplungsfeder wird nie beansprucht. Es folgt

$$\omega_1^2 = \frac{D}{m} \text{ (1.Eigenschwingung)}$$

• Schwebungen:

Die Bewegung des Systems läßt sich als Überlagerung seiner beiden Eigenschwingungen (mit  $\omega_1$  und  $\omega_2$ ) beschreiben. Wir betrachten als Beispiel den Fall

$$A_1 = A_2 = A \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Es stellt sich die Frage nach der Bedeutung. Mit (noch allgemein)

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

folgt für  $A_1 = A_2 = A$  und  $\varphi_i = 0$ :

$$x_2(t = 0) = 0,$$

d.h. unser Spezialfall entspricht der Situation, wo anfänglich ( $t = 0$ ) nur Pendel 1 ausgelenkt wird. Wir erhalten also zunächst

$$x_{1,2}(t) = A (\cos \omega_1 t \pm \cos \omega_2 t)$$

Ein Additionstheorem liefert

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

bzw.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Damit ergibt sich

$$x_{1,2} = A_{mod}(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

mit

$$A_{mod}(t) = 2A \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

**Diskussion:**

Die Vorgänge  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  finden mit einer Trägerfrequenz  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  statt. Die Amplitude ist cos-förmig moduliert.

**Definition:**

Eine *Schwebung* läßt sich schreiben als

$$x(t) = A_{mod}(t) \cdot \cos(\omega_T t + \varphi)$$

mit  $\omega_T$  der Trägerfrequenz.

$$A_{mod}(t) = A \cos(\omega_{mod} t)$$

mit  $\omega_{mod} \ll \omega_T$  der Modulationsfrequenz.

**Definition:**

Eine Amplituden-Modulation liegt vor, wenn

$$x(t) = A_{mod}(t) \cos \omega_T t$$

Die Amplitude ist verglichen mit  $\cos \omega_T t$  nur langsam zeitlich veränderlich.  $A_{mod}(t)$  ist nicht notwendigerweise eine periodische Funktion.

**9.5.2 N gekoppelte Oszillatoren**

Wir erweitern das Schwingungssystem von zwei auf  $N$  ( $N > 2$ ) Freiheitsgrade, d.h. benötigt man zur Charakterisierung seiner Bewegung mehr als zwei Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , so hat es  $N$  Eigenfrequenzen, wenn wir  $N$  Funktionen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) brauchen.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen würde ganz analog verlaufen; ihre Lösung ebenso ("Normalkoordinaten").

**Beispiel:**

Ein System mit vielen Freiheitsgraden ist die Torsionspendelkette (TPK). Für jedes Drehpendel muß seine Auslenkung  $x_i(t)$  angegeben werden. Die Energie wird wieder zwischen den einzelnen gekoppelten Oszillatoren übertragen.

**Erzwungene Schwingungen in einem System mit zwei gekoppelten schwingungsfähigen Systemen:**

Wiederholung:

Wird ein schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so tritt eine *Resonanz* bei *einer* Eigenfrequenz  $\omega_0$  auf.

Jetzt:

Hat ein schwingungsfähiges System zwei Eigenfrequenzen (Doppelpendel), so treten Resonanzen bei *jeder* dieser Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  auf.

Hat das System  $N$  verschiedene Eigenfrequenzen, so treten  $N$  Resonanzen in der Umgebung dieser  $N$  Frequenzwerte auf.

**9.5.3 Nicht lineare Kraftgesetze**

Eine elastische Verformung liefert eine Rückstellkraft bzw. ein Rückstellmoment proportional zur Auslenkung/Verdrillung.

Auch der *LC*-Kreis liefert eine harmonische Schwingung.

In diesen Fällen lag ein lineares Kraftgesetz vor, daß zu dieser harmonischen Schwingung geführt hat.

Alle Systeme bei denen die

- Gravitationskraft
- Coulombkraft

dominieren, liefern *nicht-lineare* Kraftgesetze, hier  $F \sim \frac{1}{r^2}$ .

**Beispiel:** Schwerependel

Das rücktreibende Moment ist

$$|\vec{M}| = mgl \sin \alpha(t)$$

mit  $l$  dem Abstand von Schwer- zu Aufhängepunkt,  $m$  der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse und  $\alpha(t)$  dem Auslenkungswinkel.

**Feststellung:**

Schwingungen von Systemen mit nicht-linearem Kraftgesetz sind nicht-sinusförmig, d.h. anharmonisch.

**Beispiel aus der E-Lehre:**

- Schwingkreis mit eisengefüllter Spule (Eisenkern)

**Beispiele aus der Mechanik:**

- Fadenpendel
- Physikalisches Pendel

**Fourier-Zerlegung:**

Die Mathematik lehrt:

Jede Schwingung ist ein Gemisch aus sinusförmigen Schwingungen, d.h. jeder nicht-harmonische Schwingungsvorgang kann als eine Summe sinus-förmiger Teilschwingungen dargestellt werden.

Man kann dies auch experimentell verifizieren:

Man koppelt ein schwingungsfähiges System variabler Eigenfrequenz an, d.h. man versetzt es in Schwingungen unter dem Einfluß des anharmonischen Vorgangs. Man erhält dann eine Resonanz bei jeder Frequenz, die in diesem Gemisch enthalten ist.



# Kapitel 10

## Wellen

### 10.1 Einführung

Beispiele für Wellenerscheinungen:

- Wellenwanne (Kreiswellen, ebene Wellen)
- Torsionspendelkette (TPK)

Gemeinsam für alle Wellenerscheinungen sei:

**Definition:**

Als *Welle* bezeichnen wir die Ausbreitung einer Störung in

1. einer periodischen Struktur,
2. einem homogenen Medium.

Die Störung, d.h. die Welle, ist eine Funktion  $\psi(\vec{r}, t)$  von Ort und Zeit.

Bei Wellen wird offenbar Energie, nicht aber Masse transportiert. Beim Energieaustausch werden viele gekoppelte Einzelelemente erfaßt, daher die Wellenerscheinungen.

**Gemeinsame Merkmale verschiedener Wellen:**

- Es erfolgt eine zeitabhängige Veränderung der Größe  $\psi(\vec{r}, t)$ , wenn man einen festen Ort  $\vec{r}$  betrachtet.
- Die Störung  $\psi$  breitet sich in dem Medium mit endlicher Geschwindigkeit  $v$  aus.
- Ursache der Ausbreitung ist die Kopplung zwischen verschiedenen Elementen des Mediums.
- Es wird keine Masse, aber Energie transportiert.

**Definition:**

Vorgänge, die *alle* diese Merkmale haben, heißen *Wellen*.

**Katalogisierung:**

Die Störung kann entweder in Richtung der Ausbreitung (der Störung) oder senkrecht darauf stehen.

**Definition:**

Bei einer *longitudinalen Welle* zeigt  $\psi$  in Ausbreitungsrichtung der Welle.

**Definition:**

Bei einer *transversalen Welle* steht  $\psi$  senkrecht auf der Wellenausbreitungsrichtung.

Im allgemeinen muß  $\vec{\psi}$  deshalb ein Vektor sein. Wellen sind im allgemeineren Fall mehrdimensional, denn die Störung breitet sich im Raum nicht nur längs einer Richtung aus.

**Definition:**

Gebiete gleicher Störung, d.h. mit gleichem  $\vec{\psi}$  heißen *Wellenfronten*.

**Definition:**

Die Richtung von  $\vec{\psi}$  heißt *Polarisationsrichtung*.

Bei longitudinalen Wellen gibt man die Polarisationsrichtung nicht an, da dort  $\vec{\psi}$  in Ausbreitungsrichtung zeigt.

Dimension einer Wellenausbreitung:

- längs einer Kette 1D
- längs einer Oberfläche 2D
- als Kugelwelle 3D

**Beispiele für Wellen:**

- Seilwelle:
  - Eindimensionale Welle, d.h. Ausbreitung in einer Richtung
  - Die Störung ist die seitliche Seilauslenkung.
  - Verschiedene Polarisationsrichtungen
- Wasserwelle (Oberflächenwelle):
  - Medium: Flüssigkeit
  - zweidimensionale Welle: Ausbreitung längs der Oberfläche
  - Die Störung ist die Auslenkung der Flüssigkeits(-moleküle) an der Oberfläche.
- Schallwelle:
  - Medium: Gas, Flüssigkeit, Festkörper
  - Dreidimensionale Welle: Ausbreitung in alle Raumrichtungen
  - Störung: Druckänderung bzw. Dichteänderung durch Verschiebung der Moleküle des Mediums gegeneinander.
  - Polarisationsrichtung: longitudinal + transversal
- Elektromagnetische Welle:
  - Medium: Vakuum, Gas, Flüssigkeit, Festkörper
  - Zeitlich veränderliche Felder
  - Dreidimensionale Wellen

## 10.2 Fortschreitende Wellen

### 10.2.1 Darstellung von laufenden harmonischen Wellen

#### Lineare Kette (hier TPK):

- Medium: lineare Anordnung von schwingungsfähigen Systemen, die irgendwie gekoppelt sind.
- 1D-Welle: Ausbreitungsrichtung ist die Kettenrichtung.
- Störung: Verschiebung (Federpendelkette) der Schwinger gegeneinander oder Auslenkung aus der Ruhelage (TPK).

#### Ausbreitung einer Sinuswelle auf der TPK:

Das unterste Pendel wird mit einer andauernden Sinusschwingung ausgelenkt. Man stellt für ein festes  $t = t_0$  eine sinusförmige Verteilung der Auslenkung  $\psi(x, t)$  längs der Kette fest. Folglich ist  $\psi$  eine Sinusfunktion des Ortes. Ferner folgt, daß es eine Wellenlänge  $\lambda$  gibt, nach der sich der Auslenkungszustand wiederholt. Es folgt

$$\psi(x, t_0) = \psi_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi(t_0)\right)$$

Hält man statt  $t$  nun  $x = x_0$  fest, so führt das betrachtete Drehpendel eine Schwingung mit der Erregerfrequenz  $\omega$  aus. Es folgt

$$\psi(x_0, t) = \psi_0 \sin(\omega t + \tilde{\varphi}(x_0))$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so ergibt sich

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Dies ist eine harmonische Welle. Sie bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v_\varphi$  längs des Mediums fort. Die Elemente des Mediums sind raumfest. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer Sinuswelle und eines Pulses können verschieden sein. Meist:

$$v_\varphi > v_g$$

Wir verfolgen die Ausbreitung einer bestimmten Amplitude längs der Kette:

Die sinusförmige Verteilung schiebt sich starr die Kette entlang: die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer bestimmten Schwingungsphase heißt  $v_\varphi$  (Phasengeschwindigkeit).

Die Zeit  $T$ , nach der ein bestimmtes Pendel wieder dieselbe Amplitude (=Schwingungsphase) annimmt, ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

In dieser Zeit  $T$  muß sich aber die vorhergehende gleiche Amplitude gerade um  $\Delta x = \lambda$  weitergeschoben haben. Folglich hat sich in  $t = T$  die Phase um  $\Delta x = \lambda$  geändert.

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

Dies ist allgemein für alle Wellentypen gültig.

**Beweis:**

Zur Zeit  $t$  gilt:

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x = \text{const.} = c$$

Zur Zeit  $(t + \Delta t)$  soll auch gelten:

$$\omega(t + \Delta t) - \frac{2\pi}{\lambda}(x + \Delta x) = \text{const.} = c$$

Daraus folgt

$$\omega\Delta t - \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 0$$

und somit

$$v_\varphi \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{2\pi}\lambda = \nu\lambda$$

**Diskussion:**

Hat man statt des Minuszeichens (-) ein Pluszeichen (+) im Argument, d.h.

$$\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x,$$

so ist

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{2\pi}\lambda$$

Die Welle läuft nach links.

### 10.2.2 Wellengleichung

Wir gehen aus von einer laufenden Sinuswelle, d.h.

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

**Definition:**

Der Ausdruck

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

heißt *Wellenzahl*.

Wegen

$$v_\varphi = \frac{\lambda}{T}$$

folgt auch

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}.$$

Vorgehensweise:

Wir bilden jetzt Ableitungen von  $\psi$  entweder nach  $x$  oder nach  $t$ , wobei wir die jeweils andere

Koordinate festgehalten denken. Solche Ableitungen unterscheiden wir von den bisherigen durch "runde" Symbole, d.h.

$$\frac{d}{dt} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{festgehaltenes } x)$$

$$\frac{d}{dx} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \quad (\text{festgehaltenes } t)$$

Im einzelnen:

1.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -k \psi_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k^2 (-\psi_0 \sin(\omega t - kx))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi$$

2.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \psi_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi$$

Wir können also schreiben:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

und somit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_\varphi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

**Definition:**

Die obige (partielle) Differentialgleichung heißt *Wellengleichung*.

**Diskussion:**

Die Bedeutung dieser Gleichung liegt in folgendem:

Stellt man für ein physikalisches System die Bewegungsgleichung auf (z.B. aus dem Kräftegleichgewicht oder der Energiebilanz) und hat sie dann die Form der Wellengleichung, so tritt Wellenausbreitung mit der Phasengeschwindigkeit  $v_\varphi$  auf.

Die Wellengleichung hat nicht nur ebene Wellen als Lösung. Wir betrachten eine Störung der allgemeinen Form

$$f(x - v_\varphi t).$$

**Bemerkung:**

$v_\varphi$  kann selber von  $\omega$  abhängen, d.h. es ist

$$v_\varphi = v_\varphi(\omega)$$

Dann läuft eine Störung, die nach Fourier aus Sinuswellen mit verschiedenen Werten von  $\omega$  aufgebaut ist, im Laufe der Zeit auseinander. Die verschiedenen Sinuswellen besitzen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten  $v_\varphi(\omega)$ . Die Störung bewegt sich dann i.a. mit

$$v_g \neq v_\varphi$$

Wie muß nun die Beziehung zwischen  $\omega$  und  $k$  aussehen, damit ein "Puls" nicht zerläuft ?  
Wenn

$$\omega = ck$$

gilt, dann ist

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

gleich für alle Werte von  $\omega$ .

Sonst:

$\omega(k)$  hängt nichtlinear von  $k$  ab. Damit hängt die Phasengeschwindigkeit von  $k$  ab. Störungen, die aus verschiedenen  $\omega, k$ -Werten aufgebaut sind, "zerlaufen".

### 10.2.3 Energietransport durch Wellen

#### Motivation:

Auftreffen einer Welle auf Grenzflächen

#### Beispiel: TPK

Es wird längs der Kette keine Materie transportiert, sondern Energie. Uns interessiert der Energiestrom bzw. die Energiestromdichte  $j_E$  (Energie pro Fläche und Zeit). Es gilt

$$|\vec{j}_E| = v_\varphi w_E$$

Wir betrachten ein "Teil der Kette" (Massenelement), d.h. wir betrachten die Verdrillung als Funktion der Zeit bei festem Ort. Das schwingende Massenelement der Masse  $\Delta m$  hat die Energie  $\Delta W$ :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} D \psi_0^2 \quad (\text{Potentielle Energie zu Beginn}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta m \psi_0^2 \omega^2 \quad (\text{mit } \omega^2 = \frac{D}{\Delta m}) \end{aligned}$$

Nach dem Übergang zu infinitesimalen Elementen

$$dm = \rho dV$$

ergibt sich

$$dW = \frac{1}{2} \rho \psi_0^2 \omega^2 dV$$

Dabei ist

- $\rho$  die Massendichte
- $\psi_0$  die Maximalverdrillung
- $\omega$  die Frequenz der Schwingung.

Die Energiedichte  $w_E$ , beträgt

$$w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \psi_0^2$$

Die Energiestromdichte  $j_E$  (oder  $S$ ) ergibt sich als Produkt aus  $w_E$  und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Sinuswelle,  $v_\varphi$ , zu

$$\begin{aligned} j_E &= w_E v_\varphi \\ \Rightarrow j_E &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \psi_0^2 v_\varphi \end{aligned}$$

### 10.2.4 Doppler-Effekt

#### Definition:

Wellenerzeuger (*Quelle*) und Wellenempfänger (*Detektor*) können sich *relativ* zum Wellenmedium oder relativ zueinander bewegen. Dann tritt der *Doppler-Effekt* auf:

Die Frequenz der Welle ist verschieden von jener, die auftritt, wenn diese Bewegungen nicht vorhanden sind.

#### Spezialfälle:

- Bewegter Detektor:  
Es gilt immer

$$\lambda \nu = v_\varphi$$

Die Relativbewegung des Detektors bzgl. des Mediums erfolge mit  $v_D$ . Folglich hat sich die Phasengeschwindigkeit  $v'_\varphi$  verglichen mit jener bei ruhendem Detektor geändert:

$$v'_\varphi = v_\varphi \pm v_D.$$

Dabei bedeutet (+) eine Bewegung des Detektors auf die Quelle zu. Welche Frequenz mißt man nun mit dem bewegten Detektor ?

$$\begin{aligned} \nu_D &= \frac{v'_\varphi}{\lambda} = \frac{v_\varphi \pm v_D}{\lambda} \\ \Rightarrow \nu_D &= \frac{v_\varphi}{\lambda} \left( 1 \pm \frac{v_D}{v_\varphi} \right) \end{aligned}$$

#### Beachte:

Die Wellenlänge  $\lambda$  der Wellenerscheinung ist nicht verändert, da sie ja von der ruhenden Quelle in das ruhende Medium übergeht.

- Bewegte Quelle:  
Gegenüber der von einer ruhenden Quelle erzeugten Welle sind die Abstände zwischen den Wellenextrema verändert, denn die Quelle bewegt sich während einer Schwingungsdauer  $T$  um

$$\Delta x = v_Q T.$$

Dabei ist  $v_Q$  die Quellengeschwindigkeit.  
Währenddessen (in  $T$ ) ist die Wellenfront um

$$\lambda_0 = v_\varphi T$$

von der Quelle weggelaufen. Daher beträgt der Abstand zweier Extrema

$$\lambda' = \lambda_0 \mp \Delta x$$

Hierbei bedeutet (-), daß sich die Quelle auf den Detektor zubewegt.

**Nochmals:**

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda_0 \mp \Delta x \\ &= v_\varphi T \mp v_Q T = T(v_\varphi \mp v_Q) \\ \Rightarrow \lambda' &= \frac{1}{\nu_0}(v_\varphi \mp v_Q) \end{aligned}$$

mit  $\nu_0 = \frac{1}{T}$  der Frequenz der Erregerquelle. Welche Frequenz registriert der Detektor, wenn sich die Quelle mit  $v_Q$  bewegt?

Es gilt immer noch

$$\begin{aligned} \nu_D &= \frac{v_\varphi}{\lambda'} \\ \Rightarrow \nu_D &= \frac{v_\varphi}{\frac{v_\varphi \mp v_Q}{\nu_0}} \end{aligned}$$

und somit

$$\nu_D = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v_Q}{v_\varphi}}$$

### Beispiele für das Auftreten des Doppler-Effektes:

1. Rotverschiebung des Lichtes von Sternen:

Die charakteristischen Frequenzen ("Linien") sind im Sternenlicht verschoben gegenüber den entsprechenden Linien, wenn sie auf der Erde emittiert werden. Die Verschiebung geht zu kleineren Frequenzen hin (Rotverschiebung). Dies wird bisher als Beweis für eine Expansion des Weltalls und somit als stützendes Argument der Urknall-Theorie verwendet.

2. Doppler-Verbreiterung:

In glühenden Gasen werden die Linien von Atomen emittiert, die sich relativ zum Beobachter bewegen. Daher rührt eine Verbreiterung der Spektrallinien, weil die Bewegung in alle Richtungen erfolgt.

3. Verkehrsradar:

Ein Sender strahlt eine Welle der Frequenz  $\nu$  ab. Das Auto empfängt die dopplerverschobene Frequenz  $\nu'$  und reflektiert die Welle mit dieser Frequenz. Die Sender/Empfänger-Einheit registriert dann die wiederum dopplerverschobene Frequenz  $\nu''$ . Es gilt:

$$\nu'' = \nu \left( 1 + \frac{2v_{Auto}}{c} \right)$$

mit  $c$  der Geschwindigkeit der Radarwelle, d.h. Lichtgeschwindigkeit.



## 10.3 Stehende Wellen

### Definiton:

Die Überlagerung von Wellen, die gleichzeitig durch dasselbe Medium laufen, heißt *Interferenz*.

Wir betrachten die Interferenz zweier harmonischer Wellen, die in die positive bzw. die negative x-Richtung laufen:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_0 \sin(\omega t - kx) \\ \psi_2 &= \psi_0 \sin(\omega t + kx)\end{aligned}$$

Die "Auslenkung"  $\psi(x, t)$  in einem bestimmten Punkt  $x$  des Mediums ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) \\ &= \psi_0 (\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)) \\ \Rightarrow \psi(x, t) &= 2\psi_0 \cos kx \cdot \sin \omega t\end{aligned}$$

### Diskussion:

Es ergibt sich ein Profil, was durch örtlich festliegende

- "Knoten" bei  $\cos kx_K = \pm 1 \Rightarrow x_K = \frac{2n+1}{2k}\pi$
- "Bäuche" bei  $\cos kx_B = 0 \Rightarrow x_B = \frac{n\pi}{k}$

gekennzeichnet ist. Die Welle "steht", daher "stehende Welle". Die stehende Welle entspricht also einer Eigenschwingung des Mediums.

Wie groß ist der Abstand von z.B. zwei "Bäuchen" ? Es ist

$$\Delta x = \pi \frac{(n+1) + 1}{k} - \pi \frac{n+1}{k} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi} \lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Der Abstand zweier benachbarter Knoten oder Bäuche ist immer gleich einer halben Wellenlänge.

### Erzeugung von stehenden Wellen durch Reflexion laufender Wellen an Mediengrenzen:

An einer Mediengrenze wird Energie reflektiert. Daher läuft immer zumindest ein Teil der Welle zurück. Wir nehmen an, daß die Energie der Welle vollständig reflektiert wird. Dann ist die Amplitude der reflektierten Welle genauso groß, wie jene der einlaufenden Welle.

#### Festes Ende:

Das Medium ist dann an der Mediengrenze in Ruhe. Dies kann nur sein, wenn sich einlaufende und reflektierte Welle mit umgekehrten Vorzeichen am Medienende überlagern. Die Welle erfährt also bei ihrer Reflexion einen *Phasensprung* von  $180^\circ$ , d.h. die Amplitude kehrt ihr Vorzeichen um.

#### Loses Ende:

Am losen Ende findet keine Umkehrung der Auslenkungsrichtung statt, da das Medium dort frei schwingen kann. Der Phasensprung ist also Null. Trotzdem wird die gesamte Wellenenergie reflektiert.

**Stehende Wellen in beidseitig begrenzten Medien:**

Wir betrachten ein Medium mit zwei festen Enden. Daraus folgt, daß sich an beiden Enden jeweils Wellenknoten befinden.

Schlußfolgerung:

Eine stehende Welle kann sich nur ausbilden, wenn die Länge des Mediums ( $L$ ) einer ganzen Zahl von halben Wellenlängen entspricht

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Da die Frequenz  $\omega$  und die Wellenlänge  $\lambda$  über die Phasengeschwindigkeit  $v_\varphi$  zusammenhängen, gilt mit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k},$$

daß stehende Wellen bei vorgegebener Länge  $L$  nur durch diskrete Frequenzen  $\omega$  angeregt werden können:

$$\omega_n = v_\varphi k = v_\varphi \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

Mit

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

folgt

$$\omega_n = v_\varphi \frac{n\pi}{L}$$

**Beispiele:**

- Stehende Schallwellen im Kundt'schen Rohr
- Stehende Wellen auf der Torsionspendelkette
- Chladni-Figuren (2D):  
Stehende Wellen in 2D bilden sich auf begrenzten 2D-Medien aus.

## 10.4 Schallwellen

**Definition:**

*Schallwellen* sind elastische Wellen in deformierbaren Medien, d.h. Festkörper, Flüssigkeiten, Gase.

Hörbar ist der Frequenzbereich von

$$\nu = 16\text{Hz bis } \nu = 16.000\text{Hz} = 16\text{kHz}$$

Die Ausbreitung von Wellen in deformierbaren Medien wird durch die elastischen Eigenschaften des Mediums bestimmt.

**Festkörper:**

Für kleine Deformationen (relative Längenänderungen) gilt, daß die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

proportional zur Schub-/Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

ist. Es ist

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}$$

mit  $E$  dem Elastizitätsmodul.

### Flüssigkeiten/Gase:

Die Kompressibilität  $\frac{\Delta V}{V}$  ist proportional zur Druckspannung

$$\sigma = \frac{F}{A} = dp$$

Es gilt also

$$-\frac{dV}{V} = \kappa dp$$

### Definition:

Die Konstante  $\frac{1}{\kappa}$  heißt *Kompressionsmodul*.

### Aufstellung einer Wellengleichung für die Schallausbreitung (Gerthsen):

In der elastischen Welle ändert das Volumenelement

$$V = A\Delta x$$

seine Lage infolge der wechselnden Drücke an seinen Stirnflächen (Die Welle bewegt sich in  $x$ -Richtung.).

- Wir berechnen die Kraft  $F_x$  auf das Volumenelement  $V$ :

$$F_x = A\Delta x \left( \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} \right)$$

Daraus folgt, daß  $V$  die Beschleunigung  $\dot{v}(t)$  erhält:

$$\rho V \dot{v}(t) = -F_x$$

$$\Rightarrow \rho A \Delta x \dot{v}(t) = -A \Delta x \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \rho \dot{v}(t) = -\frac{dp}{dx}$$

- Hook'sches Gesetz:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa dp$$

mit  $V = A\Delta x$ .

$V$  ändert seine Größe um  $\Delta V$ , weil sich die Teilchen bei  $x$  und  $(x + \Delta x)$  unterschiedlich schnell bewegen:

$$\begin{aligned} \Delta V &= A(v(x + \Delta x) - v(x)) \Delta t \\ &= A \Delta x \left( \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \Delta t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta V \cong V \frac{dv}{dx} \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{dv}{dx} \Delta t = -\kappa \Delta p$$

oder

$$\frac{dv}{dx} = -\kappa \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\kappa \dot{p}$$

Wir haben erhalten:

$$\varrho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} \quad (\text{aus 1.})$$

$$\frac{dv}{dx} = -\kappa \frac{dp}{dt} \quad (\text{aus 2.})$$

Wir leiten nun das Ergebnis aus 1. nach der Zeit, das Ergebnis aus 2. nach dem Ort ab:

$$\Rightarrow \varrho \frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{d^2 p}{dx dt}$$

und

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = -\kappa \frac{d^2 p}{dx dt}$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man

$$\varrho \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{d^2 v}{dx^2}$$

oder für  $p(x)$ :

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{1}{\kappa \varrho} \frac{d^2 p}{dx^2}$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_\varphi$  folgt also

$$v_\varphi^2 = \frac{1}{\kappa \varrho}$$

### Diskussion:

Hätten wir

$$pV = RT$$

mit  $T = \text{const.}$  in der Schallwelle, dann wäre

$$\begin{aligned} dpV + p dV &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dV}{V} &= -\frac{dp}{p} \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Daraus ergäbe sich

$$v_\varphi = \left(\frac{p}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Einsetzen liefert dann

$$v_\varphi = 280 \frac{m}{s}$$

Tatsächlich weiß man, daß

$$v_\varphi \approx 330 \frac{m}{s}$$

ist. Dies heißt offenbar, daß in der Schallwelle  $T$  nicht konstant sein kann. Es handelt sich tatsächlich um eine *adiabatische Zustandsänderung*, d.h. es findet kein Energieaustausch mit der Umgebung statt. Dann erhält man

$$v_\varphi = \left( \frac{p}{\rho} \kappa_a \right)^{\frac{1}{2}}$$

wobei

$$\kappa_a = \frac{C_p}{C_V}.$$

Mit der allgemeinen Gasgleichung

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_{mol}}$$

folgt noch

$$v_\varphi = \left( \frac{RT}{M_{mol}} \kappa_a \right)^{\frac{1}{2}},$$

d.h.  $v_\varphi(T)$  zeigt starke Temperaturabhängigkeit.

### Schallausbreitung in Festkörpern:

In analoger Weise kann gezeigt werden, daß Wellenerscheinungen durch die elastischen Eigenschaften von Festkörpern hervorgerufen werden. Die Phasengeschwindigkeit  $c_F$  wird durch den Elastizitätsmodul (statt den Kompressionsmodul bei Gasen) bestimmt.

$$c_F = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

mit  $\rho$  der Dichte des Festkörpers und  $E$  dem Elastizitätsmodul.

bf Messung der Schallgeschwindigkeit:

Eine Schallquelle erzeugt am Anfang des Mediums ein Signal in einem Mikrofon und am Ende ein zeitlich verzögertes Signal durch den Energiestrom der Schallwelle.

### Strahlungsdruck:

#### **Feststellung:**

Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche zu einem anderen Medium, so wird ein Teil der Energie reflektiert oder absorbiert. Da dabei ein Impuls auf die Grenzfläche übertragen wird, wird auf die Grenzfläche auch ein Druck ausgeübt (Strahlungsdruck).

#### **Programm:**

Wir suchen den Zusammenhang zwischen Strahlungsdruck  $p_D$  und der Energiestromdichte der Welle.

1. Wir überlegen, wie der Zusammenhang zwischen der transportierten kinetischen Energie und dem zugehörigen Impuls  $p_i$  lautet:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p_i^2}{2m}$$

und folglich mit  $mv = p_i$ :

$$W_{kin} = \frac{p_i v}{2}$$

Wir wissen, daß im Mittel nur die Hälfte der transportierten Energie in Form von kinetischer Energie  $W_{kin}$  vorliegt. Also gilt

$$\overline{W_{ges}} = p_i v$$

mit  $v$  der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

2. Zusammenhang zwischen Druck  $p_D$  und Impuls  $p_i$ :

Die Impulsänderung  $\Delta p$  beim Auftreffen auf die Grenzfläche ruft eine Kraft  $F$  und damit einen Druck  $p_D = \frac{F}{A}$  hervor. Newton sagt:

Die Impulsänderung  $\Delta p_i$  per Zeit  $\Delta t$  ergibt die wirkende Kraft  $F$ :

$$p_D = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p_i}{\Delta t A}$$

Wir nehmen an, daß die gesamte Energie reflektiert wird. Dies hat zur Folge, daß der Impuls seine Richtung umkehrt, und der Impulsübertrag lautet:

$$|\Delta p_i| = 2p_i$$

Somit ist also

$$p_D = \frac{2p_i}{\Delta t A}$$

Drückt man nun  $p_i$  durch  $\overline{W_{ges}}$  aus, so erhält man mit

$$p_i v = \overline{W_{ges}}$$

die Gleichung

$$p_D = \frac{2\overline{W_{ges}}}{v\Delta t A}$$

Dabei ist

$$V = v\Delta t A$$

das Volumen mit der Energiedichte  $w_E$ , das in  $\Delta t$  auf die Grenzfläche trifft:

$$\Rightarrow p_D = 2w_E$$

Mit  $j_E = vw_E$  folgt

$$p_D = \frac{2j_E}{v}.$$

**Diskussion:**

Die Energiedichte  $w_E$  ist im Mittel

$$w_E = \frac{1}{2} \rho \psi_0^2 \omega^2$$

Wieder ist  $\psi_0$  die Amplitude der Schallschwingung und  $\omega = 2\pi\nu$  die Schall(kreis-)frequenz. Wegen

$$j_E = v_\varphi w_E$$

ist auch die Stromdichte  $j_E$  proportional zu  $\omega^2$ . Folglich ist auch der Strahlungsdruck

$$p_D = \frac{2j_E}{v_\varphi} \sim \omega^2$$

Bedeutung hat dies für Ultraschall-Anwendungen.

## 10.5 Elektromagnetische Wellen

### 10.5.1 Einleitung

Was passiert, wenn wir die mechanischen Abmessungen bzw. den Aufbau des Schwingkreises verändern ?

#### Verkleinerung von $L$ und $C$ :

Es erhöht sich die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Die Resonanz wird jedoch sehr breit.

#### Übergang zum Dipol:

Der Draht wird aufgebogen. Der Schwingkreis hat aber immer noch die Eigenschaften eines Resonators. Die Feldverteilung ändert sich vollständig, denn  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld sind nicht mehr in räumlich getrennten Energiespeichern lokalisiert.

#### Nahzone:

##### Mikroskopische Vorstellung zur Dipolschwingung:

Die Elektronen bewegen sich simultan mit der Schwingungsfrequenz  $\nu$ . Bei  $\nu = 100\text{MHz}$  beträgt allerdings die Verschiebung der Elektronen nur noch ca.  $10^{-7}\text{cm} = 1\text{nm}$ .

##### 1.Schwingungsphase:

Oben sind Elektronen abgezogen, unten angehäuft worden. Es existiert also ein elektrisches Dipolfeld.

##### 2.Schwingungsphase:

Die Ladungen haben sich ausgeglichen, aber es hat sich ein konzentrisches Magnetfeld aufgebaut. Dieses magnetische Feld hält die Elektronen in Bewegung.

##### 3.Schwingungsphase:

Wie die erste Phase, aber das elektrische Feld hat die umgekehrte Richtung.

##### 4.Schwingungsphase:

Wie die 2.Phase, aber das magnetische Feld ist entgegengesetzt gerichtet.

Es gibt eine Resonanz zwischen elektrischer Dipol-Schwingung und Senderschwingung, wenn das für das Verhältnis von Dipollänge  $L$  und Wellenlänge der Schwingung  $\lambda$  gilt

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Es muß eine ganze Zahl von halben Wellenlängen auf den Dipol passen.

Diese Betrachtungen gelten nur für die *Nahzone*, d.h. für Abstände von der Größenordnung der Dipollänge  $L$ .

#### Fernfeld:

Die bisherigen Überlegungen zur Dipolschwingung sind noch unvollständig. Wenn sich die Ladungen am Dipol ausgeglichen haben, besteht immer noch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Es muß von einem zeitlich veränderlichen  $\vec{E}$ -Feld umgeben sein. Die elektrischen Feldlinien können nicht auf dem Dipol enden, da kein Ladungsungleichgewicht vorhanden ist. Die oben geschilderte Situation liegt für  $t = \frac{T}{4}$  vor. Bei der erneuten Ladungstrennung entstehen wieder neue elektrische Felder, welche die bisher bestehenden Felder vom Dipol abdrängen. Folglich wird ein Teil der Feldenergie abgestrahlt. Das magnetische Feld bewegt sich

mit dem elektrischen Feld nach außen (konzentrische Kreise).

Bei Abständen, die groß gegen die Dipol-Dimensionen sind, bewegen sich nierenförmige geschlossene  $\vec{E}$ -Feldlinien nach außen, die von konzentrischen  $\vec{B}$ -Feldlinien umgeben sind ("Fernzone").

Hieraus folgt, daß  $\vec{E}$ -Feld und  $\vec{B}$ -Feld senkrecht aufeinander stehen und in Phase sind.

### Momentaufnahme einer elektromagnetischen Welle:

Energiestromdichte des Dipoloszillators:

- In Achsenrichtung wird keine Energie abgestrahlt.
- Die Strahlungscharakteristik ist rotationssymmetrisch um die Dipolachse.
- Die maximale Emission findet senkrecht zur Dipolachse, d.h. senkrecht zur Elektronenbewegung statt.

Folge ist die Längspolarisation des  $\vec{E}$ -Feldes parallel zur Dipolachse.

### Zur Abstrahlungscharakteristik:

Die Energiestromdichte  $S$  ist sicherlich charakterisiert durch das Dipolmoment  $p_e$  des schwingenden Dipols. Da  $p_e$  sowohl das  $\vec{E}$ - wie auch das  $\vec{B}$ -Feld (Induktion) bestimmt, die Energie aber proportional zum Quadrat der Feldgrößen ist, muß gelten

$$S \sim p_e^2$$

Experimentell findet man

$$S \sim \omega^4.$$

Folglich gilt

$$S \sim \omega^4 p_e^2$$

Nehmen wir zum Beispiel eine Ladung  $e$  heraus, die unter dem Takt der eingestrahnten Erregerfrequenz  $\omega$  gegen ihre Ruhelage um  $x(t)$  verschoben wird:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p_e(t) &= ex_0 \sin \omega t = ex(t) \\ \Rightarrow S &\sim \omega^4 e^2 x_0^2 \sin^2 \omega t \sim \ddot{p}(t) \sim e^2 \ddot{x}^2(t) \sim e^2 a^2(t) \end{aligned}$$

### Allgemeiner Sachverhalt:

Jede Ladung, die sich *beschleunigt* bewegt, bei der also die Geschwindigkeit sich ändert, strahlt eine Welle aus, für die gilt

$$S \sim e^2 \dot{v}^2(t)$$

bzw.

$$S \sim a^2(t)$$

Auch eine Ladung in einem Kreisbeschleuniger führt eine beschleunigte Bewegung (Radialbeschleunigung) auf ihrer Kreisbahn aus und strahlt deswegen ab (Zyklotron, Betatron).

### Definition:

Elektromagnetische Strahlung, die von geladenen Teilchen auf gekrümmten Bahnen emittiert



wird, nennt man *Synchrotronstrahlung*.

#### Eigenschaften:

Wie beim Hertz'schen Dipol wird in Richtung von  $\vec{a}$  keine Strahlung emittiert. Durch relativistische Effekte ergibt sich eine extreme Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der Abstrahlungscharakteristik. Folge ist eine schmale und intensive Strahlungskeule in Vorwärtsrichtung. Die Synchrotronstrahlung ist polarisiert:

$$\vec{E} \parallel \vec{a}$$

Das Frequenzspektrum ist kontinuierlich. Das Maximum der Frequenzverteilung liegt - je nach Beschleunigungsenergie - im ultravioletten (UV-) bis zum Röntgengebiet.

#### Andere schwingungsfähige Systeme:

Übergang vom Schwingkreis zum Hohlraumoszillator:

Wir rotieren den Drahtbügel um die Kondensatorachse. Damit entsteht ein Hohlraum. Wir lassen die Kondensatorplatten zu Deckel und Boden des Hohlraumes werden. Dieser Hohlraum hat elektromagnetische Eigenschwingungen. Dabei sind die elektrischen und magnetischen Felder senkrecht zueinander, und das elektrische Feld muß senkrecht auf den Wänden stehen.

### 10.5.2 Wellengleichung und Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

#### Herleitung der Wellengleichung für elektromagnetische Wellen:

In nichtleitenden Medien erhält man ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen folgende Gleichungen für die Orts- und Zeitabhängigkeit der Feldstärken  $\vec{E}(x, y, z, t)$  und  $\vec{B}(x, y, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  und  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , wobei  $\varepsilon_r$  die Dielektrizitätszahl und  $\mu_r$  die Permeabilitätszahl ist.

#### Diskussion:

Dies sind Wellengleichungen, die die dreidimensionale Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beschreiben. Offenbar ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

und im Vakuum gilt

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Man stellt fest, daß  $c_0$  identisch mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit ist:

$$c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Licht ist eine elektromagnetische Welle !!

#### Beispiele für elektromagnetische Wellen:

1. Ebene elektromagnetische Welle in x-Richtung:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx)\end{aligned}$$

Dabei liegen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in der Ebene senkrecht zur x-Richtung. Zwischen den Amplituden besteht folgende Beziehung

$$|\vec{E}_0| = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} |\vec{H}_0| = \left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{\frac{1}{2}} |\vec{B}_0|$$

2. Kugelwelle:

Bei einer Kugelwelle wird die Energie gleichmäßig in alle Richtungen verteilt. Es ist

$$E(r) = \frac{E_0}{r} \sin(\omega t - kr)$$

Die Amplitude  $\frac{E_0}{r}$  muß mit wachsendem  $r$  abnehmen, da sich die abgestrahlte Energie auf immer größere Kugelschalen verteilt.

### 10.5.3 Polarisation einer elektromagnetischen Welle

Elektromagnetische Wellen sind immer transversal, d.h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und senkrecht zueinander. Folglich muß man die *Polarisation*, also die Schwingungsrichtung des  $\vec{E}$ -Vektors angeben.

**Definition:**

Wenn die Polarisationsrichtung für alle Zeiten festliegt (in einer Ebene senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung), so heißt die elektromagnetische Welle *linear polarisiert*.

**Definition:**

Rotieren die Feldvektoren während des Ausbreitungsvorganges mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , so heißt die elektromagnetische Welle *elliptisch polarisiert*.

**Definition:**

Wenn der Feldvektor dabei seinen Betrag nicht ändert, so heißt die elektromagnetische Welle *zirkular polarisiert*.

**Definition:**

Kommen im Wellenfeld alle Polarisationsrichtungen gleich häufig vor, so ist die elektromagnetische Welle *unpolarisiert*.

**Beispiel:**

Natürliches Licht einer Glühbirne ist praktisch unpolarisiert.

**Bemerkung:**

Beim Durchgang durch Materie kann aus einer unpolarisierten Welle eine (teilweise) polarisierte Welle entstehen.

### 10.5.4 Messung der Lichtgeschwindigkeit

#### 1. Mikrowellenversuch:

Einem Mikrowellengenerator wird ein Reflektor gegenübergestellt. Es entstehen stehende Wellen durch Überlagerung von hin- und rücklaufenden Wellen:

$$\psi_{sw} = 2A \cos kz \sin \omega t$$

Die Randbedingungen verlangen, daß zwischen Reflektor und Sender/Empfänger (Resonator) eine ganze Zahl von halben Wellenlängen passen muß. Wir wissen ebenfalls, daß gilt

$$\lambda \nu = c$$

Eine Messung von  $\frac{\lambda}{2}$  ergibt

$$\frac{\lambda}{2} = 1,6 \text{ cm.}$$

Da man die Frequenz des Klystrons kennt:

$$\nu = 9,2 \text{ GHz}$$

errechnet man  $c$  zu

$$c \approx 2,94 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

#### 2. Drehspiegelmethode:

Der Lichtstrahl trifft auf einen Drehspiegel, wird dann reflektiert, trifft wieder auf den Drehspiegel und erreicht dann den Schirm. Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Reflektion am Drehspiegel ist, daß sich der Spiegel in der Zeit  $\Delta\tau$  zwischen diesen beiden Spiegelungen um den Winkel  $\beta$  weitergedreht hat:

$$\beta = \omega \Delta\tau,$$

denn

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Somit folgt:

$$\beta = \omega \cdot \frac{2b}{c}$$

wenn  $b$  die Distanz zwischen dem Spiegel und dem Reflektor ist. Der Auftreffpunkt ( $\Delta s$ ) auf dem Schirm folgt aus geometrischen Überlegungen:

Sei  $L$  die Entfernung zwischen Spiegel und Schirm. Dann ist wegen des Reflektionsgesetzes

$$\begin{aligned} \Delta s &\cong 2L\beta \\ \Rightarrow \Delta s &= 2L\omega \frac{2b}{c} \end{aligned}$$

und somit ist  $c$ :

$$c = \frac{4\omega bL}{\Delta s} = \frac{8\pi bL}{\Delta s}$$

Als Ergebnis ermittelt man hier:

$$c = 2,96 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Genauester Meßwert:

$$c = 299.792.456,2 \frac{m}{s}$$

**Faustregel:**

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt in ausreichend guter Näherung

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

## 10.6 Spektrum elektromagnetischer Wellen

Elektromagnetische Wellen gibt es im Frequenzbereich von einigen Hertz bis zu etwa  $10^{24}$  Hertz. Für alle elektromagnetischen Wellen gilt

$$c = \lambda\nu \text{ oder } c = \frac{\omega}{k}$$

Elektromagnetische Wellen entstehen durch

- Übergänge zwischen verschiedenen Energiezuständen von Materiebausteinen (Molekülen, Atomen, Kernen)
- kollektive beschleunigte Bewegung von Ladungen (Kreisbeschleuniger, Dipolstrahler).

**Energie der Strahlung:**

Elektromagnetische Strahlung wird von mikroskopischen Systemen in bestimmten "Paketgrößen" absorbiert. Die bei einem Übergang zwischen zwei Energiezuständen  $W_n$  und  $W_m$  freiwerdende Energie

$$\Delta W = W_n - W_m = h\nu$$

ruft elektromagnetische Strahlung der Frequenz

$$\nu = \frac{h}{\Delta W}$$

hervor.

**Definition:**

$h$  heißt *Planck'sche Konstante* oder auch *Planck'sches Wirkungsquantum*. Es ist

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} Js$$

**Bemerkung:**

Die Quantennatur der elektromagnetischen Strahlung wird immer auffälliger, je größer die Photonenenergie, d.h. je größer  $\nu$  wird. Bei Röntgen- bzw.  $\gamma$ -Strahlung spricht man meist von *Strahlen* statt von *Wellen*.

**Charakterisierung der elektromagnetischen Wellen in den verschiedenen Spektralbereichen:**

• **Radiowellen:**

- Wellenlänge:  $\lambda > 10^{-1} cm$

- Erzeugung und Nachweis:  
durch ungedämpfte Schwingungen von Sendern, z.B. Abstrahlung von Dipolantennen, Hohlleitern usw.
- Anwendung:  
Informationsübertragung durch Funk

Die elektromagnetischen Wellen werden von Hindernissen wenig beeinflusst, solange  $\lambda \gg$  Hindernisabmessung ist. Notwendige Empfangsfeldstärken sind  $E = 1 \text{ mVm}^{-1}$ .

#### **Allgemeines Prinzip der Informationsübertragung:**

Die elektromagnetische Welle wird moduliert. Das einfachste Verfahren ist dabei das der Amplitudenmodulation. Sei der Amplitudenverlauf des Schallsignals  $A_S(t)$ . Dann bekommt die elektromagnetische Welle die Amplitude

$$A(x, t) = A_S(t) \cdot A_0 \sin(\omega t - kx)$$

Die andere Möglichkeit der Modulation ist die sogenannte Frequenzmodulation. Dabei ändert sich z.B. die Kapazität eines Schwingkreises im Takt von  $A_S(t)$ . Folglich ändert sich die Eigenfrequenz des Schwingkreises und somit auch die Frequenz der abgestrahlten Welle.

#### **Informationsübertragung:**

1. Es wird eine monochromatische, ungedämpfte Trägerwelle mit einem rückgekoppelten Generator erzeugt. Dann wird die Information aufmoduliert und die Schwingung noch verstärkt.
2. Die Senderantenne strahlt eine elektromagnetische Welle ab, die sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet.
3. Die elektromagnetische Welle induziert Ströme in der Empfängerantenne. Diese Antenne ist an einen abstimmbaren Empfängerschwingkreis gekoppelt (Resonanz). Dann erfolgt die Demodulation, d.h. das Informationssignal wird von der Trägerwelle getrennt. Eine Verstärkung macht schließlich den Betrieb eines Lautsprechers möglich.

#### • **Infrarot(Ultrarot)-Strahlung:**

- Wellenlänge:  $\lambda = 1 \text{ mm}$  bis  $790 \text{ nm}$ .
- Erzeugung:  
Man erhitzt einen festen, flüssigen, gasförmigen (unter hohem Druck) Körper, der daraufhin ein kontinuierliches Emissionsspektrum abstrahlt. Für diese Temperaturstrahlung gilt:
  - \* Umso intensiver, je höher  $T$ .
  - \* Mit wachsendem  $T$  verschiebt sich das Spektrum zu kürzeren Wellenlängen.
- Mikroskopisches Bild:  
Atome, die nahe beisammen sind, beeinflussen einander, indem sie Kräfte aufeinander ausüben. Durch die Stöße werden die Ladungsverteilungen in den Atomen gegeneinander bewegt, d.h. sie führen mehr oder weniger periodische, auf jeden Fall aber beschleunigte Bewegungen aus. Dabei entsteht ein zeitlich veränderliches

Feld. Wenn dies passiert, wird von den Atomen Strahlung abgegeben. Trifft diese Strahlung nun wieder auf Moleküle, so kann sie wieder absorbiert werden, d.h. die Moleküle werden zu Schwingungen angeregt, und wir stellen die Entstehung von Wärme fest.

Auch durch das Vakuum ist eine Wärmeübertragung möglich. Voraussetzung ist aber eine zweimalige Energieumwandlung.

1. Molekülbewegung der Quelle  $\leftrightarrow$  elektromagnetische Energie
2. Elektromagnetische Energie  $\leftrightarrow$  Molekülbewegung des Empfängers

Ferner ist die kollektive Schwingung von Gitteratomen möglich. Es wird dann ein praktisch kontinuierliches Frequenzspektrum abgestrahlt.

• **Strahlungsgesetze für einen schwarzen Körper:**

**Definition:**

Ein Körper, der die gesamte auffallende Strahlung absorbiert, also nichts reflektiert, heißt *schwarzer Körper*

Praktisch wird dies meist durch einen Hohlraum realisiert, in dem es durch die Vielfachreflexionen verbunden mit Absorption zu einer fast vollständigen Absorption kommt.

**Gesetz von Stefan-Boltzmann:**

Die abgestrahlte Leistung eines schwarzen Körpers beträgt

$$P_S = \sigma AT^4$$

mit  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  einer Konstanten.

**Wien'sches Verschiebungsgesetz:**

Es gilt:

$$\lambda_m T = \text{const.} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{K} \cdot \text{m}$$

Diese Gesetze folgen aus der Planck'schen Strahlungsformel für  $dP_S(\lambda)$ . Letzteres sei die im Wellenlängenintervall  $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$  in den gesamten Halbraum abgestrahlte Leistung.

**Planck'sche Strahlungsformel:**

$$dP_\lambda = \frac{4\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1} A d\lambda$$

Dabei sind

- $T$  die Temperatur des Strahlers
- $A$  die Fläche des Strahlers
- $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum

Der Nachweis erfolgt durch Erwärmung infolge der Absorption der Strahlung.

1. Thermosäule:

Eine Kaskade aus Thermoelementen, jeweils eine Lötstelle ist vor Bestrahlung geschützt.

## 2. Bolometer:

Die Erwärmung bewirkt eine Widerstandsänderung  $\Delta R$ , die in einer Wheatstone'schen Brückenschaltung gemessen werden kann.

• **Sichtbares Licht:**

- Wellenlänge:  $390nm \leq \lambda \leq 790nm$
- Diese elektromagnetische Strahlung ergibt den Sinneseindruck "Licht", weil die Stäbchen und Zäpfchen auf der Netzhaut des menschlichen Auges dort ihren Empfindlichkeitsbereich haben.
- Erzeugung:  
Durch Lichtquellen genügend hoher Temperatur:  $T > 900^\circ C$
- Nachweis:  
Durch photochemischen Nachweis, photoelektrische Methoden oder Photomultiplier. Ausführlicheres folgt in Kapitel 11 ("Optik").

• **Charakterisierung von Lichtquellen:**

Bisher:

Alle emittierenden Atome strahlen völlig unkorreliert ab. Die Wellenzüge haben keine feste Phasenbeziehung. Bei jedem einzelnen Atom handelt es sich um einen atomaren Dipol, der gegen die anderen atomaren Dipole regellos orientiert ist.

Jetzt:

Es gibt eine Lichtquelle (LASER), bei der alle Atome im "Gleichtakt", also mit derselben Phase, abstrahlen.

**Natürliche Lichtquellen:**

Im mikroskopischen Modell ist ein Atom ein atomarer Dipol, aufgebaut aus einem praktisch ortsfesten positiv geladenen Kern und Elektronen, die gegen diesen Kern Schwingungen ausführen können. Eine Komplikation dabei ist, daß alle atomaren Dipole sich in einer natürlichen Lichtquelle mit thermischer Geschwindigkeit gegeneinander bewegen und zusätzlich völlig regellos gegeneinander orientiert sind. Folge ist, daß das Feld einer Lichtquelle außerordentlich kompliziert ist.

Auf jeden Fall gilt, daß die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes stehen. Durch Sonderfälle kann man erreichen, daß der elektrische Feldvektor  $\vec{E}$  bestimmte Bahnen im Raum senkrecht zur Ausbreitungsrichtung durchläuft.

• **UV-Strahlung:**

- Wellenlänge:  $10nm < \lambda < 380nm$
- Temperaturstrahler haben ihr Maximum (bei machbaren Temperaturen) bei viel größeren Wellenlängen. Damit ist  $\frac{dP}{d\lambda}$  im UV zu klein und die Temperaturstrahler sind als UV-Quelle ungeeignet.
- Erzeugung:  
UV-Strahlen können durch Gasentladungen erzeugt werden. Das Prinzip dieser Gasentladungen ist, daß Atome durch Elektronenstöße angeregt werden, d.h. in einen energiereicheren angeregten Zustand übergehen. Gehen die Atome wieder in den alten Zustand zurück, so emittieren sie die überschüssige Energie in Form von UV-Strahlung.  
Beispiele sind

- \* Quecksilberdampflampe
- \* Halogenlampe
- \* Xe-Lampe
- \* He-Entladung (s.LASER)

Wichtig ist, daß das Entladungsgefäß aus Quarz ist, da "normale" Glassorten für UV-Licht undurchlässig sind.

- Nachweis:  
Zum Nachweis verwendet man entweder eine Photozelle, einen Photomultiplier oder die photochemische Methode.
- UV-Licht ist biologisch wirksam. Es bräunt die Haut und kann bei zu starker Einstrahlung zu Verbrennungen und Hautkrebs führen.
- Fluoreszenz:  
Die Anregungsenergie wird teilweise dazu verwendet, Atome in bestimmten Materialien in Zustände anzuregen, die ihre Anregungsenergie in Form von sichtbarem Licht abgeben.

### • Röntgenstrahlung:

- Wellenlänge:  $10^{-12}m < \lambda < 15nm$
- Erzeugung:  
Durch
  1. Röntgenröhre
  2. Bremsstrahlung: Grenzwellenlänge, charakteristische Linien
- Ultraharte Röntgenstrahlung wird in Teilchen-Kreisbeschleunigern erzeugt (Synchrotronstrahlung). Wenn man von der Seite auf die Bahnebene der Teilchen blickt, so sieht die Bewegung der Elektronen so aus wie bei einer Dipolantenne. Die bewegten Elektronen geben einen Teil ihrer Energie als Röntgenstrahlung ab.
- Nachweis:  
Ausnutzen ihrer ionisierenden Wirkung, z.B. im Zählrohr, bei Halbleiterzählern oder der Schwärzung von Photoplatten.
- Erzeugung und Spektrum:  
Röntgenbremsstrahlung:  
In der Röntgenröhre treffen schnelle Elektronen ( $30 \dots 60keV$  Energie) auf eine metallische Oberfläche (Anode). Ihre Geschwindigkeit beträgt etwa  $v \approx 6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$ . Innerhalb von  $10 \dots 100nm$  werden sie auf etwa  $v \approx 0 \frac{m}{s}$  (Driftgeschwindigkeit im Leiter) abgebremst.  
Ein Teil der kinetischen Energie, die bei der Abbremsung umgesetzt wird, tritt als elektromagnetische Strahlung auf (Röntgen-Bremsstrahlung, 1895). Da die Abbremsung kein periodischer Vorgang ist, ist das Frequenzspektrum kontinuierlich. Die Spektren haben aber eine obere Grenzfrequenz  $\nu_g$  bzw. eine Grenzwellenlänge  $\lambda_g$ , die von der Beschleunigungsspannung  $U$  der Elektronen abhängig ist.

### Diskussion:

Die höchste Quantenenergie (Photonenenergie), die entstehen kann, folgt aus der



Energieerhaltung. Die Elektronen erhalten bei der Beschleunigung die kinetische Energie

$$W_{kin} = eU$$

mit  $U$  der Beschleunigungsspannung. Für die Quantenenergie gilt folglich

$$h\nu \leq W_{kin} = eU$$

Damit gilt für die Grenzfrequenz  $\nu_g$ :

$$\nu_g(U) = \frac{eU}{h}$$

Drückt man nun die Frequenz durch die Wellenlänge aus, so ergibt sich das **Duane-Hunt-Gesetz**:

$$U\lambda_g = \frac{hc}{e} = const.$$

Charakteristische Röntgenstrahlung:

Der Bremsstrahlung sind diskrete Linien überlagert. Sie entstehen aufgrund von Übergängen zwischen Energie-Niveaus des Anoden-Materials ( $h\nu_{nm} = W_n - W_m$ ).

- **Gammastrahlung:**

- Wellenlänge:  $\lambda \approx 10^{-13}m$

- Erzeugung:

Wenn *Atomkerne* aus einem angeregten Zustand  $W_n$  in den Grundzustand  $W_0$  übergehen, kann elektromagnetische Strahlung der Quantenenergie  $\approx 1MeV$  abgegeben werden.

- Nachweis:

Dieser erfolgt wiederum durch die Ausnutzung der ionisierenden Wirkung.



# Kapitel 11

## Optik

### 11.1 Einführung

**Frage:**

Was passiert mit der Wellenausbreitung an Hindernissen ?

**Antwort:**

- Hinter dem Hindernis:  
Dort befindet sich ein wellenfreier Schattenraum mit geradliniger Begrenzung.
- Hinter dem Loch:  
Dort befindet sich das geradlinig begrenzte durchgehende Wellenbündel.

Dies gilt, wenn die Wellenlänge der Strahlung genügend klein gegen die Abmessungen des Hindernisses bleibt.

**Definition:** Strahlenoptik

Gebiet der Optik, in dem man mit der geradlinigen Ausbreitung von Lichtbündeln auskommt.

**Definition:**

Ein *Lichtbündel* ist charakterisiert durch eine Anzahl Lichtstrahlen, die senkrecht auf den Wellenflächen stehen.

Einen Lichtstrahl kann man näherungsweise herstellen, wenn man ein Lichtbündel genügend weit verengt.

**Definition:** Wellenoptik

Eine Überlagerung von Schwingungen/Wellen ergibt eine Schwächung bzw. Verstärkung der Feldvektoren. Man kann unter bestimmten Bedingungen Interferenzmuster beobachten, die von der Schwächung/Verstärkung der sich überlagernden Wellenfelder herrühren.

Es tritt eine Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung der Lichtstrahlen auf. Die Wellenfront bewegt sich in der Umgebung von Begrenzungsflächen nicht geradeaus.

**Definition:**

*Interferenzerscheinungen* sind Erscheinungen, die von der phasenrichtigen Überlagerung von Wellenfeldern herrühren.

**Definition:**

*Beugungserscheinungen* entstehen durch die Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung von Wellenfronten.

**Definition:** Quantenoptik

Die Lichtausbreitung erfolgt nach den Gesetzen der Wellenoptik, aber die Absorption und Emission von Licht erfolgt in “Paketen” der Größe  $W_\gamma = h\nu$ . Die Paketgröße hängt folglich von der Lichtfrequenz ab. Das Licht kann dann als Strom von Lichtquanten, jedes mit einer bestimmten Energiemenge, betrachtet werden.

**Vorgehensweise:**

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, speziell Licht, in Materie einschließlich ihres Verhaltens beim Auftreffen auf Materiegrenzen, d.h. Reflexion und Brechung. Die Reflexions- und Brechungsgesetze kann man mit Hilfe des Huygensschen Prinzips verstehen. Daher wird zunächst das Huygenssche Prinzip behandelt. Dieses Prinzip wird außer für die Brechung und die Reflexion auch bei Interferenz- und Beugungserscheinungen benötigt.

## 11.2 Huygenssches Prinzip

**Feststellung:**

Die Ausbreitung von Wellenfronten beliebiger Form kann auf die Ausbreitung von Kugelwellen (Elementarwellen) und deren Interferenz zurückgeführt werden:

Jeder Punkt einer Wellenfront (Phasenfläche) kann als Ausgangspunkt einer Elementarwelle aufgefaßt werden. Sie breitet sich (im selben Medium) genauso schnell aus wie die ursprüngliche Welle. Die phasenrichtige Überlagerung (Interferenz) aller Elementarwellen ergibt die neue Wellenfront der ursprünglichen Welle (Huygenssches Prinzip).

**Beispiele für die Anwendung des Huygenschen Prinzips:**

- Entstehung neuer Wellenfronten:
  - Kugelwellen
  - ebene Wellen
- Durchgang einer ebenen Welle durch Spaltöffnungen unterschiedlicher Breite:
 

Es kommt auf das Verhältnis der Spaltbreite  $D$  zur Wellenlänge  $\lambda$  an:

  - Wenn  $\lambda \approx D$  wird, so wird die Intensitätsverteilung hinter dem Spalt stark strukturiert durch Interferenz der Elementarwellen, die von der Wellenfront ausgehen.
  - Für  $\lambda \ll D$  geht gewissermaßen nur noch eine Elementarwelle von der Schirmöffnung aus.

In der folgenden Form können die Beugungserscheinungen mittels des Huygensschen Prinzips beschrieben werden:

Die Amplitude einer Welle in einem beliebigen Punkt ergibt sich durch Interferenz aller dort eintreffenden Elementarwellen unter Berücksichtigung deren Phase.

(Huygens-Fresnel-Prinzip)

### 11.3 Reflexions- und Brechungsgesetz

Als erste Anwendung des Huygensschen Prinzips leiten wir die Gesetze der Reflexion und der Brechung ab. Gegeben seien zwei Medien, durch die sich die Welle mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $c_1$  bzw.  $c_2$  ausbreitet. Die Grenzfläche ist gegen die Ausbreitungsrichtung im Medium (1) um den Winkel  $\alpha$  geneigt.

Folglich werden die Punkte der Grenzfläche zu unterschiedlichen Zeiten von einer Wellenfront erreicht. Daher schwingen die von der Grenzfläche ausgehenden Elementarwellen, die zur Wellenfront gehören, gegeneinander phasenverschoben.

#### Überlagerung der Elementarwellen:

- **Medium 1:**

Die Wellenfront trifft in Punkt C um  $\tau$  später auf als in Punkt A. Folglich hat die von A ausgehende Elementarwelle den Radius  $c_1\tau$ . Der Punkt C wird dann gerade von der Wellenfront getroffen. Der Reflexionswinkel  $\beta$  ist also

$$\sin \beta = \frac{c_1\tau}{AC}$$

Der Einfallswinkel war aber ebenfalls

$$\sin \alpha = \frac{c_1\tau}{AC}$$

Somit erhält man das Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \beta$$

- **Medium 2:**

Wenn die Wellenfront im Punkt C eintrifft, hat sich, vom Punkt A ausgehend, eine Elementarwelle mit dem Radius  $c_2\tau$  ausgebildet. Daher ist die Wellenfront in Medium 2 um

$$\sin \beta = \frac{c_2\tau}{AC}$$

gegen die Grenzfläche geneigt.

Also gilt wegen

$$\sin \alpha = \frac{c_1\tau}{AC}$$

$$\sin \beta = \frac{c_2\tau}{AC}$$

das bekannte Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

mit  $c_1$  bzw.  $c_2$  den Phasengeschwindigkeiten in dem jeweiligen Medium.

#### Einführung der Brechzahl $n$ :

Man ordnet jedem Medium eine optische Materialkonstante, die *Brechzahl* zu. Sie gibt an, um wieviel kleiner die Phasengeschwindigkeit im betreffenden Medium verglichen mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  ist.

**Definition:**

Die *Brechzahl*  $n$  ist definiert als

$$n = \frac{c_0}{c_n}$$

mit  $c_0$  der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Somit gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Snelliussches Brechungsgesetz})$$

**Typische Brechzahlen:**

Luft	1.000(3)
Wasser	1.333
Quartz	1.539
Kronglas	1.505
Diamant	2.417
Vakuum	1.000 (gem. Definition)

**Dispersion:**

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  und somit auch die Brechzahl  $n$  sind frequenzabhängig.

$c_n(\nu) - \nu$ -Diagramme sind jedem guten Lehrbuch zu entnehmen.

Wenn  $n$  mit  $\nu$  steigt, dann handelt es sich um *normale Dispersion*. Dieser Fall liegt im sichtbaren Bereich im allgemeinen vor.

Wenn  $n$  aber mit steigendem  $\nu$  kleiner wird, nennt man dies *anomale Dispersion*. Sie tritt nur in Bereichen auf, in denen das Medium absorbiert.

**Brechung am Prisma:**

Die Brechung erfolgt von der Prismakante weg (Dachwinkel  $\gamma$ ). Für kleine Winkel  $\gamma$  gilt für den Ablenkwinkel  $\delta$

$$\delta \approx \gamma(n - 1)$$

mit  $n$  der Brechzahl.

**Diskussion:**

Es ist  $n = n(\nu)$ . Für normale Dispersion wird kürzerwelliges Licht stärker gebrochen.

**Feststellung:**

Weißes Licht ist ein Gemisch von Frequenzen. Prismen können zur spektralen Zerlegung von Frequenzgemischen verwendet werden.

**Definition:**

*Spektrometer* (hier: Prismenspektrometer) dienen der spektralen Zerlegung von Lichtstrahlung.

**Totalreflexion:**

Wir betrachten Licht, das aus dem Bereich des optisch dichteren Mediums (größeres  $n$ ) auf eine Grenzfläche auffällt. Wir lassen den Einfallswinkel  $\beta$  (bzgl. des Lotes auf die Grenzfläche) größer werden. Man sieht, daß es einen Grenzwinkel  $\beta_g$  gibt, oberhalb dessen das auffallende Licht total reflektiert wird.

**Frage:**

Wie erhält man  $\beta_g$  ?

**Antwort:**

Am einfachsten, indem man die Umkehrbarkeit des Strahlenganges ausnutzt. Dann muß zu  $\beta_g$  gerade ein "durchgehender" Strahl gehören, der die Grenzfläche streifend entlang läuft. Die Verwendung des Brechungsgesetzes liefert dann für den Grenzwinkel  $\beta_g$  aus

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

mit

$$\alpha = 90^\circ \text{ und } \beta = \beta_g$$

den Zusammenhang

$$\sin \beta_g = \frac{n_1}{n_2}$$

### Anwendungen:

Leitung von Licht längs bestimmter Wege, z.B. um Ecken usw. Dies erfolgt mit Lichtleitern.

### Definition:

Ein *Lichtleiter* ist eine Faser hoher Brechzahl, in der Totalreflexion des eingeleiteten Lichtes stattfindet.

### Beispiel: Endoskop

Jede Faser eines Lichtleiterbündels überträgt nur Licht von einem eng begrenzten Bereich des Objektes. Der Empfänger erhält somit ein Rasterbild des Objektes. Die äußere Hülle liefert das Transportmedium für die Objektbeleuchtung.

### Definition: Kohärenz

Zwei Wellenfelder mit konstantem Phasenunterschied heißen kohärent. Dies läßt sich erreichen, wenn man zwei Quellen für die Wellenerzeugung verwendet, die mit einer festen Phasenbeziehung zueinander schwingen.

Ändern sich die Phasen zweier Wellen statistisch, so sind die Wellenfelder *inkohärent*. Inkohärente Wellen zeigen keine Interferenz.

## 11.4 Interferenz

Interferenz tritt auf, wenn sich in einem Medium verschiedene Wellenzüge überlagern. Dies läßt sich erreichen, wenn sich bei der Reflexion an Grenzflächen dünner Schichten verschiedene Wellenzüge ergeben.

Zum Verständnis betrachten wir zwei Lichtquellen, die Wellen abgeben, die in Phase sind. Die Quellen  $Q_1$  und  $Q_2$  liegen auf der Senkrechten eines Schirmes S.

Für kleine Winkel  $\alpha$  ist der Wegunterschied bis S:

$$\Delta L = d \cos \alpha$$

Auf dem Schirm erhält man ein Interferenzmuster (Ringe) mit der Verbindungsachse als Zentrum.

### Frage:

Wie können wir zwei Quellen erzeugen, die in Phase schwingen ?

### Trick:

Wir verwenden nur eine Lichtquelle Q, die an Vorder- und Rückseite einer dünnen transparenten planparallelen Platte gespiegelt wird. Dann erhält man die Intensität auf dem Schirm

als Überlagerung der Wellen, die von zwei (virtuellen) Quellen  $Q_1$  und  $Q_2$  ausgehen, welche den Abstand  $d = 2D$  haben. Für die Platte wählen wir uns ein Glimmerplättchen mit  $D \approx 10^{-2} \text{ mm}$ .

Bei genauerer Betrachtung mit der Berechnung der Intensität auf dem Schirm müßten wir berücksichtigen, daß die Welle bei der Reflexion am optisch dichteren Medium (mit dem größeren  $n$ ) einen Phasensprung von  $180^\circ$  erfährt. Dies entspricht einem zusätzlichen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge. Dies ist vergleichbar mit der Reflexion einer Seilwelle am fest eingespannten Ende.

## 11.5 Beugung

### 11.5.1 Spalt und Kreisblende

#### Feststellungen:

- Eine Verkleinerung der Spaltbreite vergrößert das Bild auf dem Schirm S.
- Es tritt ein Interferenzmuster um das geometrisch erwartete Bild auf.

#### Definition:

Die Abweichung von dem nach der geradlinigen Ausbreitung erwarteten Verlauf der Strahlen heißt *Beugung*.

Die Erklärung der Beugung liefert das Huygenssche Prinzip:

In jedem Punkt der Spaltöffnung denken wir uns Oszillatoren, die in Phase schwingen, weil alle Punkte der Spaltöffnung von der einfallenden Welle zu identischen Zeiten getroffen werden. Von jedem Punkt des Spaltes gehen Kugelwellen aus. Das Licht gelangt folglich auch in Richtungen, die um den Winkel  $\alpha$  gegen die Vorwärtsrichtung geneigt sind. Durch phasenrichtige Überlagerung erhält man die Intensitätsverteilung auf dem Schirm S. Insbesondere gilt, daß es Richtungen gibt, bei denen durch Interferenz Auslöschung bzw. Verstärkung auftritt.

#### Berechnung der Auslöschungsrichtungen:

Wir denken uns längs der Spaltöffnung eine gerade Anzahl von Oszillatoren. Wir betrachten den Winkel  $\alpha_{min}$ , für den zwischen dem obersten Oszillator und dem in der Spaltmitte gerade ein Gangunterschied von  $\frac{\lambda}{2}$  auftritt. Die Interferenz der von beiden Oszillatoren ausgesandten Wellen liefert für die Beobachtung unter Richtung  $\alpha_{min}$  gerade Auslöschung. Es gibt zu jedem Oszillator aus der oberen Hälfte einen aus der unteren Hälfte, der zu ihm einen Wegunterschied  $\frac{\lambda}{2}$  aufweist. Für die Beobachtung unter  $\alpha_{min}$  erhalten wir durch destruktive Interferenz Auslöschung aller Beiträge, die von der Spaltöffnung ausgehen.

#### Berechnung von $\alpha_{min}$ :

$$\sin \alpha_{min} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{2}b}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_{min} = \frac{\lambda}{b}$$



**Bemerkung:**

Es gibt noch weitere Winkel  $\alpha_{min}(z)$  für die Auslöschung auftritt. Für sie gilt

$$\sin \alpha_{min}(z) = \frac{\lambda}{b} \cdot z \quad (z=1,2,\dots)$$

**Bemerkung:**

Für unsere Versuchsanordnung gilt

$$\tan \alpha_{min}(z) = \frac{x_{min}(z)}{f}$$

und weil für kleine Winkel gilt

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha,$$

so erhält man

$$x_{min}(z) = \lambda \frac{f}{b} \cdot z$$

mit  $f$  der Brennweite der Linse  $L_2$ .

**Diskussion:**

Für die Beugung an einer kreisförmigen Öffnung ergibt sich eine ähnliche Formel

$$r_{min} = \frac{\lambda f}{d},$$

wenn  $d$  der Durchmesser der beugenden Kreisöffnung ist.

Die Beugung ist die Ursache dafür, daß man die Breite eines Lichtbündels durch eine Öffnung der Breite  $b$  nicht beliebig verkleinern kann. Dies führt dazu, daß man einen Punkt niemals auf einen Punkt abbilden kann. Die Fassung jeder Linse wirkt als beugende Öffnung.

**11.5.2 Strichgitter****Aufbau eines Beugungsgitters:**

Es handelt sich um ein Gitter mit  $N$  Spalten im Abstand von jeweils  $g$  (Gitterkonstante). Die Breite der Spalte  $b$  ist wesentlich kleiner als  $g$ , so daß das Beugungsbild des Einzelspaltes also sehr breit ist.

**Bedeutung der Anordnung:**

- Grundlage für Spektralanalyse mit hoher Auflösung
- Grundlage für das Verständnis der Röntgenbeugung an Kristallen

Das Huygenssche Prinzip liefert:

Maximale Intensität tritt unter denjenigen Richtungen auf, unter welchen sich die Elementarwellen, die von den  $N$  verschiedenen Spalten ausgehen, konstruktiv überlagern (konstruktive Interferenz).

Folglich muß der Gangunterschied  $d \cdot \sin \alpha$  zwischen den Wellenfronten, die von benachbarten Spalten ausgehen, ein Vielfaches der Wellenlänge, d.h.  $z \cdot \lambda$  betragen ( $z = 0, 1, 2, \dots$ ). Es ist also

$$\sin \alpha_{max}(z) = \frac{z\lambda}{g}$$

mit  $z$  der Ordnung des Spektrums.

**Bemerkung:**

Die 0.Ordnung gehört zum geometrischen Bild in Vorwärtsrichtung. In allen anderen Ordnungen, d.h.  $z > 0$  entsteht ein "Spektrum" der Lichtquelle. Weißes Licht wird in seine Bestandteile (unterschiedlicher Wellenlänge) zerlegt. Grund dafür ist, daß die Lagen  $\alpha_{max}(z)$  von der Wellenlänge abhängen. Rotes Licht (größere Wellenlänge) wird stärker gebeugt als blaues Licht (anders als beim Prisma !!).

**Feststellung:**

Die Intensitätsmaxima sind sehr scharf. Sie sind umso schärfer, je größer die Anzahl der Spalte  $N$  ist.

**Begründung:**

Wir untersuchen, um welchen Winkel  $\Delta\alpha$  man aus der Vorwärtsrichtung herausgehen muß, damit Auslöschung auftritt. Für Auslöschung ist erforderlich, daß für  $\Delta\alpha$  die Strahlen aus dem 1. und  $N$ .Spalt einen Wegunterschied von  $\lambda$  haben. Dann gibt es zu jedem Spalt zwischen 1 und  $\frac{N}{2}$  einen Spalt aus der oberen Hälfte (zwischen  $\frac{N}{2}$  und  $N$ ), für den der Wegunterschied gerade  $\frac{\lambda}{2}$  ist. Daher löschen sich die Kugelwellen paarweise aus. Für  $\Delta\alpha$  gilt dann

$$\sin(\Delta\alpha) = \frac{\lambda}{Ng}$$

Zum Vergleich:

Das Maximum zu  $z = 1$  kommt erst bei

$$\sin \alpha_{max}(z = 1) = \frac{\lambda}{g}$$

Folglich sind die Maxima sehr scharf. Man kann auch zeigen, daß für alle Winkel zwischen  $\alpha = 0$  und  $\alpha_{max}(z = 1)$  praktisch Auslöschung auftritt.

**Bemerkung:**

Nach wie vor liefert die Beugung an jedem einzelnen Spalt für sich eine Beugungsfigur. Sie ist viel breiter als der Abstand zweier Hauptmaxima. Mit ihr ist die Gitterintensität moduliert.

## 11.6 Optische Abbildung: Geometrische Optik

**Problemstellung:**

- Bestimmung des Lichtweges (Strahlenganges) in optischen Geräten
- Grundlagen ihrer Konstruktion

**Ausgangspunkte:**

- Geradlinige Ausbreitung der Wellennormalen ("Lichtstrahlen") in homogenen Medien
- Umkehrbarkeit des Strahlenganges
- Gültigkeit von Reflexions- und Brechungsgesetz
- Unabhängigkeit sich überlagernder Strahlen (Vernachlässigung von Interferenzen)

**Vernachlässigungen in der geometrischen Optik:**

- Interferenzeffekte (Überlappung von Wellenfeldern)
- Beugungserscheinungen (an Bündelbegrenzungen durch Blendenöffnungen, Schirm)
- Wellenfelder hoher Intensität (nichtlineare Erscheinungen)

**Optische Abbildung:**

Es stellt sich die Frage nach dem Ziel:

1. Die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Strahlen eines Lichtbündels sollen idealerweise in einem Bildpunkt zusammentreffen (Streng genommen läßt die Beugung dies nicht zu.).
2. Wenn die Gegenstandspunkte in einer Ebene liegen, dann soll dies auch für die Bildpunkte gelten.

**Situation:**

Wir betrachten vereinfachend zunächst einen Gegenstandspunkt, der auf der optischen Achse (o.A) liegt. Dann soll der zugehörige Bildpunkt auch auf o.A. liegen.

**Skizze:**

Die Forderung ist, daß für alle von  $G$  ausgehenden Strahlen, die Bildweite  $b$  gleich groß ist. Oder anders ausgedrückt:

$b$  muß bei vorgegebenem  $g$  von  $r$  unabhängig sein.

Es gilt:

$$\alpha + \beta + (180^\circ - \delta) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \delta$$

Nun ist

$$\frac{r}{g} = \tan \alpha \approx \alpha$$

$$\frac{r}{b} = \tan \beta \approx \beta$$

Somit folgt

$$\alpha + \beta \cong r \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \right)$$

und damit

$$\delta = r \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \right)$$

**Diskussion:**

Bei vorgegebenem  $g$  wird  $b$  genau dann von  $r$  unabhängig, wenn  $\delta$  proportional mit  $r$  zunimmt, d.h.

$$\delta = \text{const.} \cdot r.$$

Analoge Überlegungen können auch für Punkte gemacht werden, die nicht auf der o.A. liegen. Die Proportionalitätsforderung läßt sich (näherungsweise) mit Hilfe von Linsen erreichen.

**Definition:**

Eine *optische Linse* ist ein Glas- bzw. Kunststoffkörper, der durch Kugelflächen begrenzt ist.

**Begründung:**

Wir fassen die Linse als ein Prisma auf, bei dem der Dachwinkel  $\gamma$  von  $r$  abhängt, d.h.  $\gamma = \gamma(r)$ .

Wir haben mit  $R$  als Krümmungsradius der Linse:

$$\begin{aligned}\delta &\cong \gamma(n-1) \\ \alpha + \beta &= \delta \\ \frac{r}{R} &= \tan \gamma \approx \gamma\end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen

$$\frac{r}{g} + \frac{r}{b} = \gamma(n-1)$$

und damit wegen  $\gamma = \frac{r}{R}$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{R}(n-1)$$

**Diskussion:**

$b(g)$  ist näherungsweise unabhängig von  $r$ , wie für eine optische Abbildung erforderlich. Wir wählen

$$g = \infty \text{ (parallele einfallende Strahlen)}$$

Somit ist

$$\frac{1}{b_\infty} = \frac{1}{R}(n-1)$$

**Definition:**

Die zu  $g = \infty$  gehörige Bildweite  $b_\infty$  wird mit *Brennweite*  $f$  bezeichnet.

Es ergibt sich die wichtige Linsengleichung:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

**Definition:**

Die reziproke Brennweite  $\frac{1}{f}$  heißt *Brechkraft*  $D$ . Es ist

$$D = \frac{n-1}{R}$$

Die SI-Einheit ist  $m^{-1} = 1$  Dioptrie = 1dpt.

**Bildkonstruktion:**

Die beiden Brechungen können näherungsweise durch nur eine Brechung an der Mittelebene der Linse (Hauptebene) erreicht werden (dünne Linse). Die Bildkonstruktion erfolgt unter Verwendung von drei ausgezeichneten Strahlen:

1. Gegenstandsseitiger Parallelstrahl:  
geht nach der Brechung durch den bildseitigen Brennpunkt  $f_b$ .
2. Mittelpunktstrahl:  
geht ungebrochen durch die Linsenmitte

3. Gegenstandsseitiger Brennstrahl:  
verläuft nach der Brechung parallel zur o.A.

**Definition:** Der *Abbildungsmaßstab*  $V$  ist definiert als

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1$$

mit  $G$  der Gegenstandsgröße,  $B$  der Bildgröße,  $g$  der Gegenstandsweite und  $b$  der Bildweite.

**Definition:** Sammellinse

Gegenstand und Bild liegen auf verschiedenen Seiten der Linse. Es liegt eine reelle Abbildung vor, d.h. das Bild kann auf einem Schirm sichtbar gemacht werden.

**Definition:** Zerstreuungslinse

Es entsteht ein virtuelles Bild im Gegenstandsraum, d.h. die Strahlen scheinen von einem (virtuellen) Bild im Gegenstandsraum auszugehen.

**Dicke Linsen:**

Bei ihnen gelten die Abbildungsgesetze nur dann, wenn man zwei Hauptebenen einführt, zwischen denen alle Strahlen als achsenparallel angenommen werden.



# Kapitel 12

## Atome in elektromagnetischen Feldern

### 12.1 Energetische Struktur von Atomen

#### 12.1.1 Energieaufnahme und -abgabe durch Atome

Man beobachtet z.B. beim Wasserstoffatom im Spektrometer diskrete Linienspektren. Folglich wird die Lichtenergie nur bei einigen diskreten Frequenzen emittiert, deren Werte von der Atomsorte abhängen.

**Speziell für das H-Atom:**

$$\nu = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

mit  $m = 1, 2, 3, \dots$  und  $n = 2$  im sichtbaren Bereich.

**Definition:**

Die Konstante  $R_H$  heißt *Rydberg-Konstante* und ist

$$R_H = 3,288 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

**Definition:**

Die ausgestrahlten Linien bilden die *Balmer-Serie*.

**Franck-Hertz-Versuch:**

Im Franck-Hertz-Versuch wird untersucht, wie die Energieaufnahme durch die Atome erfolgt (erst dann kann sie in Form elektromagnetischer Strahlung abgegeben werden).

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Glühkathode. Die dort austretenden Elektronen werden durch die angelegte Beschleunigungsspannung zwischen Gitter und Kathode beschleunigt. Das Potential der Anode wird so gewählt, daß zwischen Anode und Gitter für die Elektronen, die durch das Gitter hindurch beschleunigt wurden, eine Bremspannung anliegt. Gemessen wird der Strom über die Anode. Die Beschleunigungsstrecke ist mit einem Gas wie z.B. Hg-Dampf, Edelgase etc. gefüllt.

Als Ergebnis erhält man allgemein einen mit steigender Beschleunigungsspannung ansteigenden Strom. Allerdings zeigen sich bei bestimmten diskreten Werten starke "Einbrüche" in der Kennlinie. Diese diskreten Werte haben auf der Abszisse den Abstand  $\Delta U$ .  $\Delta U$  hat charakteristische Werte, die von der Gasfüllung abhängen.

**Deutung:**

Sobald die kinetische Energie der Elektronen

$$W_{kin} = eU_B = \frac{1}{2}mv^2$$

größer als die Anregungsenergie eines Zustandes ( $e\Delta U$ ) im Atom wird, geben die Elektronen genau diese Energiemenge an das Atom ab. Dadurch wird ein Elektron im Atom auf einen Zustand höherer Energie angehoben. Dazu ist die Energie  $e\Delta U$  notwendig. Folglich ist  $e\Delta U$  die Anregungsenergie des Atoms. Sie kann anschließend als elektromagnetische Strahlung der Frequenz  $\nu$  gemäß

$$h\nu = e\Delta U$$

abgegeben werden. Grund für die Einbrüche in der Kennlinie ist, daß die Elektronen soviel ihrer kinetischen Energie an ein Atom abgegeben haben, daß sie die Bremsspannung nicht mehr überwinden können und somit nicht zum Anodenstrom beitragen.

**Speziell für das H-Atom:**

Die möglichen Energiezustände lassen sich schreiben als

$$W_n = hR_H \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\dots)$$

**Energieniveaus bei Neon-Atom:**

Die Anregungsenergie beträgt vom Grundzustand zu 3p (10 Niveaus)  $\approx 19eV$ . Diesen Energieverlust mißt man beim Franck-Hertz-Versuch. Eine Übergang mit Emission im sichtbaren Bereich findet von 3s in den Grundzustand statt.

**12.1.2 Bohrsches Atommodell**

Das Bohrsche Atommodell liefert eine erste (nicht vollständig richtige) Erklärung für die Energiewerte  $W_n$ , die ein Elektron im H-Atom annehmen kann. Es gibt bessere Modelle (in der Quantenmechanik), die aber wesentlich mehr Formalismus erfordern. Sie bauen aber auf dem Bohrschen Atommodell auf.

**Grundvorstellung:**

- einfach positiv geladener Atomkern
- Das Elektron ist im Coulomb-Feld des Protons gebunden (wie Planeten im Gravitationsfeld der Sonne).
- Das Elektron sollte eine Kreisbahn mit Radius  $r_n$  durchlaufen.

Um die experimentellen Befunde verstehen zu können, hat Bohr gefordert:

1. Es gibt bestimmte Bahnen ( $r_n$ ), auf denen das Elektron keine Energie in Form elektromagnetischer Strahlung abgibt (s. beschleunigte Ladung, Synchrotronstrahlung).
2. Energie wird nur abgegeben, wenn das Elektron einen Übergang zwischen zwei verschiedenen Bahnen macht (d.h.  $r_n \rightarrow r_m$  stattfindet.).



3. Auf den zugelassenen Bahnen kann der Bahndrehimpuls nur ganz bestimmte Werte haben:

$$L_n = n \frac{h}{2\pi} \text{ mit } n=1,2,\dots,$$

wobei gilt (Kreisbahn)

$$L_n = m_e r_n v_n \text{ (1.Bohrsches Postulat)}$$

Oft schreibt man kurz

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

4. Wenn das Elektron von einer zugelassenen Bahn  $r_n$  auf eine andere,  $r_m$ , übergeht, dann wird die Energiedifferenz ( $W_n - W_m$ ) in Form elektromagnetischer Strahlung abgestrahlt:

$$W_n - W_m = h\nu \text{ (2.Bohrsches Postulat)}$$

### Berechnung der Energieniveaus:

Die möglichen Bahnradien erhält man aus dem Kräftegleichgewicht, d.h. die Zentripetalkraft ist die Coulomb-Kraft.

$$\Rightarrow \frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_n^2}$$

mit  $Q_1 = -e$  und  $Q_2 = +e$ .

Mit dem 2.Bohrschen Postulat

$$L_n = n\hbar$$

erhält man

$$r_n = \frac{n^2 \epsilon h^2}{\pi m_e e^2}$$

### Definition:

$n$  heißt *Hauptquantenzahl*.

Ferner ist

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon n \hbar}$$

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich zusammen aus seiner kinetischen Energie  $W_{kin}$ :

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_n^2$$

und der potentiellen Energie  $W_{pot}$ . Es ist

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Für die potentielle Energie gilt

$$W_{pot} = - \int_{r_n}^{\infty} F(r) dr,$$

d.h. bis auf ein Vorzeichen gleich der Arbeit, um  $m_e$  von der Bahn  $r_n$  gegen die Coulomb-Kraft

$$F(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

ins Unendliche zu bringen. Es ergibt sich

$$W_{pot} = -\frac{e^4 m_e}{4\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

und somit für die Gesamtenergie:

$$W_{ges} = W_n = -\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Das Minuszeichen gibt an, daß das Elektron mit dieser Energie im Kernfeld gebunden ist.

Die Energieänderung für einen Bahnwechsel berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} W_{pot}(n \rightarrow m) &= \int_{r_n}^{r_m} F(r) dr = \int_{r_n}^{r_m} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \\ \Rightarrow \Delta W_{pot} = W(n \rightarrow m) &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_m} \right) = \frac{e^4 m_e}{4\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Die natürlich gleichzeitig stattfindende Änderung von  $W_{kin}$  ist

$$\Delta W_{kin} = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Für die Gesamtenergie gilt also:

$$\Delta W_{ges} = (\Delta W_{pot} - \Delta W_{kin}) = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

und folglich

$$\Delta W_{ges} = (W_n - W_m)$$

Wir schließen daraus, daß die möglichen Energiezustände sind:

$$W_n = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

### Diskussion:

Das Bohrsche Atommodell läßt die Berechnung der Rydberg-Konstante zu. Die errechneten Atomradien stehen in guter Übereinstimmung mit solchen aus der kinetischen Gastheorie (z.B. aus der mittleren freien Weglänge von Gasatomen).

### Definition:

Der *Bohrsche Radius*  $r_1$  ist definiert Wasserstoff-Atom-Radius für  $n=1$  ( $Z=1$ ):

$$r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} m$$

## 12.2 Wechselwirkung von Atomen mit elektromagnetischer Strahlung

### 12.2.1 Emissions- und Absorptionsprozesse

Bei der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Materie tritt der Quantencharakter der Strahlung ("Photonen") deutlich in Erscheinung. Die Elementarprozesse sind grundlegend wichtig für das Verständnis der

- Planckschen Strahlungsformel
- Wirkungsweise des Lasers

Elektronen können in Atomen nur diskrete Zustände einnehmen. Es genügt in der Folge, wenn wir bei jedem Atom nur zwei Zustände  $W_1, W_2$  berücksichtigen. Die Besetzungszahlen der beiden Zustände seien  $N_1(t)$  und  $N_2(t)$ . Diese Besetzungen können sich bei der Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung ändern. Wir betrachten jetzt die diversen Wechselwirkungsprozesse:

- Absorption
- Spontane Emission
- Induzierte Emission

**Situation:**

Wir betrachten die Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld der Frequenz  $\nu$ , für die gilt

$$h\nu = W_2 - W_1$$

**Absorption:**

Die Zahl der Übergänge per Zeit,  $\frac{dN_1}{dt}$ , vom Zustand  $W_1$  in den Zustand  $W_2$  ist

$$\frac{dN_1}{dt} \sim \varrho(\nu)$$

und

$$\frac{dN_1}{dt} \sim N_1(t)$$

d.h. proportional zur Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und zur momentanen Besetzung von  $W_1$ .

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -B_{12}N_1\varrho(\nu)$$

**Definition:**

$B_{12}$  heißt *Einstein-Koeffizient* für Absorption.

**Induzierte Emission:**

Durch ein Photon  $h\nu$  kann ein Übergang von  $W_2$  nach  $W_1$  ausgelöst werden. Dabei wird ein Photon der Energie  $h\nu = W_2 - W_1$  frei.

$$\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2(t)\varrho(\nu)$$

**Definition:**

$B_{21}$  heißt *Einstein-Koeffizient* für induzierte (stimulierte) Emission.

**Diskussion:**

- Induzierte Emission und Absorption sind "Umkehrprozesse", d.h. wir setzen

$$B_{21} = B_{12}$$

Folglich finden Absorption und induzierte Emission mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt.

- Das zusätzliche Photon wird in die gleiche Richtung wie das anregende Photon emittiert. Die einfallende Lichtwelle polarisiert die angeregten Atome und regt sie zu erzwungenen Schwingungen an ("atomare Dipole"). Jeder Dipol emittiert in Phase bevorzugt in Richtung der anregenden Welle. Folglich ist der Beitrag zum Strahlungsfeld  $\varrho(\nu)$  kohärent.

### Spontane Emission:

Wird ein Atom durch Energiezufuhr in den Zustand  $W_2$  gebracht, so geht es nach einer bestimmten Zeit wieder in den Zustand  $W_1$  über. Im zeitlichen Mittel erfolgt dies nach einer Zeit  $\tau$ . Dies geht vor sich, ohne daß ein induziertes Strahlungsfeld vorhanden ist (spontane Emission).

$$\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N(t)$$

### Definition:

$A_{21}$  ist der *Einstein-Koeffizient für spontane Emission*. Es gilt:

$$A_{21} = \frac{1}{\tau}$$

### Begründung:

Die Lösung der Ratengleichung für diese spontane Emission lautet

$$N_2(t) = N_{2,0} \exp(-A_{21}t) = N_{2,0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

d.h.  $\tau$  ist die Zeit, nach der  $N_2$  auf  $\frac{1}{e}N_{2,0}$  zurückgegangen ist.

Auch bei der spontanen Emission wird ein Photon emittiert. Die Austrahlung erfolgt aber in beliebige Richtungen. Sie besitzt auch keine zeitliche Beziehung zu den Schwingungen eines eventuell vorhandenen Strahlungsfeldes. Somit erfolgt die spontane Emission inkohärent.

## 12.2.2 Thermisches Gleichgewicht: Plancksche Strahlungsformel

Wir betrachten das Gleichgewicht zwischen elektromagnetischem Strahlungsfeld und Materie. Im Gleichgewicht müssen per Zeit genausoviele Übergänge von  $1 \rightarrow 2$  (Absorption) wie von  $2 \rightarrow 1$  (spontane+induzierte Emission) erfolgen:

$$\Rightarrow B_{12}N_1\varrho(\nu) = B_{21}N_2\varrho(\nu) + A_{21}N_2$$

oder mit  $B_{12} = B_{21} = B$

$$B(N_1 - N_2)\varrho(\nu) = A_{21}N_2$$

oder nach  $\varrho(\nu)$  aufgelöst

$$\varrho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B}}{\frac{N_1}{N_2} - 1}$$

Das Verhältnis  $\frac{N_1}{N_2}$  wird durch den Boltzmann-Faktor

$$\exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kt}\right)$$

gegeben.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} &= \exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kt}\right) \\ \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} &= \exp\left(-\frac{h\nu}{kt}\right) \\ \Rightarrow \varrho(\nu) &= \frac{A_{21}}{B} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}\end{aligned}$$

**Diskussion:**

- $\varrho(\nu)$  hat bereits die Form der Planckschen Strahlungsformel
- Das Verhältnis  $\frac{A_{21}}{B}$  kann man aus dem Spezialfall von  $\varrho(\nu)$  für sehr kleine  $\nu$  erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{A_{21}}{B} &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \\ \Rightarrow \varrho(\nu) &= \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Der Zusammenhang für kleine  $\nu$  heißt *Rayleigh-Jeans-Gesetz*. Dieser Ausdruck für  $\frac{A_{21}}{B}$  zeigt, daß das Verhältnis von spontaner Emission proportional zu  $\nu^3$  ansteigt.

### 12.2.3 Laser

**Definition:**

*Laser* ist die Abkürzung des Ausdrucks

Light Amplification by stimulated Emission of Radiation.

Er dient als Lichtquelle für kohärentes Licht.

**Prinzip:**

Absorption und Emission sind gleich wahrscheinlich. Eine Verstärkung des elektromagnetischen Feldes wird also erreicht, wenn die Zahl  $N_2$  der Atome im Zustand  $W_2$  größer als die Zahl  $N_1$  der Atome im Zustand  $W_1$  ist (Besetzungsinversion).

Es erfolgt dann eine kohärente Verstärkung des elektromagnetischen Feldes:

Der Betrag der stimulierten Emission zum Strahlungsfeld ist in Phase mit dem bereits vorhandenen Strahlungsfeld. Dieses wird also bei Vorliegen einer Besetzungsinversion verstärkt. Besetzungsinversion liegt im thermischen Gleichgewicht nicht vor.

Die Tatsache, daß  $N_2 > N_1$  ist, erfordert die Störung des Gleichgewichtes durch gezielte Überbesetzung von Zustand  $W_2$  durch Elektronen-Anregung.

**Prinzipieller Aufbau von Lasern:**

Alle Laser bestehen aus drei Komponenten:

1. Lasermedium, in dem die Lichtverstärkung stattfindet.
2. Pumpquelle:  
Sie ist der Energielieferant für das Lasermedium.

### 3. Rückkopplungs-Mechanismus:

Erhöhung der Verweildauer des Laserlichtes im Lasermedium (im einfachsten Falle zwei Spiegel senkrecht zur Laserachse)

### Energie-Niveau-Schema des Lasermediums:

Das Lasermedium muß mindestens 3, besser 4 Elektronenniveaus haben, damit durch optisches Pumpen eine Besetzungsinversion zwischen dem oberen/unteren Laserniveau erzeugt werden kann.

### Mögliche Ernergie-Niveau-Schemata:

3-Niveau-System:

Die Lebensdauern in  $E_3$  und  $E_2$  müssen kurz sein, denn nur dann kann kontinuierlich Energie in diese Zustände gepumpt werden. Andernfalls kommt es durch spontane Emission zu einem Gleichgewicht zwischen dem oberen und dem unteren Niveau.

4-Niveau-System:

Der Vorteil dieses Schemas liegt darin, daß auch das untere Laser-Niveau praktisch leer ist. Dadurch läßt sich viel leichter die Besetzungsinversion zwischen den beiden Niveaus erhalten.

### Wirkungsweise des Lasers:

Was passiert, wenn die Pumpquelle eine Bestzungsinversion erzeugt hat ?

1. Es erfolgt spontane Emission in alle Richtungen.  
Die emittierten Photonen induzieren Übergänge in weiteren angeregten Atomen.
2. Sei das Lasermedium ein langer Zylinder. Dann erfolgen längs der Zylinderachse wesentlich mehr induzierte Übergänge als senkrecht dazu. Folge ist ein lawinenartiges Anwachsen der Strahlung in Achsenrichtung. Die Inversion wird dadurch schnell abgebaut. Folge ist ein kurzer Lichtimpuls in Richtung der Zylinderachse.
3. Man bringt das Lasermedium in die Rückkopplungsanordnung. Die Aufenthaltsdauer der Photonen wird dadurch wesentlich erhöht (verhundertfacht).  
Im Wellenbild:  
Zwischen den Spiegeln bildet sich eine stehende Welle aus, deren Intensität anwächst. Dazu muß der Spiegelabstand ein Vielfaches der halben Lichtwellenlänge sein. Die Wahrscheinlichkeit für induzierte Emission wird dadurch wesentlich erhöht.

### Lasertypen:

He-Ne-Laser:

Das Lasermedium dieses Lasers ist ein He-Ne-Gasgemisch, in dem eine Glimmentladung brennt. Als Pumpquelle dienen die Stöße energiereicher Elektronen mit den He-Atomen, verbunden mit der Anregung "metastabiler" Zustände des Heliums. Der Rückkopplungsmechanismus besteht aus zwei konkaven Spiegeln. Im Detail ist das Entladungsrohr mit zwei Fenstern abgeschlossen, die unter dem Brewster-Winkel zur Ausbreitungsrichtung stehen. Als Konsequenz wird Licht mit einem Feldvektor in der Spiegelebene ungehindert durchgelassen, der Anteil mit dazu senkrechtem Feldvektor wird aus dem Resonator hinausreflektiert.

Der Laser liefert also polarisiertes Licht !!

### Funktionsprinzip:

Durch Elektronenstöße werden He-Atome in metastabile Zustände angeregt. Die Energie kann

nur durch Stöße mit Ne-Atomen abgegeben werden. Die Stöße besetzen die oberen Laser-Niveaus 5s und 4s. Die Laserübergänge sind:

$$\begin{aligned}5s \rightarrow 3p & : 632,8nm \text{ (Sichtbarer Bereich)} \\4s \rightarrow 3p & : 1150nm \text{ (IR-Bereich)}\end{aligned}$$

Das untere Laserniveau (3p) wird schnell durch spontane Emission in das 1s-Niveau entleert. Die Besetzung des 1s-Zustandes wird durch Wandstöße abgebaut. Wichtig ist deshalb, daß der Durchmesser des Entladungsrohres dort nicht zu groß sein darf (1...4mm Durchmesser).

Termschema:

**Details zu den Lasereigenschaften:**

- Wirkungsgrad  $\approx 0,1\%$
- Ausgangsleistung  $P \approx 1mW$
- gute Kohärenzeigenschaften
- gute Strahlqualität