Skriptum zur Vorlesung

Experimentalphysik II

von Prof. Kempter

für Physiker und Chemiker

Sommersemester

Clausthal-Zellerfeld, August/September 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 8

Wechselwirkungen und Felder

8.1 Elektromagnetische Induktionserscheinungen

8.1.1 Einführung

Bereits bekannt:

Verknüpfung von elektrischen und magnetischen Feldern:
Ein stationäres $\overrightarrow{E}$-Feld (hervorgerufen durch einen Gleichstrom) ist mit einem zeitlich konstanten $\overrightarrow{H}$- Feld verknüpft. (*Ströme sind von magnetischen Feldern umgeben.*)

Neu:

Es wird nun die Umkehrung, also die Erregung elektrischer Felder (und damit eletrischer Spannungen) durch zeitlich veränderliche magnetische Felder, untersucht.

Definition 8.1: ELEKTROMAGNETISCHE INDUKTION

> *Unter elektromagnetischer Induktion versteht man die Erregung von eletrischen Spannungnen durch zeitlich veränderliche magnetische Felder.*

→ Magnetfelder, die sich zeitlich ändern, sind mit elektrischen Feldern verknüpft.

Experimentell wird eine Feldspule ein- und ausgeschaltet. Um die Spule wird eine Induktionsschleife gelegt und die induzierte Spannung gemessen. Es folgt:

1. Zeitlich veränderliches $\overrightarrow{E}$-Feld:

Das Feld $\overrightarrow{E}(t)$ ruft einen Ladungstransport/ Ladungsverschiebung hervor, ausgelöst durch die Kraft $F_e = q \cdot \overrightarrow{E}$. Eine Ladungsverschiebung bedeutet die Entstehung einer Spannung $U_i(t)$.

Der Nachweis wird mit Hilfe eines *Oszillographen (s. unten)* erbracht.

2. Zeitlicher Verlauf von $\overrightarrow{H}(t)$ der Feldspule:

   Der Stromverlauf $I(t)$ in der Feldspule (welche das $\overrightarrow{H}$-Feld erzeugt) liefert einen Spannungsabfall am Widerstand im Stromkreis der felderzeugenden Spule. Auch hier wird der Oszillograph zur Messung verwendet.

Definition 8.2: OSZILLOGRAPH

> *Ein Oszillograph ist ein Gerät, mit dem zeitabhängige elektromagnetische Signale, $I_\sim(t)$ und $U_\sim(t)$, registriert werden können.*

Die Verwendung des recht komplizierten Oszillographen ist noch nicht nötig. Noch genügt es festzustellen, wieviel Ladung (Q) sich in der Zeit, in der sich das $\overrightarrow{H}$-Feld (und damit auch das $\overrightarrow{E}$-Feld) ändert, transportiert worden ist.

Bestimmung von Q:

Es fließe $I_i(t)$.
→ Am Ende der Induktionsschleife baut sich $U_i(t)$ auf.
→ Man schließe die Schleife am Galvanometer mit dem Widerstand R_i an.
Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt:

$$U_i(t) = R_i \cdot I_i(t)$$

Integration über die Zeit liefert:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U_i(t)dt &= R_i \cdot \int_0^\infty I_i(t)dt \\ &= R_i \cdot Q \end{aligned}$$

→ Das Galvanometer muss so betrieben werden, dass es den Spannungsstoß $\int_0^\infty U_i(t)dt$ misst: Er ist proportional zu der Ladung Q.

Definition 8.3: BALLISTISCHES GALVANOMETER

> *Ein Strommessgerät (Drehspulinstrument), welches einen Ausschlag proportional zum Spannungsstoss anzeigt, heißt ballistisches Galvanometer.*

→ Ein ballistisches Galvanometer wird zur Ladungsmessung verwendet.
Man erhält ein solches Instrument, wenn man ein Drehspulinstrument verwendet, bei dem gilt: Schwingungsdauer der Drehspule $\gg$ Dauer von $U_i(t)$.

8.1.2 Grundversuche zur elektromagnetischen Induktion

Erste Versuchsreihe zur Induktion

In den folgenden Versuchen soll die Induktionsspannung $U_i(t)$ als Funktion des Magnetfeldes am Ort der Induktionsspule $H(t)$ untersucht werden.

Versuchsaufbau für alle Versuche:

- **Feldspule** mit Stromversorgung vom Oszillographen zur Messung des Feldstroms
- **Induktionskreis**, bei dem $U_i(t)$ über ein ballistisches Galvanometer gemessen wird

Versuch 1: Ein-/ Ausschalten des Feldstroms
Die Feldspule wird Ein- und Ausgeschaltet. Dadurch wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert.

Versuch 2: Bewegung der eingeschalteten Feldspule
Die stromdurchflossene Spule induziert eine Spannung, wenn sie in die Leiterschleife geschoben wird.

Versuch 3: Ersetzung der Feldspule durch Stabmagneten
Anstelle einer stromdurchflossenen Spule wird nun ein Stabmagnet in die Leiterschleife geschoben.

Die Versuche werden noch mit einer veränderten Windungszahl N der Induktionsspule durchgeführt. Man erkennt:

$$U_i(t) \propto N$$

Es werden schlicht mehr Ladungen am Ort von $H(t)$ bewegt.

Zusammenfassung:

- $U_i(t)(\neq 0)$ entsteht dann, wenn sich $H(t)$ am Ort der Induktionsspule zeitlich ändert.
- Beim Auf-/Abbau von $H(t)$ hat $U_i(t)$ umgekehrte Vorzeichen.

Quantitativ gilt die Proportionalität

$$U_i(t) \propto N \cdot H(t) \frac{d}{dt} \tag{8.1}$$

Zeitliche Änderung von B(t)

Versuch: *Rechteck- Impulse*

Erneut wird der Ein-/ Ausschaltvorgang betrachtet. Nun wird der Spulenstrom jedoch rechteckförmig moduliert.

- Φ_m wird ebenfalls rechteckförmig moduliert.
- $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ zeigt Spannungsspitzen mit umgekehrtem Vorzeichen beim Ansteigen/ Abfallen des Feldstroms.
- Die Steilheit der Impulse ist durch die Steilheit der Flanken der Rechteck-Impulse vorgegeben.

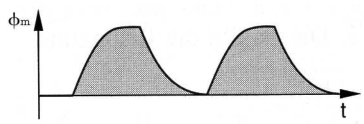


Abbildung 8.1: Modulierter magnetischer Fluss Φ_m

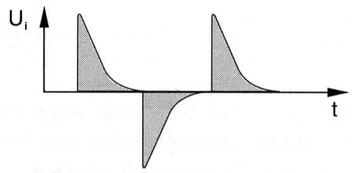


Abbildung 8.2: Induzierte Spannung U_i

<u>Diskussion der Grafik</u>:

$$\begin{aligned} U_i(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ \int_0^T U_i(t)dt &= -\int_0^{\Phi_m^{max}} d\Phi_m \\ \Phi_{max} &= -\int_0^T U_i(t)dt \end{aligned}$$

Die Fläche unter U_i(t) liefert die Änderung von Φ_m während der Modulation von $\Phi_m(t)$.

Zweite Versuchsreihe zur Induktion

Untersuchung von $U_i(t)$, wenn, bei konstantem $\overrightarrow{H}$-Feld, die Größe der von $\overrightarrow{H}$ durchsetzten Fläche der Induktionsspule geändert wird.

Dies kann durch

1. Änderung der Orientierung der Spulenfläche, relativ zur $\overrightarrow{H}$- Richtung erfolgen.
2. Änderung der Größe der Fläche erfolgen.

Versuch: *Drehung der Induktionsschleife im konstanten $\overrightarrow{H}$- Feld.*
Diese Anordnung ist technologisch interessant, wenn sich die Achse $\widehat{A}_i$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω relativ zu $\overrightarrow{H}$ dreht.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist:} \quad U_i(t) &= U_0 \cdot \cos(\omega t) \\ \text{wobei:} \quad A_i(t) &= A_i^{max} \cdot cos(\omega t) \\ &\Rightarrow \text{Grundprinzip zur Erzeugung von Wechselspannungen} \end{aligned}$$

Versuch: *Induktion bei bewegtem Leiter im Magnetfeld*
Anordnung:

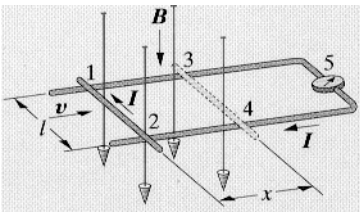


Abbildung 8.3: Änderung der vom Feld durchsetzten Fläche

Eklärungen: *1,2:Position1 des Stabes; 3,4:Position2 des Stabes; 5:Spannungsmessgerät; x:Bewegung des Stabes; l:Abstand der Laufbügel*

Die vom $\overrightarrow{B}$-Feld (*Vgl. Skript I*) durchsetzte Fläche A_i verändert sich, wenn der Stab um x verschoben wird.
Hier lässt sich die induzierte Spannung U_i mit Hilfe der Lorentzkraft diskutieren (Ladungen bewegen sich parallel zu $\overrightarrow{v}$). Es gilt: $\overrightarrow{F}_L \perp \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{B}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= \tfrac{\overrightarrow{F}_L}{l} &&= \left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right] \\ \Rightarrow \quad U_i &= E \cdot l &&= \left|\left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right]\right| \cdot l \end{aligned}$$

Induzierte Spannung(1)

$$U_i = v \cdot B \cdot l \tag{8.2}$$

Diskussion

$$\underbrace{A_i}_{=l\cdot x} \text{ ändert sich um: } \frac{dA_i}{dt} = l \cdot \frac{dx}{dt} = c \cdot t$$

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus der ersten Versuchsreihe vermuten wir nun, dass es auf die *zeitliche* Änderung von $\frac{d}{dt}(B \cdot A)$ ankommt.
Hier ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(B \cdot A) &= B \cdot \frac{dA}{dt} \\ &= B \cdot l \cdot v \end{aligned}$$

Also ergibt sich:

Induzierte Spannung(2)

$$|U_i(t)| = B \cdot l \cdot v = \frac{d}{dt}(B \cdot A) \tag{8.3}$$

Zusammenfassung der Ergenisse der beiden Versuchsreihen

- Die bewegte Ladung Q und die Spannung U_i hängen ab von:
  1. der zeitlichen Änderung $\frac{dH}{dt}$
  2. der zeitlichen Änderung $\frac{dA}{dt}$

  So folgt:

  $$\Rightarrow \qquad U_i(t) \propto \frac{d}{dt}(H(t) \cdot A(t))$$

- Des weiteren lässt sich feststellen: Für ein beliebiges N, also für eine beliebige Windungszahl der Induktionsspule, gilt:

  $$|U_i(t)| = N\frac{d}{dt}(H(t) \cdot A(t))$$

- Die Drehung der Induktionsschleife zeigt: Relevant ist die relative Orientierung der Normalen $\widehat{a}$ auf A zu $\overrightarrow{H}$.

  Es folgt als Ergebnis:

$$|U_i(t)| = N\frac{d}{dt}(\overrightarrow{H}(t) \cdot \underbrace{\overrightarrow{A}(t))}_{=A(t)\cdot\widehat{a}(t)}$$

- Vorzeichen der induzierten Spannung. Es gilt:

$$U_i(t) = \underbrace{-}_{Beachte!} N\frac{d}{dt}(H(t) \cdot A(t))$$

$U_i(t)$ wird durch einen Strom in der Induktionsschleife verursacht, dessen Richtung jener des felderzeugenden Stoms entgegengesetzt ist (Lenz'sche Regel).

Versuch: *Zur Lenz'schen Regel*

- Aluminiumring als Induktionsspule
- Feldspule

Ergebnis: Der Al-Ring wird weggeschleudert.
→ Ströme im Al-Ring und der Feldspule sind einander entgegengesetzt gerichtet.

Verallgemeinerung:

Sei A_i nicht eben.
⇒ Man zerlege $\overrightarrow{A}$ in kleine Elemente $\overrightarrow{dA}$ und summiere alle Beiträge $\overrightarrow{B}(t) \cdot \overrightarrow{dA}$ auf:

$$U_i(t) = -N \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_{A_i} \overrightarrow{dA}(t) \cdot \overrightarrow{B}(t)\right)$$

Definition 8.4: Der Magnetische Fluss Φ

Durch die Beziehung

$$\Phi(t) = \int_A \overrightarrow{dA}(t) \cdot \overrightarrow{B}(t)$$

ist der magnetische Fluss definiert.

So folgt für die Spannung U_i:

$$U_i(t) = -N \cdot \frac{d}{dt}\Phi(t)$$

Messung der magnetischen Feldstärke

Statt indirekt über die Messung von $\overrightarrow{H}(t)$, können wir die physikalische Größe B(t) direkt über die elektromagnetische Induktion bestimmen:

1. Richtung von $\overrightarrow{B}$:
   Induktionsschleife wird in $\overrightarrow{B}$ solange gedreht, bis U_i maximal wird (Dann ist die Flächennormale $\widehat{a}$ parallel zu $\overrightarrow{B}$.).

2. Betrag von $\overrightarrow{B}$:
   Aus der Größe des Spannungsstoßes beim Einschalten von $\overrightarrow{B}$.

Praktische Messung: Verwendung einer *Hall- Sonde*.

SI-Einheit von $\overrightarrow{B}(t)$
Sie ergibt sich aus jener für $\overrightarrow{H}$ (mit $1\frac{A}{m}$) und μ_0 (mit $1\frac{Vs}{Am}$)

$$\text{zu} \quad 1\frac{Vs}{m^2} \quad \stackrel{!}{=} \quad 1 \text{ Tesla} \quad \stackrel{!}{=} \quad 1 \text{ T}$$

8.1.3 2. Maxwell‘sche Gleichung

Verallgemeinerung des Induktionsgesetzes zur 2. Maxwell‘schen Gleichung

Wiederholung des Induktionsgesetzes

- Man gibt die Fläche A vor.
- Durch $\overrightarrow{A}$ greift ein magnetischer Fluss $\Phi = \int_A (\overrightarrow{dA} \cdot \overrightarrow{B})$.
- $\overrightarrow{A}$ wird durch die Randkurve (K) begrenzt.

Induktionsgesetz bedeutet dann: An den Enden der Induktionsschleife, die durch (K) gegeben ist, wird U_i gemessen:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_i &= -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -N \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_A (\overrightarrow{dA} \cdot \overrightarrow{B(t)})\right) \end{aligned}$$

Verallgemeinerung

Man drücke U_i durch das elektrische Feld $\overrightarrow{E}$ (längs (K)!) aus, welches für die Ladungsverschiebung verantwortlich ist.

$$U_i = \int_{(K)} d\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{E}(t)$$

Das Integral wird längs (K) berechnet.

Diskussion
Für die Existenz von $\overrightarrow{E}$ ist die Existenz eines Leiters längs (K) unwesentlich. Durch den Leiter wird lediglich, über die Messung von U_i, die Existenz von $\overrightarrow{E}$ nachgewiesen.

<u>So folgt:</u> Jedes zeitlich veränderliche magnetische Feld $\overrightarrow{B}(t)$ ruft an seinem Ort ein zeitlich veränderliches $\overrightarrow{E}$-Feld hervor.

$$\oint_{(K)} d\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{E}(t) = -N \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_A (\overrightarrow{dA} \cdot \overrightarrow{B}(t))\right)$$

Sei B_n die Normalkomponente in Richtung von $\widehat{a}$. Dann folgt für den Fluss:

$$\int_{(A)} \overrightarrow{B}(t) = \int_{(A)} dA \cdot B_n$$

Definition 8.5: 2. MAXWELL'sche GLEICHUNG

$$\oint_{(K)} d\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{E}(t) = -N \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_A (d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}(t))\right) \tag{8.4}$$

Die obige Gleichung, welche $\overrightarrow{B}(t)$ und $\overrightarrow{E}(t)$ verknüpft, heißt zweite MAXWELL*'sche Gleichung.*

8.1.4 Das Betatron

Demonstration der 2. Maxwell'schen Gleichung: Das Betatron

Aufbau des Betatrons:

- Evakuiertes, kreisförmiges Rohr
- Magnetischer Fluss am Ort des Rohres: Erzeugt durch Spule mit Eisenkern

Magnetischer Fluss durch das Ringrohr: $\Phi = \pi R^2 \cdot \overline{B}$, wobei:

- $\overline{B}$: Mittelwert von $\overrightarrow{B}$ in der Ringebene
- R: Ringrohr- Radius

Durch die Primärspule wird ein Wechselstrom geschickt.

$\Rightarrow$ $\Phi(t)$ ändert sich zeitlich, wie durch B(t) vorgegeben.

$\Rightarrow$ $U_i(t) = -\dot{\Phi}(t)$

$\Rightarrow$ El. Feld $\overrightarrow{E}(t)$ in Ringebene

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{U_i}{2\pi R} = & -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi R} \\ E &= & -\frac{1}{2} R \cdot \dot{\overline{B}} \end{aligned}$$

Die Newton'sche Grundgleichung liefert die Impulsänderung, die die Elektronen im Ringrohr erfahren.
Der aufgenommene Impuls beträgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv) &= -eE = \frac{1}{2} \cdot e \cdot R \cdot \dot{\overline{B}} \\ mv &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot R \cdot \overline{B} \end{aligned} \tag{8.5}$$

(Beschleunigung beginnt mit $v = 0$ bei $B = 0$)(Beachte: $m = \frac{m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}!$)

Nebenbedingungen: Die Elektronen sollten eine Kreisbahn mit R (Sollkreis) durchlaufen, unabhängig von v.
Die Kräftebilanz zwischen

$Trägheitskraft\ = \frac{m \cdot v^2}{R}$

$Lorentzkraft\ = e \cdot v \cdot B(R)$

lautet:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} \stackrel{!}{=} e \cdot v \cdot B(R)$$

Nach Gleichung (8.5) muss gelten:

$$B(R) = \frac{1}{2}\overline{B}$$

Dies kann durch geeignete Formgebung der Magnetpole erreicht werden.

Die erreichte Endenergie:

$$\begin{aligned}
v \ll c \quad &: \\
W &= \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \\
W &= \frac{\frac{1}{8} \cdot e^2 R^2 \overline{B}^2}{m_0} \\
v \sim c \quad &: \\
W &= \frac{m_0 \cdot c^2}{\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} - 1} \\
W &= m_0 \cdot c^2 \left(\frac{e \cdot R \cdot \overline{B}}{2m_0 \cdot v} - 1 \right) \\
W &\stackrel{(v\approx c)}{\approx} \frac{1}{2} e \cdot c \cdot R \cdot \overline{B}
\end{aligned}$$

Zahlenwerte für das Betatron:

$$\begin{aligned}
B &= 1T \\
R &= 0,2m \\
W &= 30MeV \\
\text{Die Grenzenergie beträgt} &\sim 200MeV
\end{aligned}$$

Begründung: Die aufgenommene Leistung aus dem elektromagnetischen Wirbelfeld $\overrightarrow{B}(t)$ kompensiert dann gerade die von der beschleunigten Ladung abgestrahlte Leistung.

8.1.5 Materie im Magnetfeld: Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Betrachtung der Materie, die magnetisiert werden kann, im Magnetfeld der Feldspule.

Versuch: *Feldspule mit Eisenkern*
Eine Feldspule erhält bei konstantem Spulenstrom einen Eisenkern. Es wird der Ein-/ Ausschaltvorgang betrachtet.

$\rightarrow$ Mit Materie, hier dem Eisenkern, ist das $\overrightarrow{B}$-Feld nicht mehr allein durch den Spulenstrom und dem damit verknüpften $\overrightarrow{H}$-Feld verbunden.

Das heißt: Es gilt **nicht** mehr:

$$\overrightarrow{B}(t) = \mu_0 \cdot \overrightarrow{H}(t)$$

sondern mit Materie gilt:

$$\overrightarrow{B}(t) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \overrightarrow{H}(t)$$

Definition 8.6: PERMEABILITÄTSZAHL

Die materialabhängige Konstante μ heißt Permeabilitätszahl.

Mit $\overrightarrow{H}$ ist das von außen angelegte, durch den Spulenstrom hervorgerufene Feld anschaulich:

- Jedes Atom stellt einen Kreisstrom dar (umlaufende Elektronen).
- Jeder Kreisstrom ist mit einem magnetischen Dipolmoment $\overrightarrow{P}_m$ verknüpft. Es gilt: $|\overrightarrow{P}_m| = I \cdot A$. Dabei ist I der Kreisstrom der bewegten Elektronen, A die Fläche der Bahnkurve.
- Zu einem magnetischen Dipol gehört ein Magnetfeld.
- Alle diese atomaren Felder addieren sich zu einem makroskopischen Magnetfeld.
- Diese atomaren Felder werden durch ein äußeres Feld $\overrightarrow{H}$ beeinflusst.
- Charakterisierung erfolgt durch die Magnetisierung $\overrightarrow{M}$ der Materie.

Im Allgemeinen gilt:

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H} + \underbrace{\mu_0 \overrightarrow{M}}_{A}$$

A = durch $\overrightarrow{H}$ hervorgerufene Magnetisierung.

Definition 8.7: Magnetisierung

Die vektorielle Größe $\overrightarrow{M}$ heißt Magnetisierung.

Physikalische Ursache der Magnetisierung: Fortwährende Beeinflussung atomarer Dipole im äußeren Feld.

Diskussion:

$\overrightarrow{M}$ ist im Allgemeinen proportional zum angelegten Feld:

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \cdot \overrightarrow{H}$$

Definition 8.8: Magnetische Suszeptibilität

χ heißt magnetische Suszeptibilität.

Somit gilt jetzt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \mu_0 \cdot \overrightarrow{H} + \mu_0 \cdot \overbrace{\chi_m \cdot \overrightarrow{H}}^{\overrightarrow{M}} \\ &= \mu_0(1+\chi_m)\overrightarrow{H} \end{aligned}$$

wegen $\overrightarrow{B} \stackrel{!}{=} \mu_0\mu \cdot \overrightarrow{H}$ folgt:

$$\mu_0 = 1 + \chi_m$$

als Zusammenhang zwischen Suszeptibilität χ_m und Permeabilitätszahl μ

Arten des Magnetismus

Es wird unterschieden zwischen Dia-, Para- und Ferromagnetismus.

1. **Diamagnetische Materialien**

   Ohne äußeres magnetisches Feld haben die Atome einer diamagnetischen Probe kein magnetisches Moment.

   Anschaulich: Die magnetischen Momente aller atomaren Kreisströme kompensieren sich jeweils paarweise (bei gerader Elektronenzahl, z.B.: Wismut(bi)).

   Einbringen in ein Magnetfeld:

   Zur Coulomb-Kraft kommt als Zusatzkraft die Lorentzkraft hinzu, je nach Drehrichtung der Elektronen auf der jeweiligen Bahn wird die Winkelgeschwindigkeit größer/kleiner. ⇒ *Netto*-Kreisstrom um Feldrichtung wird induziert.

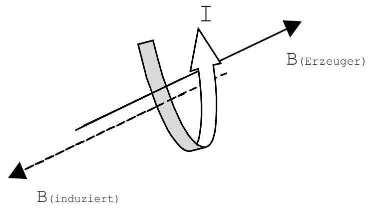


Abbildung 8.4: Lenz‘sche Regel: Entgegengesetzte Ströme

Nach der Lenz‘schen Regel gilt: Das zum Netto-Kreisstrom gehörige $\vec{B}$-Feld ist dem erzeugenden Feld entgegengerichtet:

Kreisstrom $\Rightarrow$ magnetisches Moment $\Rightarrow \vec{B}_{\text{induziert}} (= \mu_0 \cdot \chi \cdot \vec{H} \quad \widehat{=} \quad \mu_0 \cdot \vec{M})$

Zusammenfassung:

$\chi_m < 0$:

Angelegtes $\vec{H}$-Feld wird durch das induzierte Feld geschwächt, d.h. $\vec{M}$ ist zu $\vec{H}$ entgegengesetzt gerichtet.

Und aus

$\mu = 1 + \chi_m$ folgt $\mu < 1$

2. **Paramagnetische Materialien**

Atome einer Probe paramagnetischen Materials haben auch ohne äußeres Feld ein magnetisches Moment (z.B.: ungerade Elektronenzahl).

Aber: Die thermische Bewegung der Atome führt dazu, dass die magnetischen Momente ungeordnet sind $\rightarrow$ Materie ist unmagnetisch.

Einbringen in ein Magnetfeld

Die magnetischen Momente werden unter dem Einfluss des Feldes teilweise ausgericht.

$\Rightarrow$ Induziertes Zusatzfeld ($\vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{M}$) ist parallel zum angelegten Feld.

$\Rightarrow \mu > 1$

$\Rightarrow \chi_m > 0$

Merke: Die magnetische Suszeptibilität χ_m ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional:

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

3. **Ferromagnetische Materialien**

Definition 8.9: FERROMAGNETE

Ferromagnete stellen makroskopische magnetische Momente auch ohne äußeres $\overrightarrow{H}$-Feld dar.

Bei ferromagnetischen Materialien kann die thermische Bewegung die Ausrichtung der atomaren Momente nicht verhindern.

Modell von P. WEISS:

Durch gegenseitige Wechselwirkung liegen alle magnetischen Momente in den sogenannten Weiß'schen Bezirken vollständig parallel.

- Das magnetische Moment des Bezirkes ist die Summe aller ausgerichteten Einzelmomente.
- Verschiedene Weiß'sche Bezirke sind ohne äußeres Feld wahllos orientiert.
  $\Rightarrow$ Körper ist zunächst nach außen hin unmagnetisch.
- Unter der Wirkung eines äußeren Feldes klappen die Bezirke nach und nach in die $\overrightarrow{H}$-Feldrichtung ein.
- Die einmal erzielte Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke kann durch die Temperaturbewegung nicht mehr zunichte gemacht werden.
  $\Rightarrow$ Dazu wäre eine Temperatur oberhalb der *Curie*- Temperatur notwendig; dort werden ferromagnetische Stoffe dann paramagnetisch.
  Hier zwei Zahlenbeispiele für die Curietemperatur:
  1. $T_C(Fe) = 1043K$
  2. $T_C(Ni) = 631K$

Hysterese

Nach Abschaltung des äußeren Feldes $\overrightarrow{H}$ bleibt die magnetische Ordnung erhalten.

Domänenwachstum

- Domänen mit Moment parallel zum Feld wachsen auf Kosten der anderen Bezirke. (Siehe Abbildung (8.5))
- Anordnung der Grenzen der Bezirke:
  So dass möglichst wenig Energie in den Außenraum tritt
- Im Falle der vollständigen Sättigung liegt nur noch eine zum $\overrightarrow{H}$-Feld parallele Ausrichtung vor.

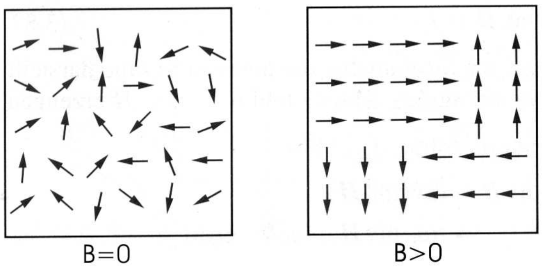


Abbildung 8.5: Wachsen der Domänen durchs Feld

Versuche zum Dia- und Paramagnetismus

Wir erhielten:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H} = \chi \cdot \mu_0 \cdot \vec{B}$$

mit

$$\left.\begin{array}{ll}\chi < 0 & \text{Dia-} \\ \chi > 0 & \text{Para-}\end{array}\right\} \text{magnetischen Stoffen}$$

Aufbau

Einbringen der Probe in ein inhomogenes $\vec{B}$-Feld

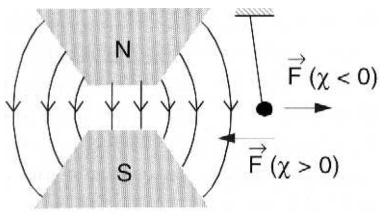


Abbildung 8.6: Verhalten der Probe im inhomogenen Feld

Im inhomogenen $\vec{B}$-Feld wirkt die Kraft $\vec{F}$ auf den magnetischen Dipol ($\vec{M} \cdot V$ ist die Summe aller Dipolmomente).

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{M} \cdot V \cdot \nabla \vec{B} \\ &= \frac{\chi}{\mu_0} \cdot (\nabla \vec{B} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

<u>Anschaulich</u>:

- Der dem Magneten näher liegende Pol (N oder S) erfährt eine größere Kraft als der weiter entfernt gelegene Pol → Nettokraft in Richtung des Feldes $\vec{B}$.

- Je nach Vorzeichen von χ wird die Probe abgestoßen/ angezogen (Siehe Abbildung (8.6)).
  - $\Rightarrow$ Diamagnetismus bei Wismut(Bi)
  - $\Rightarrow$ Paramagnetismus bei Aluminium(Al)
- Nach Untersuchung von Flüssigkeiten wird man feststellen, dass auch diese magnetisierbar sind. Beispiel: $FeCl_3$ und O_2 (beide paramagnetisch)

Wiederholung: Der Einstein- de Haas- Effekt

Zu zeigen: Magnetismus, d.h. magnetische Dipole sind immer mit Kreisströmen verknüpft.

$\Rightarrow$ Dann muss es eine Beziehung zwischen $|\overrightarrow{P}_m|$ und $|\overrightarrow{L}|$ geben.

Versuchsaufbau:
Probe wird drehbar aufgehängt und magnetisiert:

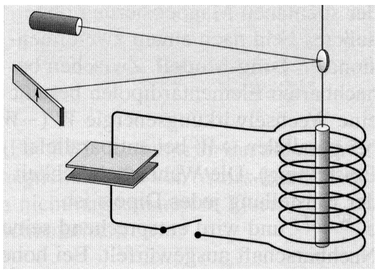


Abbildung 8.7: Einstein- de Haas- Effekt

Bei der Magnetisierung wird der Drehimpuls in die Richtung der Aufhängung übertragen. Da dieser vor der Magnetisierung nicht vorlag, muss - aufgrund der Drehimpulserhaltung - die Probe in Rotation geraten.

$$\frac{|\overrightarrow{P}_m|}{|\overrightarrow{L}|} = \frac{e}{2m}$$

Genauere Untersuchung: Einstein- de Haas- Effekt

Untersuchung der Kreisströme und der mit ihnen verknüpften Magnetisierung $\overrightarrow{M}$

Man führe ein Experiment durch, welches genau die Analogie zum *Drehschemelexperiment mit Fahrrad-Kreisel* darstellt.

Dort: Der Kreisel wird so übergeben, dass die $\overrightarrow{L}$- Achse senkrecht zu der Schemelachse steht. Wird der Kreisel aufgerichtet, so dass $\overrightarrow{L}$ und Schemelachse parallel sind, gerät der Schemel in Rotation. Der Gesamtdrehimpuls bezüglich der Schemelachse hat sich nicht verändert.

Jetzt: Man hänge einen Eisenstab in eine Spule: Anschalten des Spulenstroms bewirkt, dass die Kreisströme mit ihren Achsen in Feldrichtung gedreht werden. Dies bedeutet, dass ein Drehimpuls $\overrightarrow{L}$ in Spulenrichtung entsteht. Der Eisenstab verdrillt sich. (Jeder Kreisstrom ist mit einem magnetischen Moment $|\overrightarrow{P}_m|$ und einem Drehimplus $\overrightarrow{L}$ verknüpft.
Für den Fall, dass $\overrightarrow{P}_m$ vom Bahndrehimpuls herrührt, fanden wir die Beziehung:

$$\frac{|\overrightarrow{P}_m|}{|\overrightarrow{L}|} = \frac{e}{2m}$$

Es wird erneut Versuchsaufbau (8.7) betrachtet.

Das Ergebnis ist jedoch:

$$\begin{array}{cc} \frac{|\overrightarrow{P}_m|}{|\overrightarrow{L}|} = & \frac{e}{m} \\ nicht & \frac{e}{2m}! \end{array}$$

Damit ist zwar gezeigt, dass die Magnetisierung $\overrightarrow{M}$ mit einem Drehimpuls $\overrightarrow{L}$ um die Richtung von $\overrightarrow{M}$ verknüpft ist.

Jedoch:
Das Bild der kreisenden Elektronen trifft hier nicht zu (sonst müsste $\frac{|\overrightarrow{P}_m|}{|\overrightarrow{L}|}$ halb so groß sein)!

Das magnetische Moment ist auf den Elektronen- Spin zurückzuführen: Anschaulich kann man (nicht ganz korrekt) sagen, dass das Elektron um seine Achse rotiert.

Nachweis der Weiß'schen Bezirke

Man nimmt eine Magnetisierungskurve des Ferromagneten auf. Man misst M gegen B_a:

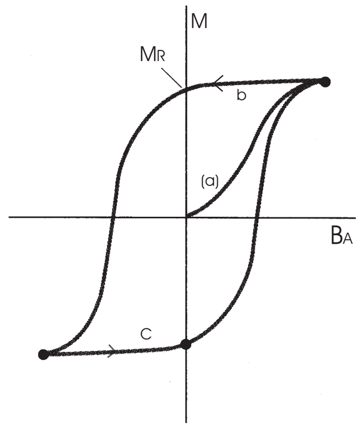


Abbildung 8.8: Hysterese- Kurve

(a) heißt jungfräuliche Kurve: Sättigung, wenn alle atomaren Dipole in Feldrichtung ausgelenkt sind.

b+c Hysterese- Kurve

$\mathbf{M}_R$ Remanenz

Misst man $M(B_a)$ sehr genau, so verläuft die Kurve nicht glatt, sondern besteht aus einer Folge von Treppenstufen:

Die Ausrichtung der atomaren Dipolmomente erfolgt nicht kontinuierlich, sondern sprungweise. (sogenannte Barkhausen Sprünge)

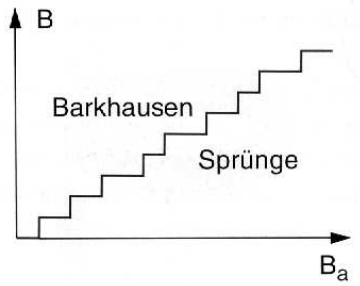


Abbildung 8.9: Treppenfunktion der Hysterese- Kurve

Erklärung: In den Weiß'schen Bezirken sind durch starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten alle atomaren Dipole eines Bezirkes parallel zueinander.

- Für $\mathrm{B}_a = 0$
  Statistische Verteilung der Richtungen der vorhandenen Weiß' schen Bezirke: $\Rightarrow$ geringe Magnetisierung (Remanenz).

- Anlegen von Mindestwert für B_a:
  Alle Magnete eines Weiß'schen Bezirkes klappen um. (Wird die zum Umklappen benötigte Arbeit aufgebracht, so erniedrigt sich die magnetische Energie; sie hängt von der Struktur des betreffenden Bezirkes ab.)

Optischer Nachweis der Weiß'schen Bezirke

Makroskopische Beobachtung des von einem Fe-Kristall (in Eisen-Thiosulfat-Lösung) reflektierten Lichtes. Die Polarisationsrichtung des Lichtes wird durch die Magnetisierung der Weiß'schen Bezirke beeinflusst.

$\Rightarrow$ Bei Beobachtung durch einen Polarisationsfilter sieht man im Mikroskop unterschiedlich helle Bereiche.

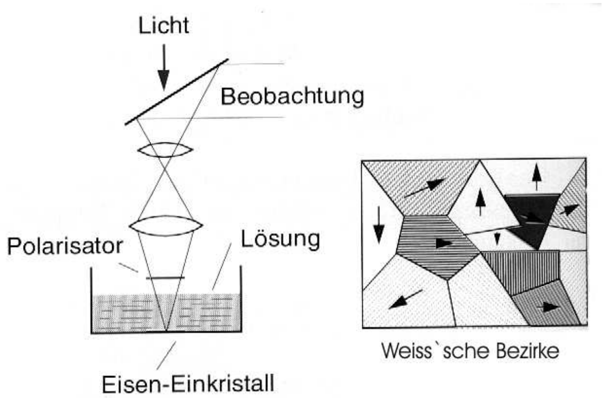


Abbildung 8.10: Aufbau Weiß'sche Bezirke

8.2 Anwendungen

8.2.1 Schaltzeichen

In den folgenden Abschniten werden einfache elektrische Schaltungen gezeigt. Hier die einzelnen Zeichen mit Erklärung.

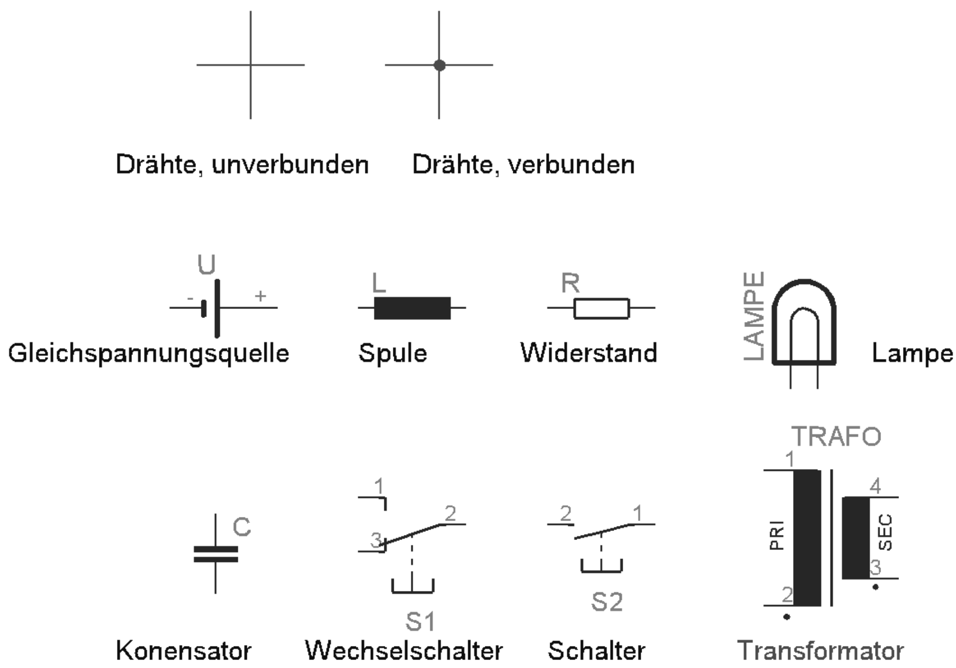


Abbildung 8.11: Schaltzeichen

8.2.2 Generator für Wechselspannungen

Es liegt vor:

- Homogenes Magnetfeld $\overrightarrow{B}$
- Leiterschleife, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht

So gilt für den magentischen Fluss, der durch die Schleife hindurchgeht:

$$\begin{aligned} \text{allgemein: } \Phi &= \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}(t) = B \cdot A \cdot \cos(\alpha(t)) \\ \Rightarrow \quad \Phi(t) &= B \cdot \pi R^2 \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Es erfolgt eine Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \text{konstant} = \omega \\ \Rightarrow \quad \alpha(t) &= \omega t \end{aligned}$$

So folgt:

Induzierte Spannung beim Generator

$$U_{ind} = -B \cdot \pi R^2 \cdot \omega t \tag{8.6}$$

Der Wirkungsgrad solcher Geräte liegt bei: $\eta \approx 1$

Induktion im Erdmagnetfeld

Versuch: *Drehung einer Leiterschleife im Erdmagnetfeld.*

a) Allein im Erdmagnetfeld.

b) Überlagerung vom Magnetfeld der Erde mit dem Feld eines Paares von Helmholtz- Spulen (zur Kompensation des Erdmagnetfeldes)

c) Zusatzfeld eines C- Magneten (Hebt Kompensation des Erdmagnetfeldes auf)

zu a) Man misst ein U_i, welches von der Beziehung

$$U_i = \frac{d\Phi}{dt} = \overrightarrow{B} \cdot \frac{d\overrightarrow{A}}{dt}$$

herrührt. Das in die Rechnung einbezogene Feld $\overrightarrow{B}$ stammt vom Erdmagnetfeld.

zu b) Erst nach Entfernen des Spulenpaares kann man eine Induktiosspannung $U_i \neq 0$ messen. Somit wird deutlich, dass das Magnetfeld der Erde durch ein geeignetes Feld (z.B. durch das der Helmholtz- Spulen) kompensiert werden kann.

zu c) Das Einbringen eines Zusatzmagneten stört das Gleichgewicht aus b).

Eigenschaften des Erdmagnetfeldes

- Der magnetische Südpol liegt in der Nähe des geographischen Nordpols - Im Norden Kanadas.

- Die magnetischen Feldlinien verlaufen am Äquator parallel zur Erdoberfläche
- An anderen Orten sind sie gegenüber der Erdoberfläche geneigt, um so stärker, je näher die Pole sind. (INKLINATION)
- Das Magnetfeld der Erde ist nicht stationär, sondern verändert sich mit der Zeit.

8.2.3 Der Transformator

Zweck: Der Transformator (im Folgenden: Trafo) hat den Zweck, Wechselspannungsamplituden wie gewünscht zu verändern.

Prinzip/ Aufbau: Zur Demonstration wird ein Versuch durchgeführt:

Zwei Spulen mit den Windungszahlen n_1 und n_2 werden an einen gemeinsamen, geschlossenen Eisenkern angelegt.

- An die Primärspule wird eine Wechselspannung $U_1(t)$ angelegt.
  - ⇒ Durch die Primärspule fließt ein Wechselstrom $I_1(t)$.
  - ⇒ Dieser Wechselstrom ist von einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\vec{B}(t)$ umgeben.
  - ⇒ Die Pirmärspule wird von einem veränderlichen magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durchsetzt ($\dot{\Phi}(t) \neq 0$).
- Dadurch wird in der Sekundärspule eine Spannung U_i induziert: Sie muss entgegengesetzt gleich wie $U_1(t)$ sein, vernachlässigt man den Ohm'schen Widerstand im Primärkreis. (KIRCHHOFF*'sche Maschenregel*)

Induzierte Spannung beim Trafo

$$U_i = -n_1\dot{\Phi}(t) = -U_1(t) \tag{8.7}$$

- In der Sekundärspule wird die Spannung $U_2(t)$ induziert:

  $$U_2(t) = -n_2 \cdot \dot{\Phi}(t)$$

  Es liegt derselbe Fluss wie durch Spule 1 vor.

Bezüglich der Windungszahlen gilt die Beziehung:

Trafo: Windungszahlen & Spannungen

$$\frac{U_1(t)}{U_2(t)} = -\frac{n_1}{n_2} \tag{8.8}$$

Der Phasenunterschied zwischen angelegter Primärspannung U_1 und der Sekundärspannung U_2 beträgt bei gleichem Wickelsinn 180°. (Bei entgegengesetztem Wickelsinn kein Phasenwinkel!)

Zusammenhang zwischen Spannung und Strom im Primärkreis

Diskussion:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\propto \mathrm{I}_1(t) \quad \text{da} \quad B(t) \propto I(t) \\ \Rightarrow U_i(t) &\propto \dot{\Phi}(t) \\ U_i(t) &= -U_1(t) \end{aligned}$$

Man nehme an:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \sin(\omega t) \\ \Rightarrow U_i(t) &\propto \omega \cos(\omega t) \\ \Rightarrow U_1(t) &\propto \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Somit sind $U_1(t)$ und $I_1(t)$ um 90° gegeneinander phasenverschoben.

Ohm'scher Widerstand im Sekundärkreis

Diskussion: Was passiert, wenn ein *Verbraucher* angeschlossen, d.h wenn in den Sekundärkreis ein Ohm'scher Widerstand R gelegt wird?

$\Rightarrow$ Es fließt ein Strom $\mathrm{I}_2(\mathrm{t})$.

$\Rightarrow$ Es wird von der Sekundärspule im Eisenkern ein magnetisches Feld durch $\mathrm{I}_2(\mathrm{t})$ hervorgerufen, welches sich zeitlich ändert.

$\Rightarrow$ Der magnetische Fluss Φ ändert sich.

$\Rightarrow$ Rückwirkungen auf den Primärkreis:

- Es fließt auf der Primärseite ein Strom $\mathrm{I}_1(\mathrm{t})$, der nicht mehr um $\pi/2$ zur Spannung $\mathrm{U}_1(\mathrm{t})$ phasenverschoben ist.

Der Energiesatz muss erfüllt bleiben: Die auf der Sekundärseite entnommene Leistung muss auf der Primärseite bereitgestellt werden. So folgt:

Trafo: Zusammenfassung

$$\underbrace{I_1 \cdot U_1}_{P_1} = \underbrace{I_2 \cdot U_2}_{P_2} \tag{8.9}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{n_1}{n_2} \tag{8.10}$$

Versuch: *Demonstration der Wirkungsweise eines Trafos*
Folgende Schaltung wird aufgebaut:
An der Primärseite eines Transformators wird eine Gleichspannungsquelle U_0 angelegt und eine Glühlampe L_1 parallel eingebaut. An der Sekündärseite des Trafos wird ebenfalls eine Lampe L_2 angeschlossen.

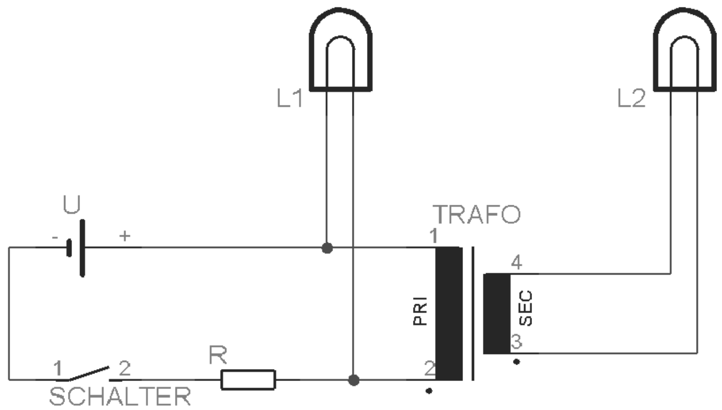


Abbildung 8.12: Demonstration Trafo

Schließen des Schalters/ Einschalten:

- $U_i(t)$ und $U_2(t)$ sind proportional zur Änderung des magnetischen Flusses, $\dot{\Phi}(t)$

⇒ L_1 und L_2 leuchten kurzzeitig hell auf, solange U_i und U_2 hinreichend groß sind.

⇒ Anschließend: nur L_1 leuchtet noch, da eine Gleichspannung an L_1 anliegt (mit Stromfluss $I_i = \frac{U_0}{R}$). Die Lampe L_2 leuchtet nicht mehr, da ohne ein zeitlich verändertes Feld kein Stom im Sekundärkreis induziert wird.

Öffnen des Schalters/ Ausschalten:

- U_i und U_0 sind nun gleichgerichtet:

⇒ L_1 leuchtet besonders hell auf

⇒ L_2 leuchtet noch so lange (kurz!) auf, wie U_2 hinreichend groß bleibt. Dabei ist erneut der zeitlich veränderte Fluss ($\dot{\Phi}(t)$) relevant.

Anwendungen aus zwei Transformatoren

Versuch: *Der Tesla- Trafo*

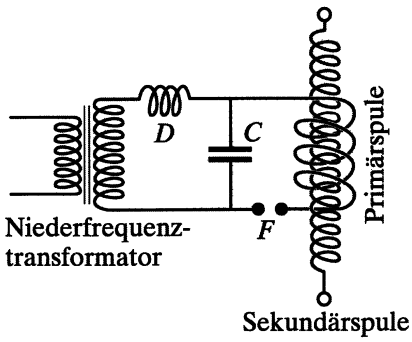


Abbildung 8.13: Tesla- Trafo

- Niederfrequenztrafo lädt Kondensator C auf
- C entlädt sich über Primärspule des Tesla- Trafos und die Funkenstrecke F (und zwar oszillatorisch).
- Um den Stromkreis mit dem Tesla- Trafo schwingen die Ladungen hochfrequent ($\nu > 10^6 Hz$) hin und her.

⇒ Um den Ort der Sekundärspule ändert sich der Fluss sehr schnell.

 ⇒ Es wird eine sehr hohe Spannung U_i an den Enden der Sekundärspule induziert.

Bemerkungen zu dem Tesla- Trafo:

- Der Spannungsabfall über die Ne- Röhre reicht aus, um eine Entladung zu zünden.
- Ersetzt man die Sekundärspule durch eine Spule mit wenigen Windungen, dann werden in ihr große hochfrequente Ströme induziert.

- $\overset{\triangledown}{\circ}$ Hochfrequente Ströme mit einer Frequenz $\nu > 10^5 Hz$ sind- auch bei $10A$- für den menschlichen Körper ungefährlich. (Anders als bei Gleichströmen!)

- Anschaulich: Die Ladungsschwerpunkte in den Molekülen des Gewebes *wackeln* lediglich mit kleiner Amplitude um ihre Gleichgewichtslage. Das ist ohne Konsequenzen.

Versuch: *von* ELIHU THOMSON

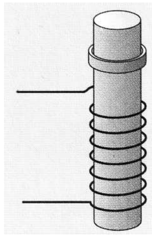


Abbildung 8.14: Versuch von E. THOMSON

Es wird einer Spule mit Eisenkern ein Aluminiumring aufgesetzt und ein Wechselstrom eingeschaltet.

- Der Kurzschlussstrom im Ring ist dem Strom in der Primärspule entgegengerichtet.
- Ströme stoßen sich ab. Gegenseitige Beeinflussung der Elektronen durch das Magnetfeld, das der andere Leiter erzeugt. Der Ring wird weggeschleudert.
- Ein Al- Ring mit Schlitz wird nicht weggeschleudert.

Versuch: *Hörnerblitzableiter*

Hier: Die Durchschlagsstrecke bildet die Sekundärspule des Transformators. Die Entladung zündet.
Der sich bildende Bogen steigt durch

1. <u>Auftrieb</u>, den die erhitzte Luft erfährt
2. <u>Lorentzkraft</u> des Magnetfeldes auf die Ladungen in Bogen

Apparative Eigenschaften: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{500}{25000} \quad \rightarrow \quad U_2 \approx 10kV$

Versuch *Wirkungsweise eines Trafos*

Es soll der Einfluss des magnetischen Flusses experimentell veranschaulicht werden. An der Sekundärseite eines Trafos wird eine Glühlampe angeschlossen.

1. Sekundärspule neben Eisenjoch:

⇒ Lampe dunkel

2. Sekundärspule auf offenem Eisenjoch:

   ⇒ Lampe glimmt

3. Sekundärspule in geschlossenem Eisenjoch:

   ⇒ Lampe hell
   - Voller Fluss Φ durchsetzt Sekundärspule

Wirbelströme

In dem Eisenkern eines Trafos besteht ein zeitlich veränderliches $\overrightarrow{B}$- Feld. Es ist ringförmig von einem elektrischen Wirbelfeld umgeben (2. Maxwell'sche Gleichung).
Die Elektronen im Eisenkern werden in Bewegung gesetzt (Wirbelströme). Dabei entsteht Wärme, weil die Elektronen eine *Reibung* an den Gitterionen erfahren (Wirbelstromverluste). Eine praktische Anwendung dieses Sachverhaltes findet sich in der Werkstoffheizung.

Versuch: *Wirbelstrombremse*

Auf die im elektrischen Wirbelfeld in Bewegung geratenen Elektronen wirkt im $\overrightarrow{B}$- Feld die Lorentzkraft, die der Geschwindigkeit, mit der der Leiter im Magnetfeld bewegt wird, entgegengesetzt gerichtet ist.
⇒ Abbremsung

8.3 Selbstinduktion und Energieinhalt magnetischer Felder

Motivation/ Ziel:
Man verallgemeinere die Überlegung, die man bei der Betrachtung/ Diskussion der Primärstromkreise des Trafos gemacht hat.

Dort:
Man stellte fest, dass durch den Stromfluss in der Spule ein magnetischer Fluss erzeugt wurde, der zu einer Induktionsspannung U_i Anlass gab, welche die Erregerspannung kompensierte.

Neu:

Es folgt die Verallgemeinerung auf beliebige Bauteile: Jedes Bauteil hat eine mehr oder minder große **Induktivität** L, sie charakterisiert das Verhalten von Bauteilen bei Wechselstromfluss.

8.3.1 Induktivität L

Eine zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ treibt den Strom $I(t)$ durch die Spule L.

- ⇒ Die stromdurchflossene Spule wird von einem axialen Magnetfeld $H(t)$ durchsetzt; dies folgt aus dem Durchflutungsgesetz: $H \cdot l = N \cdot I$
- ⇒ Mit $H(t)$ ist die magnetische Induktion verknüpft: Sie ist zeitabhängig, da dies auch $I(t)$ ist.
- ⇒ Nach dem Induktionsgesetz induziert der zeitlich veränderliche Fluss $\Phi(t) = B(t) \cdot A$[1] eine Spannung $U_1(t)$ über dem Bauteil.

An den Enden der Spule liegt die Spannung $U_i(t)$ an:

$$U_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -nA\frac{dB(t)}{dt}$$

Es gilt:

$$B(t) \propto I(t)$$

(Folgerung aus dem Durchflutungsgesetz)

Es folgt:

$$U_{ind} \propto \frac{dB}{dt} \propto \frac{dI}{dt}$$

[1] Mit A= Spulenquerschnitt

Einführung der neuen Konstante L:
Es gelte:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Wenn der Spannungsabfall am Widerstand vernachlässigbar ist, gilt:

$$U_{ind} = U(t) \qquad \text{(nach KIRCHHOFF)}$$

Induktivität einer langen Spule

Für eine lange stromdurchflossene Spule mit der Länge l, dem Querschnitt A und der Windungszahl N ist

$$L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l}$$

8.3.2 Magnetfelder als Energiespeicher

Man stelle fest, dass zum Aufbau eines Magnetfeldes die Quellenspannung $U(t)$ den Strom $I(t)$ durch die Spule *treiben* muss.

→ D.h.: Zu jedem Zeitpunkt muss die Spannung $U(t)) = -U_i(t)$ zur Verfügung stehen.

→ Zum Aufbau des Magnetfeldes muss die Arbeit

$$W_e = \int_0^\infty dt I_i(t) \cdot U(t)$$

verrichtet werden.

→ Diese Arbeit muss nach dem Energieerhaltungssatz als magnetische Feldenergie W_m im Magnetfeld der Spule gespeichert sein.

Selbstinduktion

Man berechne W_m für den Fall, dass der Strom nach dem Einschalten der Spannung von $I = 0$ auf $I = I_0$ steigt:

$$\begin{aligned}
W_m &= -\int_0^\infty dt(-U_i(t)) \cdot I(t) \\
&= \int_0^\infty dt(L \cdot \dot{I}(t)) \cdot I(t) \\
&= L \cdot \int_0^\infty dt \frac{dI}{dt} \cdot I(t) \\
&= L \cdot \int_0^{I_0} dI \cdot I(t) \\
&= \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2
\end{aligned}$$

So gilt:

Magnetische Feldenergie

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2 \tag{8.11}$$

Diskussion

In der Beziehung ist jedoch die magnetische Feldenergie W_m noch mit der Induktivität L verknüpft. Gesucht wird nun ein Ausdruck, der von der Induktivität L unabhängig ist und stattdessen nur vom Magnetfeld abhängt.

Für eine lange Spule ist der Zusammenhang zwischen I_0 und dem Magnetfeld H in der Spule:

$$H \cdot l = N \cdot I_0$$

Eine lange Spule hat die Induktivität L

$$L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l}$$

So folgt mit $H = \frac{N \cdot I_0}{l}$:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\mu_0 \cdot A \cdot l \cdot H^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \cdot V \cdot H^2 \end{aligned}$$

wobei V das Volumen der Spule ist, welches vom $\overrightarrow{H}$-Feld durchsetzt wird.

So folgt für die Energiedichte $\frac{W_m}{V} = w_m$:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot H^2$$

Diskussion

Die Energiedichte w_m ist unabhängig von der Form des vom $\overrightarrow{H}$-Feld durchsetzten Volumens V. Deshalb gilt diese Formel allgemein für den materiefreien Raum ($\mu_r = 0$).

Ist magnetische Materie im Volumen vorhanden, gilt:

$$w = \frac{1}{2} B \cdot H$$

wobei $|\overrightarrow{B}| = \mu_0 \mu_r \cdot |\overrightarrow{H}|$ ist.

Übergang zu folgenden Problematiken

Es ist bekannt, dass eine stromdurchflossene Spule L einen Energiespeicher darstellt. Man stelle nun fest, dass es eine bestimmte Zeit dauert, um diesen Energiespecher zu füllen bzw. zu entleeren.

- Induktivitäten L sind Energiespeicher - Speicher für magnetische Energie - solange ein Strom fließt.
- Zum Füllen des Speichers - zum Aufbau des Feldes - muss Arbeit verrichtet werden.

  Dieser Aufbau des Feldes braucht eine endliche Zeit.

Versuch: *Stromanstieg im LR- Kreis*

Der Stromanstieg im LR-Kreis zur Demonstration der Zeit für den Feldaufbau: Verzögertes Aufleuchten der Glühlampen.

8.4 Wechselstromkreise

8.4.1 Induktivitäten - Ein-/ Ausschaltvorgänge in Stromkreisen

Man betrachte zunächst einen Stromkreis, der aus den Bauelementen

- Spannungsquelle U_0
- Schalter S
- Widerstand R
- Induktivität L

besteht.

Versuch: *Ein-/ Ausschaltvorgänge*

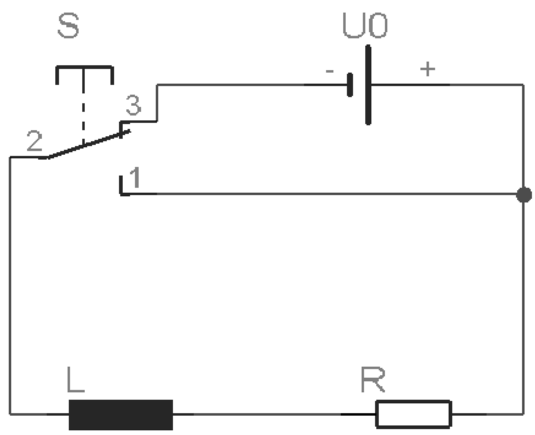


Abbildung 8.15: Versuchsaufbau

Betrachtung:

(a) Ausschaltvorgang

Was passiert, wenn der sich auf Stellung 3 befindliche Schalter auf Position 1 umgelegt wird, d.h. wenn die Spannungsquelle abgeklemmt wird, nachdem sich zuvor ein Magnetfeld in der Spule hat aufbauen können?

(b) Einschaltvorgang

Umlegen des Schalters von Position 1 auf 3. Aufbau eines Magentfeldes.

Vorüberlegung zu Ausschaltung

Die Zeit τ bis zum Zusammenbrechen des Stroms $I_0 \rightarrow I = 0$ wird um so größer sein,

- je größer der magnetische Speicher, also L, ist.
- je kleiner R ist, denn um so länger dauert es, bis die magnetische Energie in Wärme umgesetzt wird:

Wir können vermuten, das gelten wird:

$$\tau \propto \frac{L}{R}$$

Zu a) Der Ausschaltvorgang

Bei $t = 0$ wurde der Schalter von Position 3 auf 1 umgelegt. Es fließt der Kurzschlussstrom $I(t)$. Zu ermitteln ist nun die Zeit, in der I_0 auf $I = 0$ fällt.

Anwendung der Kirchhoff‘schen Maschenregel:

- Über L wird die Spannung U_i induziert.

  $$U_i = \quad - \quad L \cdot \dot{I}(t)$$

- Die Gesamtspannung im Kreis muss Null ergeben ($U_R + U_i = 0$)
- So folgt für die Spannung:

  $$U_R = R \cdot I(t)$$

  Nach Kirchhoff:

  $$\begin{aligned} -L \cdot \dot{I}(t) &= R \cdot I(t) \\ &\text{oder} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -\frac{R}{L} \cdot I(t) \end{aligned}$$

Diskussion

Man erhält zur Bestimmung von I(t) eine Differentialgleichung. In ihr sind der Strom und seine zeitlichen Ableitungen $\frac{dI(t)}{dt}$ verknüpft.
Die Lösung lautet:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

mit $\tau = \frac{L}{R}$
Dabei ist

- $I_0 = I(t = 0)$ der Maximalstrom
- $\tau = \frac{L}{R}$ eine *Zeitkonstante*, die angibt, nach welcher Zeit $t = \tau$ der Kurzschlussstrom $I(t)$ auf den Wert $I_0 \cdot \frac{1}{e}$ abgefallen ist.

Zu b) Der Einschaltvorgang

Der Strom $I(t)$ muss vom Wert $I = 0$ auf einen Endwert I_0 anwachsen. Dabei baut sich in der Induktivität L ein Magnetfeld auf.

Aus der Spannungsbilanz erhalte man nun:

$$\begin{aligned} U_0 + U_i &= I(t) \cdot R \\ U_0 - L \cdot \dot{I} &= I(t) \cdot R \end{aligned}$$

Lösung der DGL:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

mit $\tau = \frac{L}{R}$

Zahlenbeispiel zu Einschalt-/ Ausschaltvorgängen

Sei

- $L = 0,2H$
- $R = 10\Omega$

Aus $\tau = \frac{L}{R}$ folgt:

$$\tau = \frac{0,2H}{10\Omega} = \frac{0,2\frac{Vs}{A}}{10\frac{V}{A}} = 0,02s$$

Wie man sieht, führt das Einsetzen der SI- Einheiten zur richtigen Einheit Sekunden.

Anwendung des LR- Kreises: Zünden von Leuchtstofflampen

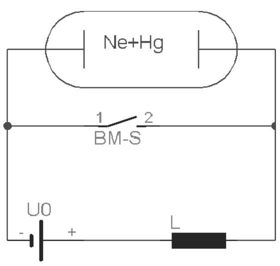


Abbildung 8.16: Zündung von Leuchtstoffröhren

Man betrachte Abb.8.16:

Anstelle eines üblichen Schalters wurde hier ein Bimetall- Schalter (BM-S) verwendet. Durch den Stromfluss durch ihn hindurch erwärmt sich das Metall, biegt sich und öffnet somit den Schalter.

Beim Einschalten von U_0 fließt zunächst der gesamte Strom I mit

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{BM-S}}$$

durch den Schalter und die Induktivität L.

Beim Erwärmen öffnet der Schalter.
$\Rightarrow$ Das schnelle Abschalten von I induziert über L und damit auch über die Röhre eine hohe Spannung U_i proportional zu $\dot{I}(t)$. Diese hohe Spannung reicht zum Zünden der Gasentladung aus.

8.4.2 Signalübertragung durch RL- Kreise

Periodische Rechteck-Impulse am RL-Glied - Der Tiefpass

Ein Rechteckimpuls lässt sich erzeugen, wenn man einen Schalter periodisch öffnet und schließt.
Zunächst soll der Spannungsverlauf $U_R(t)$ am Widerstand R betrachtet werden:

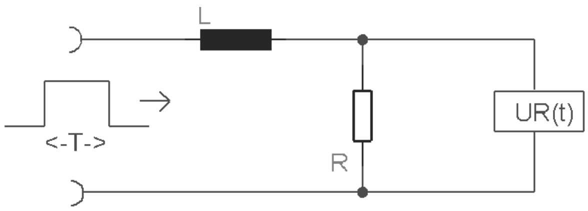


Abbildung 8.17: Rechteckimpuls am RL- Tiefpass

Man betrachte den Spannungsverlauf $U_R(t)$ proportional zu $I(t)$.

Hier die Ergebnisse für das Einschalten von $I(t)$:

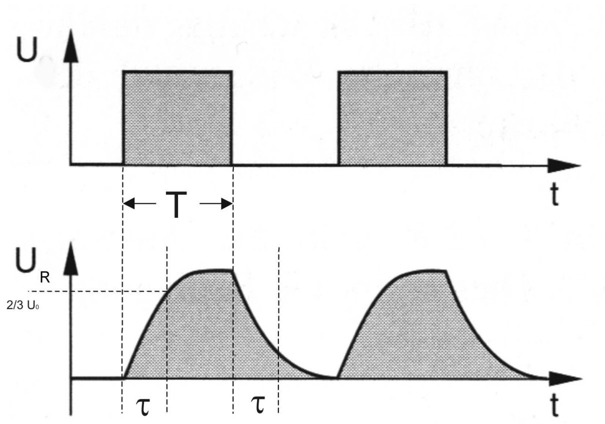


Abbildung 8.18: Einschaltvorgang

Damit das an R abgegriffene Signal noch *einigermaßen* wie ein Rechteck aussieht, muss für die Pulsdauer T des Signals gelten:

$$T \gg \tau = \frac{L}{R}$$

Diskussion

Mit solch einer RL- Schaltung kann man hinreichend lange Singnale (Impulse) übertragen. Es liegt ein RL-**Tiefpass** vor.

Periodische Rechteck-Impulse am RL-Glied - Der Hochpass

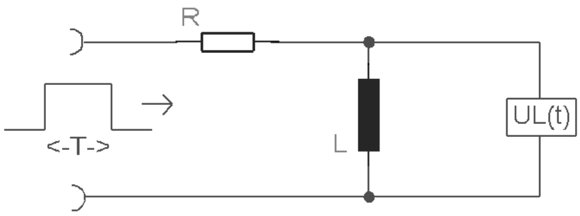


Abbildung 8.19: Rechteckimpuls am RL- Hochpass

Die Messung an der Induktivität L liefert folgendes Ergebnis:

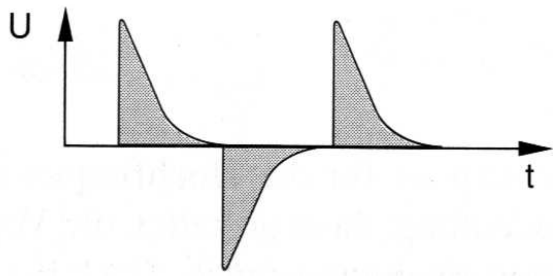


Abbildung 8.20: Einschaltvorgang

Wie Abbildung 8.20 schon vermuten lässt, kommen nur hinreichend kurze Impulse einigermaßen unverzerrt hindurch.

Es gilt für den Spannungsverlauf:

$$U_L(t) = -L \cdot \dot{I}(t)$$

Berechnung von $\dot{I}(t)$ für den Ein-/ Ausschaltvorgang:

- Einschalten:

$$\begin{aligned}
\dot{I}(t) &= \frac{1}{L} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
&= \frac{R}{L} \cdot \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
&= \frac{U_0}{L} \exp\left(-\frac{tR}{\tau}\right)
\end{aligned}$$

- Ausschalten:

$$\dot{I}(t) = -I_{t=0}\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\Rightarrow$ Nur Pulse mit $T \ll \tau$ kommen einigermaßen unverzerrt hindurch.

8.4.3 Wechselstromwiderstände von Induktivitäten und Kapazitäten

Induktivität L im Wechselstromkreis

Man betrachte folgende Schaltung:

- Wechselspannungsquelle $U_\sim(t)$
- Induktivität L
- Widerstand R (klein; nur nötig um den Strom im Kreis zu messen)

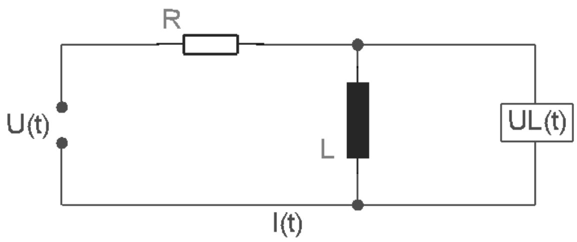


Abbildung 8.21: Induktivität im Wechselstromkreis

Es wird nun der Zusammenhang zwischen der Spannung $U_L(t)$ und dem Strom $I_\sim(t)$ im Kreis erörtert. Insbesondere beachte man, was an der Induktivität L geschieht, wenn man einen Wechseltrom

$$I_\sim(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$$

fließen lässt.

$$\begin{aligned} U_i(t) = -L \cdot \dot{I}(t) &= -L \cdot I_0 \omega \cdot \cos \omega t \\ &= \omega L I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Die Spannung eilt dem Strom um $\frac{1}{4}$-Periode vor: Sie ist um 90° gegenüber dem Strom phasenverschoben.

Versuch: *Phasenlage von $U_i(t)$ und $I(t)$*

Untersucht wird die Phasenlage von $U_i(t)$ und $I(t)$ an Wechselstromkreisen mit Induktivitäten. Die Phasenverschiebung ist deutlich erkennbar.

Definition 8.10: INDUKTIVER WIDERSTAND R_L

$$R_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_0}{I_0} = \omega L$$

Vergleich von induktivem und ohm‘schem Widerstand

Der induktive Widerstand R_L darf nicht mit einem ohm‘schen Widerstand verwechselt werden.

Frage: *Wodurch unterscheidet sich physikalsch überhaupt ein ohm‘scher und ein induktiver Widerstand?*

1. **Der Ohm‘sche Widerstand:**

   Stromarbeit per Zeit, d.h. umgesetzte Leistung.

   $$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

   Sie ist nötig, um den Strom durch R fließen zu lassen.

   Mit $I(t) = I_0 \sin \omega t$ und $U(t) = U_0 \sin \omega t$ folgt:

   $$P(t) = I_0 \cdot U_0 \sin^2 \omega t$$

   Gemittelt über mindestens eine volle Periodendauer folgt:

   Leistung am ohm‘schen Widerstand

   $$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} I_0 \cdot U_0 \neq 0$$

   Diese Leistung wird im Form von Wärme umgesetzt. Der Widerstand wird warm.

2. **Der induktive Widerstand:**

   Am induktiven Widerstand L wird keine Leistung im Zeitmittel umgesetzt:

   $$P_\sim(t) = \underbrace{U_L(t)}_{\omega L I_0 \cdot \cos \omega t} \cdot \underbrace{I_\sim(t)}_{I_0 \cdot \sin \omega t}$$

   Man sieht:

   $$\overline{P_\sim(t)} = 0$$

   Gemittelt wurde über mindestens eine volle Periode des Wechselstroms.

   Physikalisch: Was passiert?

   Eine bestimmte Zeit (wenn ein Magnetfeld aufgebaut wird) wird Arbeit verrichtet; diese jedoch wird beim Abbau des Magnetfeldes wiedergewonnen.

Kapazität C im Wechselstromkreis

Diskussion der folgenden Schaltung:

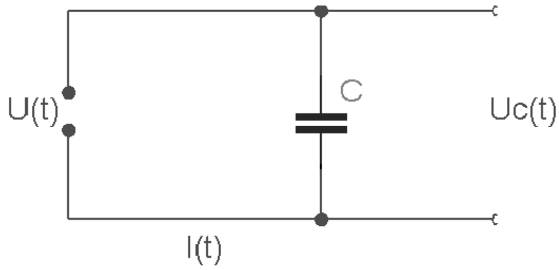


Abbildung 8.22: Kapazität im Wechselstromkreis

Interessant ist der Zusammenhang zwischen der angelegten Wechselspannung $U_\sim(t)$ und dem dadurch hervorgerufenen Lade-/ Entladestrom $I_\sim(t)$

Es sei z.B.:

$$U_\sim(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

mit $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Daraus erhält man dann zunächst die momentane Ladung auf dem Kondensator:

$$\begin{aligned} & Q(t) &=& C \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \\ \Rightarrow & \dot{Q}(t) &=& C \cdot \dot{U}_C(t) \end{aligned}$$

Generell gilt aber auch:

$$\dot{Q}(t) = I_\sim(t)$$

Gleichsetzen liefert die gesuchte Beziehung:

$$\begin{aligned} I_\sim(t) &= C \cdot \dot{U}_C(t) \\ &= C \cdot \frac{d}{dt} U_C(t) \end{aligned}$$

Lade-/ Entladestrom $I_\sim(t)$

$$I_\sim(t) = C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Wenn von
$U_\sim(t) = U_0 \sin \omega t$
ausgegangen wurde

Definition 8.11: Kapazitiver Widerstand R_C

Das Verhältnis der Amplituden von $U_\sim(t)$ und $I_\sim(t)$

$$\frac{U_0}{U_0\omega C} = \frac{1}{\omega C} = R_C$$

wird als kapazitiver Widerstand bezeichnet.

Versuch: *Phasenlage von $U_\sim(t)$ und $I_\sim(t)$*

Man betrachte Schaltung 8.23 und das zugehörige Phasendigramm 8.24 von $U_\sim(t)$ und $I_\sim(t)$:

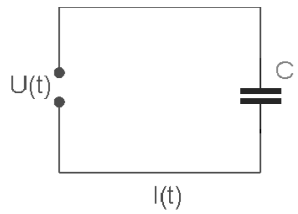


Abbildung 8.23: Schaltung zum Phasendiagramm

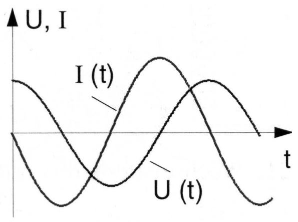


Abbildung 8.24: Phasendiagramm

- Hier eilt der Strom der Spannung um $\frac{1}{4}$-Periode voraus.
- R_C ist wieder (wie R_L) ein Blindwiderstand: Im Zeitmitttel wird an R_C keine Leistung umgesetzt. Die Arbeit, die zum Aufladen des Kondensators benötigt wird, wird beim Entladen zurückgewonnen.
- So gilt $\overline{P} \equiv 0$
  Dabei muss ebenfalls über mindestens die Zeitdauer gemittelt werden, die einem kompletten Lade-/ Entladevorgang entspricht.

8.4.4 Kapazitäten in Stromkreisen - Lade-/ Entladevorgänge - Signalübertragung durch RC- Kreise

Analog zu Kapitel 8.4.2 wird nun die Signalübertragung von Rechteckimpulsen durch eine RC-Kombination untersucht. Erneut wird betrachtet, wie sich ein periodischer Spannungsprung am Eingang der Schaltung (Ein-/ Ausschaltvorgang) am Ende der RC-Kombination auswirkt.

1. - Der Tiefpass

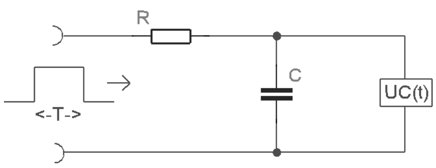


Abbildung 8.25: RC-Glied als Tiefpass

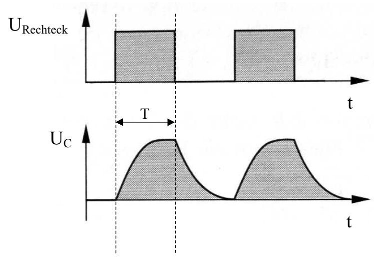


Abbildung 8.26: Signal- und Ausgangsspannung Tiefpass

2. - Der Hochpass

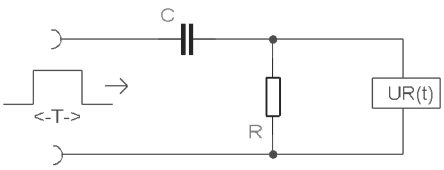


Abbildung 8.27: RC-Glied als Hochpass

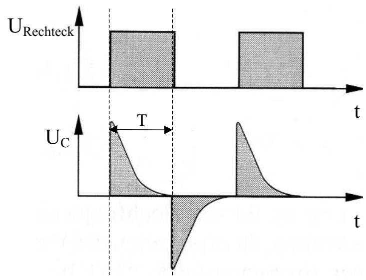


Abbildung 8.28: Signal- und Ausgangsspannung Hochpass

Veranschaulichung der Thematik

Um den Spannungsverlauf am

1. Tiefpass (Abbildung 8.25)
2. Hochpass (Abbildung 8.27)

zu verstehen, untersucht man die Vorgänge bei einer Schaltung, bei der man die Rechteckimpulse manuell durch das Umlegen eines Schalters erzeugen kann. Hier die Schaltung:

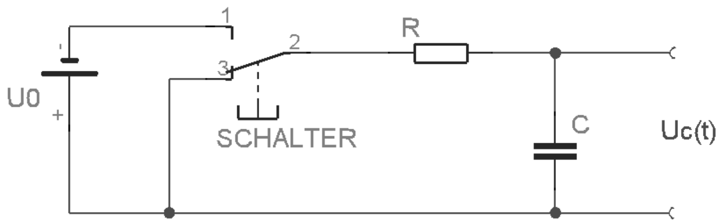


Abbildung 8.29: Manuelle Impulsgebung an RC- Glied

Anlegen und Abschalten der Spannung

Anlegen: Schalter von Position 3 auf 1

- Es dauert eine Zeit, bis die Kapazität aufgeladen ist; d.H. bis sich die Spannung U_C an C aufgebaut hat.

⇒ Grund: Die Elektronen müssen sich durch den Widerstand *quälen.*

- Je größer die Kapazität C ist, desto mehr Ladungen müssen fließen, desto länger dauert der Aufladevorgang.

Abschalten: Schalter von Position 1 auf 3

- Es dauert wiederum Zeit, bis die Ladung über R abgefallen ist.
- Die erforderliche Zeit τ erhält man durch Versuche mit Schaltung 8.29. Man vermutet:

$$\tau = R \cdot C$$

Die Auflade-/ Entladezeit τ

Ausgangsformeln:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= I(t) \cdot R \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \end{aligned}$$

So folgt mit $I(t) = \frac{dQ}{dt}$:

$$\begin{aligned} R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} &= 0 \\ \frac{dQ}{dt}\frac{1}{RC}Q(t) &= 0 \end{aligned}$$

Es wurde hier eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Ladung $Q(t)$ am Kondensator aufgestellt.

Mit den beiden Lösungsansätzen

1. für den Tiefpass:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \underbrace{Q_0}_{U_0 C} \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) \\ \text{Lösung: } \tau &= R \cdot C \end{aligned}$$

2. für den Hochpass:

$$\begin{aligned} Q(t) &= U_0 C(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}) \\ \text{Lösung: } \tau &= R \cdot C \end{aligned}$$

folgt:

Lade- und Entladezeit τ beim RC- Glied

$$\tau = R \cdot C \tag{8.12}$$

Zahlenbeipiel und Anwendung

Sei

- $R = 2k\Omega$
- $C = 2500\mu F$

$\Rightarrow \tau = 5s$

Beachte:

- Für die Messung an R kommt es auf den Verlauf des Stromes $I_{\sim}(t)$ an.
- Für die Messung an C kommt es auf den Verlauf der Spannung $U(t)$ an.

8.4.5 Komplexe Widerstände in Wechselstromkreisen

Einleitung

Wiederholung:
Wir haben für den

- induktiven Widerstand: $|R_L| = \omega L$
- kapazitiven Widerstand: $|R_C| = \frac{1}{\omega C}$

erhalten.

Neu:
Will man auch die Phasenverschiebung, die durch L und C verursacht wird, berücksichtigen, so lässt sich der phasenverschobene Widerstand durch eine komplexe Zahl Z ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
Z_L &= \frac{U}{I} = \exp(\frac{i\pi}{2})\frac{U_0}{I_0} = i\omega L \qquad \text{Strom hinkt hinter Spannung um 90°her} \\
Z_C &= \frac{U}{I} = \exp(-\frac{i\pi}{2})\frac{U_0}{I_0} = -i\frac{1}{\omega C} \qquad \text{Strom eilt der Spannung um 90°voraus}
\end{aligned}
$$

Man betrachte eine Reihenschaltung von L, C und R in einem Wechselstromkreis. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= I(t) \cdot R + L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \\
& \textit{oder} \\
\frac{dU(t)}{dt} &= L \cdot \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + I(t)\frac{1}{C}
\end{aligned}
$$

Der Lösungsansatz:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= U_0 \exp(i\omega t) \\
I(t) &= I_0 \exp(i\omega t - \varphi)
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert:

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Z ist ein komplexer Vektor mit Betrag ($|Z|$) und Richtung (Phasenwinkel).

Wobei:

$$
\begin{aligned}
|Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
\tan\varphi &= \frac{\mathrm{Im}Z}{\mathrm{Re}Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}
\end{aligned}
$$

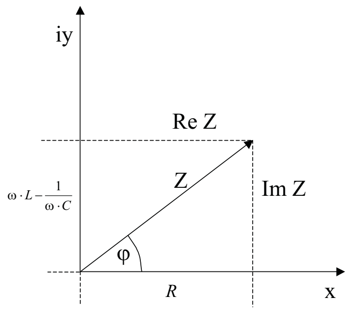


Abbildung 8.30: Polardarstellung von Z

Dargestellt in der polaren (koplexen) Ebene ist

$$Z = |Z| \cdot e^{i\varphi}$$

So kann der Strom $I(t)$ durch den RLC-Kreis unter Verwendung von Z als Realteil unseres Ansatzes geschrieben weden:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ \tan \varphi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned}$$

8.4.6 Oszillograph und Oszillogramme

Einleitung

Die vorangehenden Kapitel behandelten zeitlich veränderliche Signale; vor allem periodisch veränderliche Signale wie Wechselspannungen und Schwingungsvorgänge.

Allgemein soll nun die Darstellung der periodisch veränderlichen Größe $\psi(t)$ der Form

$$\psi(t) = \psi_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

untersucht werden.
In diesem Kapitel wird nun die technische Umsetzung der Problematik behandelt.

Definition 8.12: Oszilogramme

Kurven, die den zeitlichen Verlauf der sich periodisch mit t ändernden Größe $\psi(t)$ o.ä. wiedergeben, heißen Oszillogramme.

Definition 8.13: Oszillograph

Geräte, die solche Kurven registrieren und darstellen, heißen Oszillographen.

Prinzip eines Oszillographen für elektrische Signale

- Erzeugung eines e^--Strahls
- Beschleunigung/ Fokussierung
- Ablenkung des e^--Strahls gemäß den Signalen

Genauer kann dieses Prinzip anhand eines konkreten Modells erklärt werden:

- Erzeugung eines Elektronenstrahls durch Glühemission
- Anordnung von Elektroden zur Beschleunigung und Fokussierung des Strahls
- Durchlaufen von zwei Plattenkondensatoren; senkrecht zueinander angeordnet: Ablenkung des Strahls am
  - Vertikalen Plattenkondensator durch die zu messenden Signale
  - Horizontalen Plattenkondensator durch ein (periodisches) Sägezahnsignal
- Der Nachweis des Strahls erfolgt mit einem Leuchtschirm. Die kinetische Energie der Elektronen wird in Lichtenergie umgesetzt.

Das periodische, zu messende Signal habe am vertikalen Kondensator die Periodendauer T. Während T wird der Elektronenstrahl genau ein Mal horizontal über den Leuchtschirm gelenkt, verursacht durch eine geeignete Sägezahnspannung an dem horizontalen Kondensator.
Dieser Vorgang der Versorgung der beiden Kondensatorpaare wiederholt sich periodisch.
Bei korrekter Synchronisation der beiden Signale an den beiden Kondensatorpaaren entsteht auf dem Leuchtschirm ein **stehendes Bild**.

Um die Vorgänge im Oszillographen besser zu verstehen, ist es nötig, sich mit der Bewegung der Eletronen im Kondensatorfeld zu beschäftigen.

Bewegung von Eletronen im Kondensatorfeld

Es liegt vor:

- Ein Elektron, oder allgemein eine Ladung q, bewegt sich parallel zu den Konensatorplatten mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$
- Zwischen den Platten: Homogenes elektrisches Feld $|\overrightarrow{E}| = \frac{U}{d}$

Auf das einfliegende Elektron wirkt die Kraft:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_e} &= e \cdot \overrightarrow{E} \\ |\overrightarrow{F_e}| &= e \cdot \frac{U}{d} && \text{konstant} \\ \overrightarrow{a} &= \frac{\overrightarrow{F_e}}{m_e} && \text{auch konstant} \end{aligned}$$

Somit erfolgt die Ablenkung unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung $\overrightarrow{a}$ senkrecht zu den Kondensatorplatten. Die Bahn des Elektrons entspricht der des waagerechten Wurfes.

Die Berechnung der Ablenkung $s(L)$

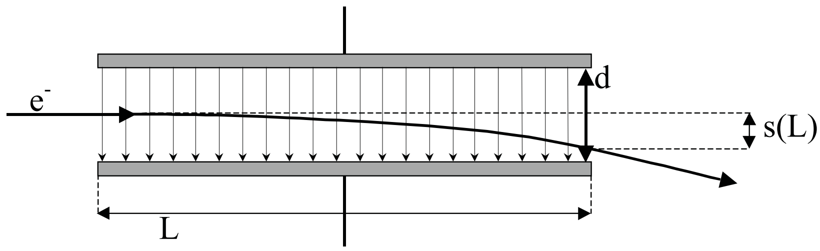


Abbildung 8.31: Ladung im Kondensatorfeld

Man entnehme die im Folgenden verwendeten Kürzel Abbildung 8.31.

- Die Ablenkung $s(L)$ ist proportional zur angelegten Spannung des Messgerätes $U(t)$.
- Der Elektronenstrahl folgt einer Änderung von $U(t)$ als Funktion von t praktisch trägheitsfrei.

Berechnung der Ablenkung:

$$s(L) = \frac{1}{2}\frac{L}{d}\frac{U_C}{U_0} \cdot L = \frac{1}{2}\frac{L^2}{d}\frac{U_C}{U_0}$$

mit U_0 als Beschleunigungsspannung und U_C als Kondensatorspannung.

Versuch: Der Wien'sche Geschwindigkeitsfilter

Man legt senkrecht zu einem $\overrightarrow{E}$-Feld ein $\overrightarrow{B}$-Feld an. Dann wird ein Elektron (Ladung q) in das mit einem $\overrightarrow{B}$- Feld durchsetzte Kondensatorfeld $\overrightarrow{E}$ geschossen.

Hier der Aufbau:

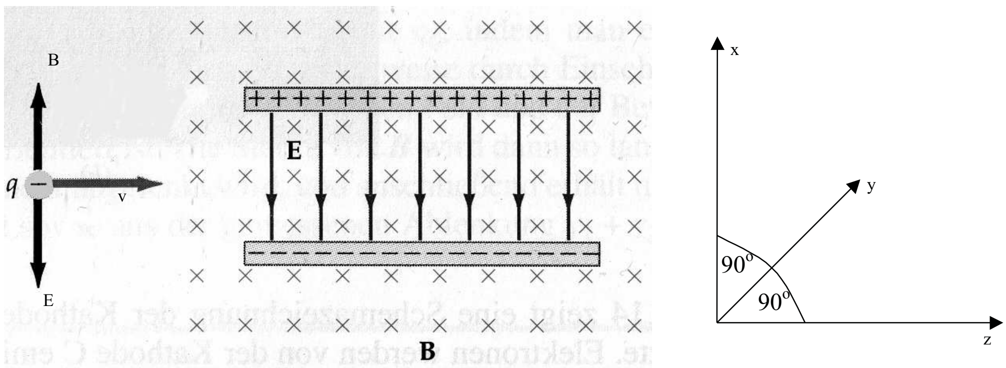


Abbildung 8.32: Wienfilter

Die Vektoren $\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{z}$ lassen sich kartesisch festlegen zu:

- $\overrightarrow{E} = (E_x, 0, 0)$
- $\overrightarrow{B} = (0, B_y, 0)$
- Flugrichtung: ẑ

Die Gesamtkraft ist

$$\overrightarrow{F} = e\left\{\overrightarrow{E} + \left[\overrightarrow{v} + \overrightarrow{B}\right]\right\}$$

Bei einer geeigneten Polung des Kondensators kann $|\overrightarrow{F}| = 0$ erreicht werden für

$$|\overrightarrow{v_0}| = \frac{E}{B}$$

D.h.: Teilchen einer bestimmten, diskreten Geschwindigkeit v_0 werden unabgelenkt hindurchgelassen: Die Apparatur fungiert als Gerschwindigkeitsfilter.

Versuch: Der mechanische Oszillograph

Verwendet wird ein Fadenpendel und ein Computer zur Auswertung.

Das Prinzip:

- Messgröße: $\psi(t)$ und $\varphi(t)$
- Umwandlung der mechanischen Größen $\psi(t)$ und $\varphi(t)$ über ein Drehpotentiometer in die elektrische Größe $U(t)$.
- Umwandlung von $U(t)$ in eine digitale Information (ADC)
- Speicherung und Wiedergabe der Messwerte als Funktion der Zeit t, zu der die Messung von $U(t)$ mit dem ADC vorgenommen wurde.

$\Rightarrow$ Diagramm $U(t)$ gegen t

Blockschema zum mechanischen Oszillographen

Messgröße:

$\psi(t)$; $\varphi(t)$

$\Downarrow$

Umwandlung der mech. Größe in elektr. Signale

$\Downarrow$

Elektrische Größe:

$U(t)$

$\Downarrow$

Messwertaufnahme:

t_n ; Zahl n

$\Downarrow$

Speicherung und Auswertung: Plott von $U(t_n) \rightarrow t_n$

$\Downarrow$

Ausgabe auf Display

8.5 Die Maxwell‘ schen Gleichungen

Wiederholung

- Jedes zeitlich veränderliche $\overrightarrow{B}$- Feld ist von einem zeitlich veränderlichen $\overrightarrow{E}$- Feld umgeben.
- Anwendung fand dieser Zusammenhang beim Betatron. Durch das $\overrightarrow{E}$- Feld und $\overrightarrow{B}$- Feld kann das Elektron auf der Kreisbahn gehalten und beschleunigt werden.
- Dieser Zusammenhang zwischen $\overrightarrow{B}$- und $\overrightarrow{E}$- Feld wird durch die Gleichung

  $$\oint_{(K)} \quad = \quad -\frac{d}{dt}\int_{(A)} d\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} \qquad \text{2. Maxwell‘ sche Gleichung}$$

  mit

  A: Fläche, durch welche das $\overrightarrow{B}$- Feld hindurchgreift.

  K: Zugehörige Randkurve

  beschrieben.
- Das Induktionsgesetz ist eine spezielle Formulierung der 2. Maxwell‘ schen Gleichung.

8.5.1 1. Maxwell‘ sche Gleichung

Frage: *Gilt auch die Umkehrung?*

Wird von einem zeitlich veränderlichen $\overrightarrow{E}$- Feld auch ein zeitlich veränderliches $\overrightarrow{B}$- Feld hervorgerufen?

Dazu betrachte man die periodische Umladung (Auf-/ Entladung) eines Kondensators:

Der Lade-/ Entladestrom $I_C(t)$ ist von einem $\overrightarrow{H}$- Feld umgeben; der Zusammenhang zwischen I_C und $\overrightarrow{H}$ wird durch das Durchflutungsgesetz geregelt.

Es bleibt noch zu klären, ob das $\overrightarrow{H}$- Feld an den Kondensatorpatten aufhört; *oder:* Ist der Kondensator von einem $\overrightarrow{H}$- Feld umgeben?

⇒ Man drücke das elektrische Feld $\overrightarrow{E}(t)$ im Kondensator durch die momentan auf den Platten befindliche Ladung aus. Dazu verwendet man das Gauß‘ sche Gesetz:

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon\cdot\epsilon_0\int_{(s)}\overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{A} \\ &= \int_{(A)} d\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{D} \end{aligned}$$

Dabei ist ohne Materie zwischen den Platten $\epsilon = 1$, sonst $\overrightarrow{D} = \epsilon\epsilon_0 \cdot \overrightarrow{E}$.

Die Fläche A, über die integriert wird, hüllt die Kondensatorplatte, auf der sich die Ladungen Q befinden, ein (Geschlossene Hüllfläche). Da über $\overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A}$ integriert wird, und $\overrightarrow{E}$ nur innerhalb des Kondensators ungleich Null ist, ist A die Innenfläche des Kondensators (Dort sitzen auch die Ladungen).

Die zeitliche Änderung von Q, $\frac{dQ}{dt}$, liefert den Ladestrom I_C; dieser ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{(A)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D}(t)\right) \\ &= A\frac{d}{dt}D(t) = A\epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

E: Betrag von $\overrightarrow{E}$, zwischen den Platten.

Es folgt:

Verschiebungsstrom I_C

$$I_C = \epsilon\epsilon_0 A \frac{dE}{dt} \tag{8.13}$$

Man erkennt, dass jedes zeitlich veränderliche $\overrightarrow{E}$-Feld einem Strom entspricht und gleichrangig zu den Leitungsströmen berücksichtigt werden muss.

Verallgemeinerung des Durchflutungsgesetzes

Erst die Summe aus Leitungsströmen und Verschiebungsströmen, $\frac{d}{dt}\left(\int_{(s)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D}(t)\right)$, liefert dann:

$$\oint_{(K)} \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{s} = I + \frac{d}{dt}\left(\int_{(A)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D}(t)\right)$$

Insbesondere gilt: Solange sich $\overrightarrow{E}(t)$ zwischen den Platten zeitlich ändert, existiert um die Kondensatorplatten ein $\overrightarrow{H}$- Feld.

Diskussion:

Definition 8.14: 1. MAXWELL' SCHE GLEICHUNG

$$\oint_{(K)} \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{s} = I + \frac{d}{dt}\left(\int_{(A)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D}(t)\right) \tag{8.14}$$

Das Linienintegral $\oint_{(K)} \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{s}$ ist längs der Randkurve (K) von A zu berechnen. Im Sonderfall $I \equiv 0$ beschreibt Gleichung (8.14) zusammen mit der 2. Maxwell' schen Gleichung (8.4)den Transport von elektromagnetischer Energie in Form von Feldern $\overrightarrow{E}(t)$ und $\overrightarrow{B}(t)$ im Vakuum.

Nachweis des Verschiebungsstroms

Prinzip:

Man weise das $\overrightarrow{B}$- Feld um den Kondensatorspalt nach, wenn an den Kondensator eine Wechselspannung

$$U_C = U_0 \cdot \cos \omega t$$

angelegt wird.

Der Nachweis erfolgt durch eine Leiterschleife. Hier der Aufbau:

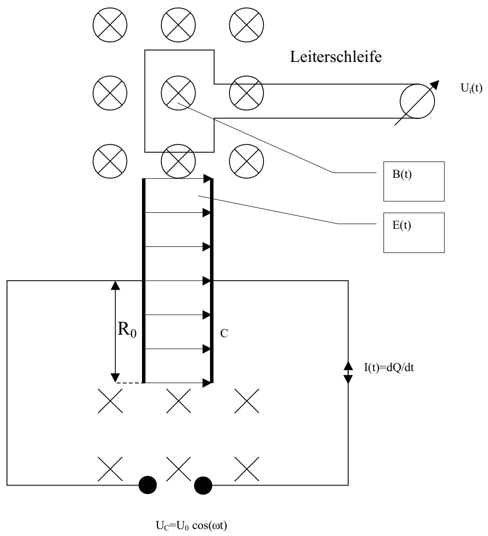


Abbildung 8.33: Nachweis des Veschiebungsstromes

Zunächst ist der Verschiebungsstrom $I_v(t)$:

$$I_v(t) = \frac{dQ}{dt}$$

mit $U_C(t) = \frac{1}{C}Q(t) \quad \Rightarrow \quad Q(t) = U_C(t) \cdot C$
sowie $I_v = \frac{dQ}{dt} = -U_0 \cdot C\omega \cdot \sin \omega t$.
Man berechne über

$$H(R_0) = \frac{I_v}{2\pi R_0}$$

das Feld um den Kondensator- Spalt:

$$H(R_0;t) = -\frac{U_0 \cdot C \cdot \omega \sin \omega t}{2\pi R_0}$$

Und mit $B(t) = \mu_0 H(R_o;t)$ wird

$$B(t) = -\frac{\mu_0 \cdot C \cdot \omega}{2\pi R_0} \sin \omega t$$

Der magnetische Fluss durch eine Induktionsspule der Fläche A ist

$$\Phi_m(t) = B(t) \cdot A$$

So dass unter Verwendung von

$$U_i(t) = -N\frac{d\Phi_m}{dt}$$

folgt:

$$U_i(t) = \frac{N \cdot A \cdot \mu_0 H_0 C \cdot \omega^2}{2\pi R_0} \cos \omega t$$

mit der Amplitude Û$_i$

$$\hat{U}_i = \frac{N \cdot A \cdot \mu_0 U_0 C \cdot \omega^2}{2\pi R_0}$$

Beispiel mit Zahlenwerten

Sei

$$\begin{aligned}
C &= \epsilon_0 \cdot \pi \frac{R_0^2}{d} \sim 3 \cdot 10^{-11} F \\
R_0 &= 0,2m \\
U_0 &= 100V \\
\omega &= 2\pi \cdot 10^6 s^{-1} \\
d &= 3cm \qquad A \sim 10^{-3} m^2 \\
N &= 10^3 \text{Windungen}
\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\hat{U}_i \sim 10^{-2} V$$

Zusammenfassung und Vereinheitlichung der 1. Maxwell‘ schen Gleichung

Einheitlich lässt sich die 1. Maxwell‘ sche Gleichung ausdrücken, wenn man die Stromdichte $\overrightarrow{j}$ (am Ort A in dA) verwendet:

$$\overrightarrow{j} \cdot d\overrightarrow{A} = I$$

So folgt:

$$\oint_{(K)} \overrightarrow{H} d\overrightarrow{s} = \int_{(A)} d\overrightarrow{A} \left(\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{D}(t) \right)$$

Zu den Maxwell‘ schen Gleichungen kommen noch folgende Beziehungen:

- Der Gauß‘ sche Satz: *Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes*

$$\oint_{(A)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D} = \sum_i q_i$$
$$\oint_{(A)} d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

  Das heißt, der magnetische Fluss $\Phi_m = \int d\overrightarrow{A}\overrightarrow{B}$ durch eine geschlossene Fläche verschwindet, (*Ugs.: Was reinfließt, muss auch wieder rausfließen*) da es keine magnetischen Ladungen gibt.

- Folgende Materialgleichungen, die beschreiben, wie sich Materie im $\overrightarrow{E}$-Feld bwz. $\overrightarrow{B}$- Feld verhält:
  - $\overrightarrow{D} = \epsilon\epsilon_0 \overrightarrow{E}$
  - $\overrightarrow{B} = \mu\mu_0 \overrightarrow{H}$

- Für die Kraft $\overrightarrow{F}$ auf eine Ladung q gilt:

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right]\right)$$

Wiederholung

2. Maxwell‘ sche Gleichung:

$$\overrightarrow{B}(t) \xrightarrow[induziert]{} \overrightarrow{E}(t)$$

1. Maxwell‘ sche Gleichung:

$$\overrightarrow{E}(t) \xrightarrow[induziert]{} \overrightarrow{B}(t)$$

$$\oint_{(K)} \vec{H} d\vec{s} \quad = \quad \int_{(A)} d\vec{A} \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t) \right) \tag{8.15}$$

Beispiel: Ein zeitlich veränderliches $\vec{E}$- Feld im sich periodisch umladenden Kondensator ist von einem $\vec{B}$- Feld umgeben. Der Nachweis erfolgt über Induktion.

Als Ergänzung von Gleichung (8.15) muss noch eine Angabe gemacht werden, wo die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herrühren: Beispielsweise müssen die Ladungen $Q = \sum_i q_i$ in Beziehung mit dem $\vec{E}$- Feld betrachtet werden.

Kapitel 9

Schwingungen

9.1 Einführung

Das Kapitel Schwingungen behandelt im Allgemeinen Vorgänge/ Bewegungen, die periodisch sind. Hier bereits bekannte Beispiele für Schwingungsvorgänge:

- Federpendel
- Fadenpendel
- Drehpendel

Gemeinsam ist für alle Systeme:

Der Zustand $\psi(t)$ (Auslenkung, Verdrillungswinkel o.Ä.) ändert sich periodisch mit der Zeit.

Definition 9.1: PERIODISCHE BEWEGUNG

> *Ein Vorgang bewegt sich (räumlich oder) zeitlich betrachtet periodisch, wenn er der Form*
>
> $$\psi(t+T) = \psi(t)$$
>
> *genügt.*

Definition 9.1 leitet sofort zu einer neuen über:

Definition 9.2: PERIODENDAUER / PERIODE T

> *Die Periode wird mit T bezeichnet. Die Zustandsgröße $\psi(t)$ nimmt nun nach der Zeit T ihren ursprünglichen Wert wieder an.*

Mit der Kenntnis der Periodendauer lässt sich auch die Frequenz defninieren:

Definition 9.3: Frequenz ν

Die Frequenz ν eines periodischen Vorgangs ist

$$\nu = \frac{1}{T}$$
$$[\nu] = \frac{1}{s} = 1Hz \quad (Hertz)$$

Die Unterscheidung zwischen Schwingungen und Wellen

1. Schwingungen

Definition 9.4: Schwingungen

Bei Schwingungen pendelt die Energie zeitlich periodisch zwischen zwei Energiespeichern hin und her.

Hierzu 2 Beispiele aus der Mechanik:

- Federpendel:
  Die mechanische Energie pendelt zwischen Spannungsenergie E_{pot} und kinetischer Energie E_{kin} einer sich periodisch bewegenden Masse hin und her.
- Fadenpendel:
  Periodischer Austausch zwischen Lageenergie und kinetischer Energie einer Masse.

Solche Energiespeicher sind auch aus der E-Lehre bekannt:

- Elektrischer Speicher 1:
  Elektrische Energie wird im Kondensatorfeld in Form eines elektrischen Feldes gespeichert.
- Elektrischer Speicher 2:
  Magnetische Energie wird in Form eines magnetischen Feldes in einer stromdurchflossenen Spule gespeichert.

Anmerkung: *Bei diesen Beispielen wird ein Teil der vorhandenen Energie in Wärme umgesetzt. Deshalb kommen die Systeme auch irgendwann zum Stillstand.*

Wenn es nun gelänge, periodisch elektrische in magnetische Feldenergie umzuwandeln (und umgekehrt), so müsste es einen elektrischen Schwingkreis geben. Dabei wäre dann die Menge an Ladungen das schwingende Medium. (Ladungsschwingung)

Dann gilt:

$$Q(t+T) = Q(t)$$

Auf die Idee des elektischen Schwingkreises wird später eingegangen.

2. Wellen

Definition 9.5: WELLEN

> *Werden von dem Energieaustausch viele gekoppelte einzelne Elemente erfasst, so treten Wellen auf.*

Blockdiagramm zu Wellen und Schwingungen

Periodischer Energieaustausch zwischen zwei Energiespeichern	
⇓	⇓
Schwingfähiges Einzelelement (Oszillator)	Viele gekoppelte schwingfähige Elemente
⇓	⇓
Schwingung	Welle

Versuch: *Torsionspendelkette*

Untersucht wird die Impulsausbreitung auf der Torsionspendelkette. Eine Störung breitet sich räumlich aus: Der Energietransport erfolgt entlang der Kette. *Näheres dazu in Kapitel (10).*

9.2 Freie ungedämpfte Schwingungen: Der Harmonische Oszillator

9.2.1 Das Federpendel

Untersucht wird nun detailliert, wie es beim Federpendel zum Austausch zwischen zwei Energiespeichern kommt:

1. Stauchung/ Dehnung von zwei Federn: Eine bestimmte (Menge) Spannungsenergie wird auf das System übertragen.
2. Die gespeicherte (potentielle) Energie wird nach dem Loslassen der Masse in kinetische Energie umgesetzt.
3. Da die beschleunigte Masse Trägheit besitzt, beginnt sich die Feder wieder zu dehnen/ stauchen.

⇒ Der Vorgang beginnt erneut. Dies ist somit ein periodischer Wechsel zwischen Spannungsenergie und kinetischer Energie.

Aufstellung einer Bewegungsgleichung für ein Federpendel

Der Aufbau:

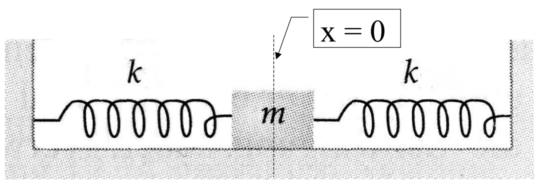


Abbildung 9.1: Federpendel

Die Masse m wird aus der Ruhelage $x = 0$ ausgelenkt und festgehalten zu $x(t = 0) = x_0$. Dies ist der Startzustand. Nach dem Loslassen erfährt die Masse m nach der Zeit t die Beschleunigung

$$a = \ddot{x}(t)$$

Die Grundgleichung der Dynamik liefert dann:

$$m\ddot{x} = F_r(t)$$

wobei dann die rücktreibende Kraft (F_r) von zwei Federn (mit identischer Federkonstante $\frac{D}{2}$ herrührt.

Da die eine Feder *schiebt*, die andere *zieht*, folgt:

$$\begin{aligned} F_r(t) &= -\frac{D}{2}\cdot x(t) - \frac{D}{2}\cdot x(t) \\ \Rightarrow \qquad m\ddot{d}(t) &= -Dx(t) \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{D}{m}\cdot x(t) \qquad (9.1) \end{aligned}$$

Gleichung (9.1) ist eine Schwingungsgleichung. Diese ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die gesuchte Lösung $x(t)$ muss so beschaffen sein, dass sie sich nach zweimaligem Ableiten bis auf einen Faktor $\frac{D}{m}$ reproduziert.

Lösung der Schwingungsgleichung

Bevor die Lösung angegengen werden kann, benötigt man noch den Begriff der

Definition 9.6: KREISFREQUNZ ω

> *Die Kreisfrequenz (oder auch: Winkelgeschwindigkeit) ω ist gleich dem Quotienten aus dem vom Radius überstrichenen Winkel $\Delta\varphi$ und der dabei verstrichenen Zeit Δt:*

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \\ [\omega] &= \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{1}{s} = s^{-1} \end{aligned}$$

Nun lässt sich der Lösungsansatz formulieren:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos(\omega t+\varphi) \\ \dot{x}(t) &= -\omega\cdot x_0\sin(\omega t+\varphi) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\cdot x_0\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

Nach Umformen:

$$\begin{aligned} -\omega^2\cdot x_0 &= -x_0\cdot\frac{D}{m} \\ \omega^2 = \frac{D}{m} \end{aligned}$$

So folgt:

Kreisfrequnz beim Federpendel

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (9.2)$$

Die Kreisfrequenz ω hängt nicht von der Schwingungsamplitude x_0 und nicht von der Anfangsphase φ ab!

Diskussion der Ergebnisse

1. Betrachtung der Kraft F:

   Definition 9.7: HARMONISCHER OSZILLATOR

   > *Ein schwingfähiges System, welches eine sinusförmige Schwingung ausführt, heißt harmonischer Oszillator.*

   Voraussetzung dafür ist ein lineares Kraftgesetz wie

   $$F_r(x) = -Dx$$

   Das heißt, die rücktreibende Kraft muss proportional mit der Auslenkung $x(t)$ anwachsen.

2. Betrachtung der Schwingungsdauer T:

   Die Schwingungsdauer T, nach der sich die Bewegung wiederholt, ist offenbar

   $$T = 2\pi \left(\frac{m}{D}\right)^2$$

   Das heißt, die Frequenz ist

   $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{D}{m}\right)^2$$

3. Komplexe Behandlung der Schwingungsgleichung

   Bereits bekannt:

   $$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x(t) \\ \text{mit} \quad \omega_0^2 &= \frac{D}{m} \end{aligned}$$

   Diese Gleichung hat offenbar die Lösung

   $$\begin{aligned} x(t) &= c \cdot \exp(\lambda t) \\ \text{wobei} \quad \lambda &= \pm i\omega_0 \end{aligned}$$

   Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination der beiden Lösungen.

(a) $x_1(t)c_1 \cdot \exp(i\omega_0 t)$

(b) $x_2(t)c_2 \cdot \exp(-i\omega_0 t)$

zu

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= c_1 \exp(i\omega_0 t) + c_2 \exp(-i\omega_0 t) \end{aligned}$$

Nun muss natürlich $x(t)$ eine reelle Funktion sein; das heißt, $x^*(t) = x(t)$, wobei x^* die konjugiert komplexe Lösung zu $x(t)$ ist. Diese Forderung liefert für die Konstanten:

$$c_1 = c_2^* = c$$

Nach Einsetzen

$$\begin{aligned} x(t) &= c \exp(i\omega_0 t) + c^* \exp(-i\omega_0 t) \\ \text{mit} \quad c &= a + ib \end{aligned}$$

a und b sind aus den Anfangsbedingungen der Schwingung zu bestimmen.

<u>Diskussion:</u>

Schreibe man für

$$\begin{aligned} c &= |c| \exp(i\varphi) \\ c^* &= |c| \exp(-i\varphi) \end{aligned}$$

so folgt

$$x(t) = |c| \left\{ \exp(i(\omega_0 t + \varphi)) + \exp(-i(\omega_0 t + \varphi)) \right\}$$

Unter Verwendung von $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ folgt die

Lösung der komplexen Schwingungsgleichung

$$x(t) = 2|c| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

...wobei sich wiederum $|c|$ und φ aus den Anfangswerten ableiten.

4. Die Energiebilanz

   Die momentan (zur Zeit t) vorhandene Spannungsenergie ist

   $$W_{pot} = \frac{1}{2} D (x(t))^2$$

   Die momentan (zur Zeit t) vorhandene kinetische Energie ist

   $$W_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2$$

   Bereits bekannt:

   $$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) &= -\omega \cdot x_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ \omega_0 &= \left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

   Man erhält für die Gesamtenergie:

   $$\begin{aligned} W_{pot}(t) + W_{kin}(t) &= \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 + \frac{D}{2} (x(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{D}{2} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \frac{D}{m} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{D}{2} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} x_0^2 D \end{aligned}$$

   Das heißt: W_{ges} = konstant und zeitunabhängig, obwohl $W_{pot}(t)$ und $W_{kin}(t)$ für sich betrachtet von t abhängen.

9.2.2 Das Drehpendel

Charakteristik eines Drehpendels:

- Eine Auslenkung eines drehbaren Körpers um den Drehwinkel φ soll ein rücktreibendes Moment $\overrightarrow{M}(\varphi)$ hervorrufen.
- Beim Loslassen erfährt der Körper eine Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$, die zu einer Zunahme des Drehimpulses $|\overrightarrow{L}(t)|$ führt.

Bewegungsgleichung für ein Drehpendel

Die Bewegungsgleichung wird mit Hilfe der Grundgleichung der Dynamik für Drehbewegungen aufgestellt:

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M}$$

Sei I das Trägheitsmoment [1] des Körpers bezüglich der Drehachse; dann ist der Drehimpuls:

$$\overrightarrow{L} = I \cdot \overrightarrow{\omega}$$

wobei $|\overrightarrow{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist.

Des weiteren gelte für das rücktreibende Moment $\overrightarrow{M}$:

$$|\overrightarrow{M}|(\varphi)| = -D_{\varphi} \cdot \varphi(t)$$

Alle Vektoren haben die Richtung der Drehachse. Deshalb beachte man im Folgenden nur die Komponenten längs dieser Richtung.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(I \cdot \omega(t)\right) \\ &= I\frac{d\omega}{dt} = -D_{\varphi} \cdot \varphi(t) \end{aligned}$$

So folgt:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D_{\varphi} \cdot \varphi(t)$$

Betrachtet man diese Differentialgleichung 2. Ordnung, so fällt auf, dass sie der der Federschwingung (9.1) gleicht. Nur wurde hier ersetzt:

$$\begin{array}{ccc} I & \Leftrightarrow & m \\ \varphi & \Leftrightarrow & x \\ D_{\varphi} & \Leftrightarrow & D \end{array}$$

[1] Die Literatur verwendet auch Symbol J statt I.

So lassen sich die Ergebnisse übernehmen:

Frequenz ν und Periode T der Drehschwingung:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{D_\varphi}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \\ T &= 2\pi\left(\frac{D_\varphi}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Beispielapparaturen

1. Torsionspendel

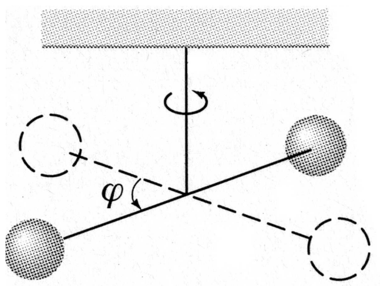


Abbildung 9.2: Torsionspendel

Bei dem nebenstehenden Pendel wird das rücktreibende Moment durch einen verdrillten Draht erzeugt. An sich ist das Torsionspendel schon bekannt: Die Torsionspendelkette setzt sich aus vielen einzelnen solchen Torsionspendeln zusammen.

2. Drehtisch

   Betrachtet man einen Drehtisch, so stellt sich die Frage, was geschieht, wenn die Lagerung nicht mehr im Schwerpunkt S, sondern in der neuen Drehachse A erfolgt.

   Man stellt fest, dass sich das Trägheismoment von I_s nach I_A ändert. Experimetelle Ergebnisse zeigen, das die Periode T größer wird.

   Dieses Ergebnis lässt sich qualitativ durch den Steiner‘ schen Satz erklären.

3. Das Physikalische Pendel

   Hier fällt der Drehpunkt A *nicht* mit dem Schwerpunkt S zusammen.

   Das rücktreibende Moment $|\vec{M}|$ wird durch die in S vereinigt gedachte Gesamtmasse m hervorgerufen, wobei das Moment

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

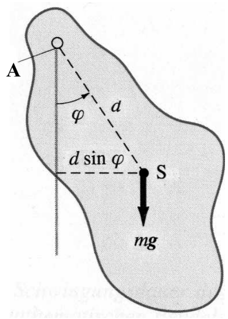


Abbildung 9.3: Physikalisches Pendel

mit der Schwerkraft $\overrightarrow{F}_g$ zu berechnen ist.

Mit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \text{Vektor von } A \text{ nach } S \text{ (Länge d)} \\ \varphi &= \text{Winkel zur Vertikalen} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} M &= l \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi(t) \\ &\approx l \cdot m \cdot g \cdot \varphi(t) \quad \text{für kleine Winkel } \varphi \end{aligned}$$

9.2.3 Der Schwingkreis - elektromagnetische Schwingungen

Wiederholung

Man betrachte eine Kombination aus einer Induktivität L und einer Kapazität C als zwei Energiespeicher, deren Energieinhalt zwischen beiden Speichern ausgetauscht werden kann:

- Kondensator C:
  Speicher für elektrische Energie in Form eines $\vec{E}$- Feldes zwischen den Kondensatorplatten

- Induktivität L:
  Speicher für magnetische Energie in Form eines magnetischen Feldes einer stromdurchflossenen Spule.

Es fragt sich nun, wie man die Energiespeicher miteinander verknüpfen muss, damit Energie zwischen den beiden Speichern pendeln kann; dass heißt, damit Strom-/ Ladungsschwingungen stattfinden können.

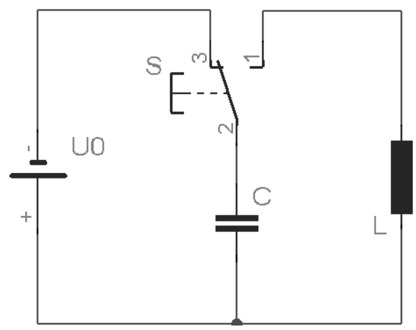


Abbildung 9.4: LC- Glied

1. Schritt:
   Herstellung der Anfangsbedingungen: Indem Schalter S auf Position 3 gelegt wird, wird der Kondensator C aufgeladen. Es baut sich ein $\vec{E}$- Feld mit Gesamtladung Q_0 auf.

2. Schritt:
   Umlegen des Schalters S auf Position 1 - Es liegt ein LC- Kreis vor:

   - Der Kondensator entlädt sich über die Spule.
   - In der stromdurchflossenen Spule baut sich ein $\vec{B}$- Feld auf. (Die darin enthaltene Energie stammt aus dem elektrischen Feld.)

3. Schritt:
   Der Kondensator C sei ganz entladen. Der Stromfluss endet jedoch nicht, da das vorhandene, sich zeitlich ändernde $\overrightarrow{B}$- Feld durch Induktion die Ladungen weiter *antreibt*.

4. Schrit:
   Der Kondensator beginnt sich umgekehrt gepolt wieder aufzuladen.

Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Es liegen Ladungsschwingungen vor:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

Die Kreisfrequenz eines Schwingkreises

Nach der Kirchhoff' schen Maschenregel für LC- Kreise gilt:

$$\begin{aligned} U_C(t) \quad &+ \quad U_L(t) = 0 \\ \frac{1}{C}Q(t) \quad &+ \quad L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Einmalige Differentiation nach t liefert:

$$\frac{1}{C}\frac{dQ(t)}{dt} + \text{Ł} \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

Unter Verwendung von $\frac{dQ}{dt} = I(t)$ folgt:

$$\frac{1}{C}I(t) + L \cdot \frac{d^2 I(t)}{dt^2} = 0$$

Schwingungsgleichung des elektrischen Schwingkreises

$$\frac{s^2 I(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}I(t) = 0 \tag{9.3}$$

Zur Lösung wird folgender Ansatz gemacht:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Dies genügt Gleichung (9.3), wenn für die Kreisfrequenz ω gilt:

Kreisfrequenz des elektrischen Schwingkreises

$$\omega = \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Versuch: *LC- Kreis*

Der Aufbau des Versuchs gleicht dem der Schaltung auf Abbildung 9.4. Nur wird jetzt anstelle einer manuellen Schalterumlegung eine Impulsanregung per Frequenzgenerator eingesetzt.

Nach der Anregung (Aufladung von C) wird der LC-Kreis sich selbst überlassen. Er führt Ladungsschwingungen aus.

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Des weiteren lässt sich auch experimentell feststellen, dass eine Verdoppelung der Kreisfrequenz ω_0 eine *Viertelung* der Induktivität L erfordert:

$$L \to \frac{1}{4} L$$

Anmerkung: Streng genommen stellt der Schwingkreis ein gedämpftes System dar, da die ganze Apparatur einen Ohm‘ schen Wiederstand besitzt und somit an ihr Leistung umgesetzt wird (Wärme).

Stromfluss im Schwingkreis

Wenn bei der in Abbildung 9.4 gezeigten Schaltung mit Schalter S auf Position 3 die Ladung Q_0 auf die Kondensatorplatten aufgebracht wurde, und zum Zeitpunkt $t = 0$ Schalter S auf Position 1 umgelet wird, so fällt der Phasenwinkel φ weg. Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(t=0) &= Q_0 \\ \varphi &\equiv 0 \\ Q(t) &= Q_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Nach Ableiten folgt:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \cdot \sin(\omega t) \\ \text{mit} \quad I_0 &= -\omega_0 Q_0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse aus Kap. 9.2.1 bis Kap. 9.2.3

- Der harmonische Oszillator:
  - Ein System, welches Schwingungen nach Maßgabe von
    $$\psi(t) = \psi \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
    ausführt, heißt harmonischer Oszillator.
  - Die Kreisfrequenz ω_0 ist charakteristisch für den betrachteten harmonischen Oszillator.
    - $\Rightarrow$ Federpendel: $\omega_0 = \left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$
    - $\Rightarrow$ Drehpendel: $\omega_0 = \left(\frac{D_\varphi}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$
    - $\Rightarrow$ Fadenpendel: $\omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$
    - $\Rightarrow$ Schwingkreis: $\omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}$

    Hinreichend dafür, dass ein harmonischer Oszillator vorliegt, ist, dass die schwingungsfähige Größe $\psi(t)$ folgender Schwingungsgleichung genügt:
    $$\ddot{\psi}(t) + \omega_0^2 \psi(t) = 0$$
    wobei $\psi(t)$ nun ein/eine
    * Auslenkung
    * Ladung/Strom
    * Auslenkwinkel

    sein kann.

- Der parametrische Oszillator:
  - In der Schwingungsgleichung
    $$\frac{d^2\psi}{d^2} + \omega_0^2 \psi(t) = 0$$
    ist ω_0 von den Eigenschaften des Systems abhängig (z.B.: Federpendel: $\omega_0 = \frac{D}{m}$).
  - Wenn sich die Eigenschaften des Oszillators zeitlich ändern, so wird der parametrisch. Anschaulich das Beispiel des Fadenpendels: Hier ist die Länge[2] l zeitlich veränderlich:
    $$l \rightarrow l(t)$$
    Dadurch ändern sich im Allgemeinen auch Frequenz, Amplitude und Phase der Schwingung.

[2] wirkende Länge beim Fadenpendel $l_{wirk}(t) = l \sin \varphi(t)$

Wird $l(t)$ periodisch in geeigneter Weise geändert, so kann sich ein Aufschaukeln der Schwingungsamplitude ergeben. (Anschaulich wird durch das Verkürzen der Pendellänge im richtigen Zeitpunkt dem System potentielle Energie zugeführt.)

- Beispiel: Ein Kind auf der Schaukel verändert die Pendellänge durch Verlagerung des Schwerpunktes.
- Parametrische Oszillatoren spielen in der modernen Physik eine wichtige Rolle:
  - Quadrupol- Massenspektrometer
  - Optisch parametrische Oszillatoren

9.3 Freie gedämpfte Schwingungen

In diesem Kapitel werden Schwingungen behandelt, bei denen ein Teil der Energie aus den beiden Speichern W_1 und W_2 in Wärme umgesetzt wird.

9.3.1 Mechanisch gedämpfte Schwingungen

Bisher hing die Gesamtenergie W_{ges} nicht von dem zeitlichen Verlauf ab:

$$W_{ges} = W_1(t) + W_2(t)$$

Jetzt wird angenommen, dass W_{ges} im Laufe der Zeit abnimmt:

$$W_{ges}(t) \cong W_0 \exp(-2\varrho t)$$

Dabei ist ϱ, die Dämpfungskonstante, ein Maß für die Dämpfung des Systems.

Versuch: *Mechanisch gedämpfte Schwingung*

Zunächst wird die Periode T für die ungedämpfte; dann für die gedämpfte Schwingung ermittelt. $\Rightarrow$ Man stellt fest, dass die Periode T für die gedämpfte Schwingung größer ist. Des weiteren nimmt die Amplitude mit der Zeit T ab. Annahme: Für die Zustandsgröße $\psi(t)$ ändert sich die Zustandsgleichung zu:

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_0}_{\text{Anfangsamplitude}} \cdot \overbrace{\exp(-\varrho t)}^{\text{Beschreibt Dämpfung}} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{\text{Oszillierender Anteil}} \tag{9.4}$$

Zur Überprüfung des Ansatzes (9.4) stellen wir die Grundgleichung der Dynamik für den mechanischen Fall einer gedämpften Federschwingung auf:

Die bewegte Masse m soll unter dem Einfluss einer elastisch rücktreibenden Kraft und einer Reibungskraft stehen.

Die Kräftebilanz:

$$\text{Trägheitskraft} + \text{Federkraft} + \text{Reibungskraft} = 0$$

Die Kräfte:

$$\begin{aligned} \text{Federkraft} &= D \cdot \psi(t) \\ \text{Trägheitskraft} &= m \cdot \ddot{\psi}(t) \\ \text{Reibungskraft} &= 2 \cdot \varrho \cdot m \cdot \dot{\psi}(t) \end{aligned}$$

Die Reibung wurde proportional zur *Geschwindigkeit* $\psi(t)$ angesetzt. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} m\ddot{\psi}(t) + D \cdot \psi(t) + 2 \cdot \varrho \cdot m\dot{\psi}(t) &= 0 \\ \ddot{\psi}(t) + \omega_0^2 \cdot \psi(t) + 2 \cdot \varrho\dot{\psi}(t) &= 0 \qquad (9.5) \end{aligned}$$

wobei $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, also die Kreisfrequenz im ungedämpften Zustand, ist.

Nun lässt sich zeigen, dass in der Tat die oben vermutete Gleichung (9.4) Lösung der Differentialgleichung (9.5) ist, sofern

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \varrho^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist und

$$\varrho < \omega_0$$

bleibt.

Diskussion der Ergebnisse

- $\ddot{\psi}(t)$ stellt entweder eine lineare Beschleunigung oder eine Winkelbeschleunigung dar.
- Die Reibgunskraft ist offenbar proportional zur momentanen Geschwindigkeit $\dot{\psi}(t)$

Diese Proportionalität liegt bei einer Bewegung durch ein zähes Medium vor.

Beispiel:
Nach der Stokes' schen Formel erfährt eine Kugel in zähem Medium die Kraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= 6\pi\eta \cdot r \cdot \vec{v} \\ &= \underbrace{6\pi\eta \cdot r}_{\varrho \cdot m} \cdot \dot{\psi} \end{aligned}$$

mit η als Zähigkeit des Mediums und r als Kugelradius.

Diskussion der Energien bei gedämpften Schwingungen

Für die Energieinhalte der beiden Energiespeicher gilt:

- Ohne Dämpfung:

  Gemittelt über mindestens eine Periode ist jeweils die Hälfte der Anfangsenergie W_0 in jedem Speicher:

  $$\begin{aligned} \overline{W_{kin}(t)} &= \frac{1}{2} W_0 \\ \overline{W_{pot}(t)} &= \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

  Beide Speicher sind dabei zeitunabhängig!

- Mit Dämpfung:

  Beide Energiespeicher nehmen exponentiell im Laufe der Zeit ab:

$$\begin{aligned}\overline{W_{kin}(t)} &= \frac{1}{2}W_0\exp(-2\varrho t)\\ \overline{W_{pot}(t)} &= \frac{1}{2}W_0\exp(-2\varrho t)\end{aligned}$$

Man bilde nun das Verhältnis der beiden mechanischen Energien, die nach zwei aufeinanderfolgenden Extremwerten von $\psi(t)$ noch im System vorhanden sind (Also nach $t = T$ und $t = T + T = 2T$).

$$\frac{W_{ges}(t=T)}{W_{ges}(t=2T)} = \frac{W_0}{W_0}\cdot\frac{\exp(-2\varrho T)}{\exp(-2\varrho\cdot 2T)} = \exp(2\varrho T)$$

Das Verhältnis hat für je zwei beliebige Extrema immer denselben Wert und charakterisiert die Dämpfung.

Umformung liefert:

$$\begin{aligned}\lg\left[\frac{W_{ges}(t=T)}{W_{ges}(t=2T)}\right] &= \lg\left[\exp(2\varrho T)\right]\\ \lg\left[\frac{W_{ges}(t=T)}{W_{ges}(t=2T)}\right] &\propto \varrho\end{aligned}$$

Somit ist $\lg\left[\frac{W_{ges}(t=T)}{W_{ges}(t=2T)}\right]$ proportional zur Dämpfung ϱ der Schwingung.

Definition 9.8: PEGELMASS

> *Der zehnfache dekadische Logarithmus des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Extrema der Energien,*
>
> $$10\cdot\lg\left[\frac{W(t)}{W(2T)}\right]$$
>
> *wird als Pegelmaß bezeichnet. Er wird in Dezibel (dB) angegeben.*

Beispiele

Einige Pegelmaße:

$\frac{W(t)}{W(2T)}$	1	10	100	1000
dB	0	10	20	30

Die drei gedämpften Bewegungsformen

- Der Schwingfall:

Eine gedämpfte Schwingung kommt nur zustande, solange

$$\varrho < \omega_0$$

ist.

- Der Kriechfall:

  Wenn die Dämpfung

  $$\varrho > \omega_0$$

  ist, so nimmt $\psi(t)$ näherungsweise exponentiell ab.

- Der aperiodische Grenzfall:

  Wenn

  $$\varrho = \omega_0$$

  ist, so erreicht die Bewegung nach der kürztmöglichen Zeit die Ruhelage (Sie kommt kürztmöglichst zum Stillstand).

Die drei möglichen Bewegungsformen lassen sich einfach für den Fall einer gedämpften elektromagnetischen Schwingung demonstrieren (Versuch).

Merke: *Schwingungsfähigen Systemen mit Reibung durch Umsetzung in Wärme geht nach und nach die vorhandene Energie „verloren“.*

9.3.2 Elektrische Systeme - RCL- Kreise

Zur Betrachtung des RCL- Kreises gehe man vom bereits bekannten, ungedämpften Pendant, dem LC- Kreis aus Kapitel 9.2.3 aus. Dieser lieferte ungedämpfte elektrische Schwingungen.
Hier die neue Schaltung:

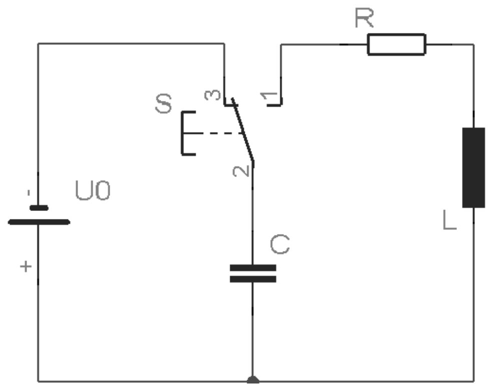


Abbildung 9.5: RCL- Glied

Erneut wird der Kondensator über den Schalter auf Position 3 aufgeladen. Nach Umlegen auf Position 1 entlädt sich der Kondensator über R und L.
Dabei wird nun ein Teil der Energie an R in Stromarbeit umgesetzt (R wird warm).

Aufstellung der Schwingungsgleichung

Es wird analog wie beim ungedämpften Schwingkreis vorgegangen. Die Kirchhoff' sche Maschenregel liefert:

$$\begin{aligned} U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) &= 0 \\ L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Einmaliges Ableiten nach der Zeit liefert:

$$L \cdot \ddot{I}(t) + R \cdot \dot{I}(t) + \frac{I}{C} = 0$$

Der Ansatz lautet:

$$I(t) = I_0 \exp(-\varrho t) \cos(\omega t + \varphi)$$

Dabei sind I_0 und φ durch die vorgegebenen *Anfangsbedingungen* gegeben.

Das Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung für $I(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\omega^2 - \varrho^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{mit} \quad \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \text{und} \quad \varrho^2 &= \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \end{aligned}$$

Schwing-, Kriech-, aperiodischer Grenzfall

Eine gedämpfte Schwingung liegt solange vor, wie gilt:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

Durch Vergrößerung des Widerstandes R kann man nun den Energieverlust (in Form von Wärme) soweit vergrößern, dass keine Schwingung mehr stattfindet. Dies ist der aperiodische Grenzfall. Es muss dann gelten:

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\omega_0^2 - \varrho_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad \omega_0^2 &\stackrel{!}{=} \varrho^2 \\ \frac{1}{LC} &= \frac{R^2}{4L^2} \\ R^2 &= \frac{4L}{C} \end{aligned}$$

Für den Kriechfall gilt nun noch:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

9.4 Erzwungene Schwingungen

Definition 9.9: ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN

> *Jedes schwingfähige System führt unter dem Einfluss einer äußeren, periodischen Einwirkung (Kraft, Moment, Wechselspannung...) erzwungene Schwingungen aus.*

9.4.1 Erzwungene mechanische Schwingungen

Sei im Folgenden als erregendes Moment/Kraft:

$$\begin{array}{ccc} |\overrightarrow{M}(t)| & \propto & \cos\omega_e t \\ & \text{oder} & \\ |\overrightarrow{F}(t)| & \propto & \cos\omega_e t \end{array}$$

mit ω_e als Erregerfrequenz.

Das Pohl'sche Rad als schwingfähiges System

Hier der Aufbau des Versuchs:

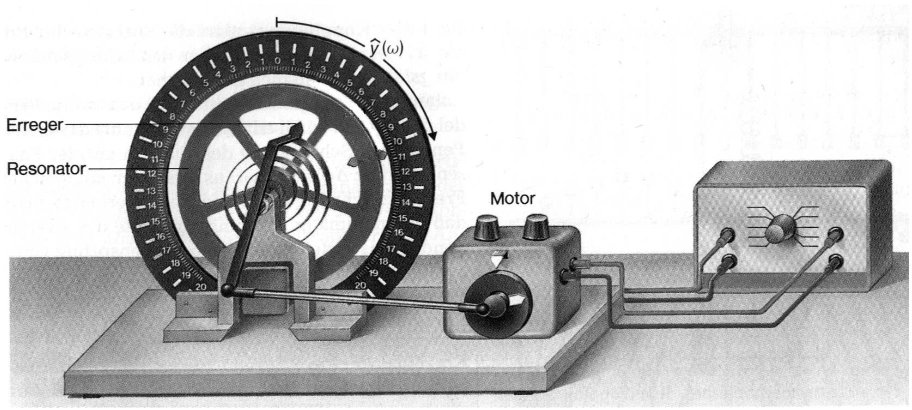


Abbildung 9.6: Pohl'sches Rad

Zunächst wird die freie Schwingung des Drehpendels betrachtet:

$$\omega_0 = \left(\frac{D}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit D : Rückstellmoment der Feder

I : Trägheitsmoment des Pohl'schen Rades

Dieser Wert für ω_0 gilt nur für den ungedämpften Fall. Wird das Rad nun gedämpft, so wird die Kreisfrequenz kleiner: $\omega < \omega_0$. Als Dämpfung dient eine Wirbelstrombremse.

Erzwungene Schwingungen am Pohl'sche Rad

An der Achse greift jetzt ein äußeres Moment $|\overrightarrow{M}|(t)|$ an (s.o.).
Untersucht wird nun die Bewegung des Pohl'schen Rades als Funktion der Erregerfrequenz ω_e.
Beachte: ω_e *ist nicht gleich* ω_0.

⇒ Experimente zeigen, dass nach einem komplizierten Einschwingvorgang eine Schwingung mit Erregerfrequenz ω_e stattfindet.

Definition 9.10: STATIONÄRER ZUSTAND

> *Ein System befindet sich in einem stationären Zustand, wenn es sich mit der Frequenz ω_e der erregenden Kraft (des erregenden Moments) bewegt.*

Charakterisierung des stationären Zustandes

- Sehr kleines ω_e ($\omega_e \ll \omega_0$):
  - Oszillator und Erreger sind im Takt; sie schwingen in Phase.

    $$\psi(t) = \psi_0(\omega) \cdot \cos \omega_e t$$

  - Die Amplitude $\psi_0(\omega)$ ist klein für alle ω in diesem Bereich.
- Eigenfrequenz wie ω_e ($\omega_e \approx \omega_0$):
  - Phasenverschiebung um $\approx 90^\circ$
  - Sehr große Amplitude
  - Bei Erregerfunktion $F(t) = F_0 \cos \omega t$ gilt:

    $$\psi(t) \cong \psi_0(\omega_0) \cdot \sin \omega_0 t$$

    Die Schwingungsphase *hinkt* hinter der Erregerkraft her.

  Definition 9.11: RESONANZ

  > *Wenn unter dem Einfluss einer Erregerkraft die Amplitude eines schwingfähigen Systems sehr groß wird, liegt Resonanz vor.*

- Sehr großes ω_e ($\omega_e \gg \omega_0$)

- Amplitude wieder sehr klein
- Die Resonanzverschiebung φ beträgt ungefähr 180°.
- Die Bewegungsform:

$$\psi(t) = -\psi_0(\omega) \cdot \cos \omega_e t$$

Zusammenfassung

In eingeschwungenem Zustand macht das System durch die Erregerfrequenz ω_e erzwungene Schwingungen der Form

$$\begin{array}{rrcl} & \psi(t) & = & \psi_0(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e)) \\ \text{wenn} & \mathrm{F}(t) & = & F_0 \cos \omega_e t \end{array}$$

ist.

Dabei ist

$\psi_0(\omega_e)$ die Amplitude des angeregten Systems, die von ω_e abhängt.

$\varphi(\omega_e)$ die relative Phase zwischen Erreger und angeregtem System.

Trägt man nun

1. $\psi_0(\omega_e)$ gegen ω_e
2. $\varphi(\omega_e)$ gegen ω_0

auf, so

1. zeigt die Kurve einen Peak bei $\omega \approx \omega_o$ (Resonanzfall)
2. steigt die Kurve von Null über 90° bei $\frac{\pi}{2}$ auf 180°bei π an.

Allgemein gilt im stationären Fall:

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & x_0(\omega_e) \cos(\omega_e t - \varphi(\omega_e)) \\ \text{mit} & F(t) & = & F_0 \cos \omega_e t \end{array}$$

Bewegungsgleichung für mechanische erzwungene Systeme

Die Grundgleichung der Dynamik besagt, dass die Beschleunigung $a = \ddot{x}(t)$ von der Summe aller am System angreifenden Kräfte herrührt:

$$m\ddot{\psi}(t) = \underbrace{-D\psi(t)}_{\text{rücktreib. Federkraft}} - \underbrace{2\varrho m\dot{\psi}(t)}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{F_0 \cos \omega_e t}_{\text{Erregerkraft}} \tag{9.6}$$

<u>Beachte:</u>
Die Erregerkraft hat eine harmonische Zeitabhängigkeit: Kreifrequenz des Erregers ω_e. Sie ist von der Eigenschwingfrequenz $\omega_0 = \left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ der freien ungedämpften Schwingungn zu unterscheiden.

Lösung der Schwingungsgleichung

Aus Experimenten weiß man, dass die stationäre Lösung der Form

$$\psi(t) = \psi_0(\omega_e)\cos(\omega_e t - \varphi(\omega_e))$$

ist.

Dabei hängt sowohl die Amplitude $\psi_0(\omega_e)$ wie auch die Phase $\varphi(\omega_e)$ der Schwingung (relativ zur erregenden Kraft) von ω_e ab.

- Bildung der ersten Ableitung:

$$\dot{\psi}(t) = -\psi_0(\omega_e)\omega_e \sin(\omega_e t - \varphi(\omega_e))$$

Da gilt: $|\sin(...)| \leq 1$, folgt:

$$\Rightarrow \qquad |\dot{\psi}(t)| \leq \psi_0(\omega_e)\cdot\omega_e$$

- Bildung der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}(t) &= -\psi_0(\omega_e)\omega_e^2\cos(\omega_e t - \varphi(\omega_e)) \\ \Rightarrow \qquad |\ddot{\psi}(t)| &\leq \psi_0(\omega_e)\cdot\omega_e^2 \end{aligned}$$

Diskussion der Ergebnisse

Untersucht wird nun die relative Größe der einzelnen Summanden der Bewegungsgleichung (9.6) als Funktion von ω_e.

1. Kleine ω_e:

$$\begin{aligned} \text{Aus} \qquad m\ddot{\psi}(t) &= -D\psi(t) - 2\varrho m\dot{\psi}(t) + F_0\cos\omega_e t \\ \text{folgt} \qquad D\cdot\psi(t) &\simeq F_0\cos\omega_e t \end{aligned}$$

Dies beruht darauf, dass die beiden Summanden $\ddot{\psi}(t)$ und $2\varrho m\dot{\psi}(t)$ klein gegenüber $D\psi(t)$ sind. Sie enthalten den Faktor ω_e bzw. ω_e^2.

Für kleine Werte für ω_e gegenüber ω_0 folgert nun aus

$$\begin{aligned} D\cdot\psi(t) &\simeq F_0\cos\omega_e t \\ \text{das Ergebnis:} \qquad \psi(t) &\approx \frac{F_0}{D}\cos\omega_e t = \frac{F(t)}{D} \end{aligned}$$

Somit schwingen erzwungene Schwingung und Erregerkraft in Phase.

2. Große ω_e:

$$\begin{aligned} \text{Aus} \qquad m\ddot{\psi}(t) &= -D\psi(t) - 2\varrho m\dot{\psi}(t) + F_0\cos\omega_e t \\ \text{folgt nun} \qquad \ddot{\psi}(t) &\simeq \frac{F_0}{m}\cos\omega_e t \end{aligned}$$

Hier ist nun der Summand $m\ddot{\psi}(t)$ überwiegend.

Integration liefert:

$$\psi(t) \approx -\frac{F_0}{m\omega_e^2}\cos\omega_e t$$

$\Rightarrow$ Somit schwingt die erzwungene Schwingung gegenphasig zu $F(t)$. Die Amplitude ist klein, da ω_e^2 im Nenner steht.

Die Phase von $\psi(t)$ steigt für wachsendes ω_e von $\varphi(\omega_e) \approx 0$ auf $\varphi(\omega_e) \approx 180°(\pi)$ an. Somit muss irgendwo $\varphi(\omega_e) = \frac{\pi}{2}$ werden. Experimente zeigen, dass dies für den Fall $\omega_e \approx \omega_0$ gilt.

Komplexe Lösung der Bewegungleichung

Bereits ermittelt war:

$$\begin{aligned} m\ddot{\psi}(t) + D\psi(t) + 2\varrho m\dot{\psi}(t) &= F_0\cos\omega_e t \\ \text{oder} \qquad \ddot{\psi}(t) + \omega_0^2\phi(t) + 2\varrho\dot{\psi}(t) &= \frac{F_0}{m}\cos\omega_e t \end{aligned}$$

Stattdessen wird nun die komplexe Differentialgleichung betrachtet:

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) + 2\varrho\dot{z}(t) = \frac{F_0}{m}\exp(i\omega_e t)$$

Der Realteil der gesuchten Lösung $z(t)$ ist das gesuchte $\psi(t)$.
Auf der rechten Seite steht nämlich nur der Realteil der komplexen Erregerkraft.

Es wird ein komplexer Ansatz gemacht:

Der Ansatz

$$z = A\exp(i\omega_e t)$$

liefert:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}\cdot\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2i\varrho\omega_e\right)}{(\omega_0^2-\omega_e^2) + \left(2\varrho\omega_e\right)^2}$$

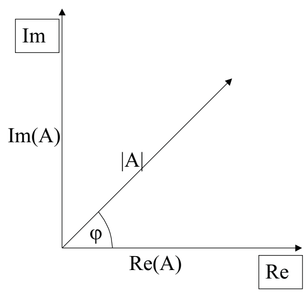


Abbildung 9.7: Vektor A in der kompl. Ebene

Diskussion

Mit

$$z(t) = Ae^{i\omega_e t}$$

wird

$$\psi(t)0 = Re\{z(t)\} = |A| \cos(\omega_e t + \varphi)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\left[(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 - (2\varrho\omega_e^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \text{und} \qquad \tan\varphi &= \frac{2\varrho\omega_e}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \end{aligned}$$

Anwendung: Schwingungsbedämpfung (Lasertisch)

- ω_o ist so zu wählen, dass sie unterhalb der häufig vorkommenden Störfrequenzen[3] liegt.

⇒ Das System reagiert wenig auf die am häufigsten vorkommenden äußeren Störungen. Grund: Man liegt weit oberhalb der Resonanzfrequenz.

- Schwingungsisolierte Systeme werden
  - mit niedrigem ω_0 gelagert, und
  - hohe Dämpfung verwendet

Betrachtung der Resonanz

Im Resonanzfall nimmt das schwingungsfähige System Energie auf. Die Schwingung schaukelt sich auf:

$$\overline{P(t)} = F_0 \psi_0(\omega_0) \cdot \frac{1}{2}$$

Die Amplitude wächst solange an, bis die Reibungskraft die äußere Erregerkraft kompensiert. Demnach ist die Amplitude umso größer, je kleiner die Dämpfung/Reibung ist.
Ergebnis:

$$|\psi_0(\omega_0)| = \frac{F_0}{2\varrho m\omega_0}$$

[3] Störfrequnz als ω_e auffassen

Will man nun die vom System aufgenommene Leistung berechnen, betrachte man zunächst folgende Verhältnisse im Resonanzfall. Dort ist:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi_0 \sin \omega_e t \\ F(t) &= F_0 \cos \omega_e t\end{aligned}$$

Es folgt für die Leistung:

$$\begin{aligned}P(t) &= F(t) \cdot \dot{x}(t) \\ P(t) &= F_0 x_0 \omega_e \cos^2 \omega_e t\end{aligned}$$

$P(t)$ ist immer positiv! Das System nimmt also in Resonanz Energie auf: *Die Schwingung schaukelt sich auf.*

Im Zeitmittel über viele Perioden der Schwingung wird:

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2}\psi_0\omega_2$$

Der mechanische Einschwingvorgang

In der Lösung für den stationären Fall

$$\psi(t) = \psi_0(\omega_e) \cdot \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

taucht ω_0 nur noch in der ω_e- Abhängigkeit von ψ_0 und $\varphi(\omega_e)$ auf.

In der Einschwingphase ist das jedoch anders: Dort ist $\psi(t)$ die Überlagerung der Lösung für den stationären Fall und der allgemeinen Lösung für die zugehörige homogene Differentialgleichung, bei der also $F(t) \equiv 0$ gesetzt wird.

Dann gilt also:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \underbrace{\psi_0(\omega_e) \cdot \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))}_{\text{stationärer Fall}} + \underbrace{A \exp(-\varrho t) \cdot \cos(\omega_f t + \varphi_f)}_{\text{allgem. Lösung freie ged. Schwingung}} \\ \text{mit} \quad \omega_f &= \left(\omega_0^2 - \varrho^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Für den 2. Summanden ist die Lösung die bekannte für die gedämpfte Schwingung, da der Fall $F(t) \equiv 0$ gerade die Differentialgleichung für die freie gedämpfte Schwingung liefert.

Für große t ($\gg \frac{1}{\varrho}$) klingt der 2. Summand gegen Null ab; der 1. Summand, die Lösung für den stationären Fall, bleibt übrig.

Zusammenfassung zu 9.4.1:

Voraussetzung der Resonanz in der Mechanik:

- Schwingungsfähige Systeme (Faden-, Federpendel, Drehpendel...)

- äußere periodische Einwirkung auf das System (Moment, Kraft)

Wenn Erregerfrequenzen mit Eigenfrequenzen des schwingungsfähigen Systems übereinstimmt, so gerät jedes in Resonanz: Amplitude und Phase sind der Erregerfrequenz entgegengerichtet.

9.4.2 Erzwungene elektromagnetische Schwingungen

Betrachtet werden LRC- Kreise, in die eine periodische Wechelspannung

$$U_{\sim}(t) = U_0 \sin \omega t$$

eingespeist wird.

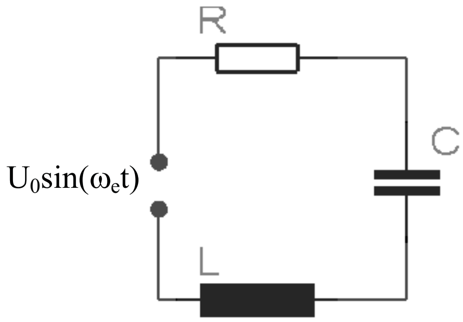


Abbildung 9.8: RCL- Glied mit Erreger

Untersucht werden soll nun die Abhängikeit des Stromflusses $I(\omega_e)$ von der Erregerfrequenz ω_e.
Die Krichhoff' sche Maschenregel besagt:

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0 \sin \omega_e t$$

Einmaliges Differenzieren nach der Zeit liefert:

$$\begin{aligned} L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} &= U_0 \omega_e \cos \omega_e t \\ L \cdot \ddot{I}(t) + R \cdot \dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C} &= U_0 \omega_e \cos \omega_e t \\ \ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{I(t)}{LC} &= \frac{U_0 \omega_e}{L} \cos \omega_e t \end{aligned}$$

Mit $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ und $2\varrho = \frac{U_0 \omega_e}{L} \cos \omega_e t$ folgt für den Stromfluss die Differentialgleichung:

$$\ddot{I}(t) + 2\varrho \dot{I}(t) + \omega_0^2 I = \frac{U_0 \omega_e}{L} \cos \omega_e t$$

Im stationären Zustand ist die Lösung nun wieder:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e)) \\ \text{wobei} \quad I_0(\omega_e) &= \frac{U_0}{\left[R^2 + \left(\omega_e L + \frac{1}{\omega_e C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

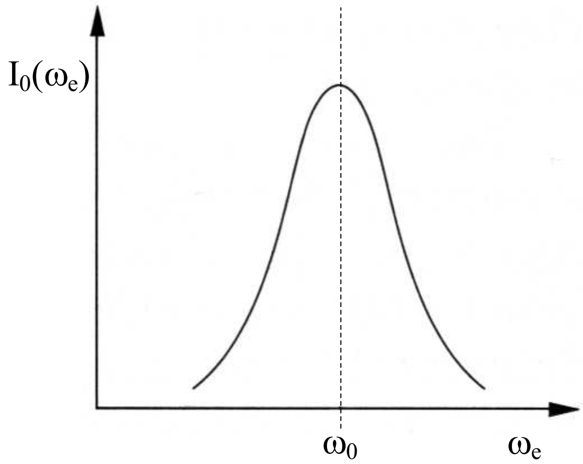


Abbildung 9.9: Stromresonanz beim RCL- Glied

Das Maximum liegt bei $\omega_e = \left[\frac{1}{LC}\right]^{\frac{1}{2}} = \omega_0$. Dies entspricht der Eigenfrequenz des ungedämpften freien Systems.

Variation der Erregerfrequenzen

Experimentell werden die Erregerfrequenzen langsam geändert und dabei das Verhalten des RCL-Gliedes betrachtet. Die Veränderung der Erregerfrequenz geschieht kontinuierlich mit der Zeit; somit ist die Zeitachse proportional zur Erregerfrequenz.

Beobachtungen:

- Die Amplitude $I_0(\omega_e)$ ändert sich ebenfalls langsam mit der Zeit.
- Die Zeitabhängigkeit der Amplitude spiegelt das Resonanzverhalten wieder.
- Wird der Widerstand R vergrößert, so wird die Resonanz immer weniger ausgeprägt und verschwindet schließlich ganz.

Der Phasenwinkel $\varphi(\omega_e)$

- Bei kleinen ω_e- Werten spielt die Induktivität L keine Rolle (wg. dem induktiven Widerstand $R_L = \omega_e L$).

  $\Rightarrow$ Phasenverschiebung von $+90°$zwischen Strom und Spannung
- Bei großen ω_e- Werten spielt die Kapazität C keine Rolle ($R_C = \frac{1}{\omega_e C}$).

  $\Rightarrow$ Phasenverschiebung von $-90°$zwischen Strom und Spannung

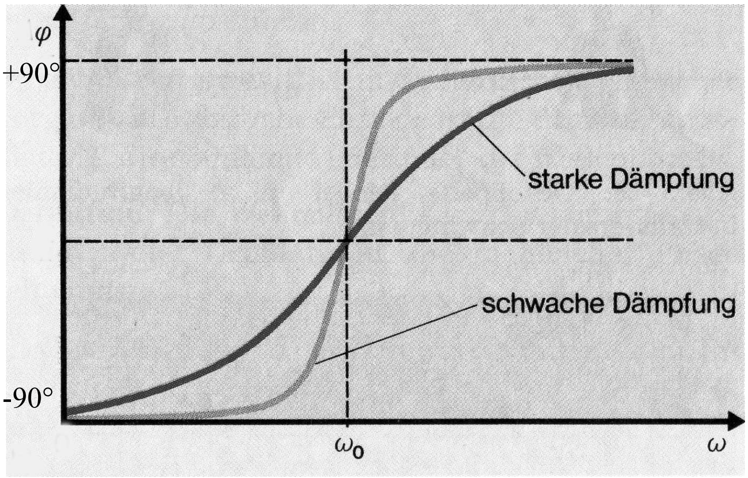


Abbildung 9.10: Phasenverschiebung in Abhängigkeit von ω_e

9.5 Gekoppelte Oszillatoren

Motivation

Gekoppelte Pendel befinden sich überall. Man betrachte ein Gebäude mit mehreren Stockwerken. Dann lässt sich jedes Stockwerk als schwingfähige Einheit auffassen. Die Kopplung erfolgt dabei über die bauliche Verknüpfung zwischen den Etagen.
Es soll nun untersucht werden, was z.B. geschieht, wenn am untersten Stockwerk gerüttelt wird (Erdbeben).
Das heißt: Dieses Kapitel untersucht die erzwungenen Schwingungen gekoppelter Oszillatoren.

9.5.1 Gekoppelte Pendel - Das Doppelpendel

Bisher wurden mechanische Systeme betrachtet, bei denen die periodische Bewegung durch *eine* Variable beschrieben werden konnte. Sie besaßen also *einen* Freiheitsgrad.

Nun werden Systeme untersucht, bei denen mehr als eine Variable zur Beschreibung des Bewegungszustandes benötigt wird.

Ein Beispiel für ein System mit 2 Freiheitsgraden ist ein gekoppeltes Pendel:

Zustandsgröße	$\varphi_1(t)$	;	$\varphi_2(t)$	beim Fadenpendel
Zustandsgröße	$x_1(t)$	;	$x_2(t)$	beim Federpendel

Einfache Bewegungsform der Pendel

Beide Körper schwingen mit gleicher Frequenz und in Phase. Sie durchlaufen zur gleichen Zeit ihre Nulllage.

Definition 9.12: EIGENSCHWINGUNG

> *Eine Bewegungsform, bei der alle beteiligten Oszillatoren mit derselben Frequenz und in Phase schwingen, heißt Eigenfrequenz oder auch Normalschwingung oder Fundamentalschwingung.*

Die zwei gekoppelten Pendel besitzen zwei Eigenschwingungen unterschiedlicher Frequenz: *Gleichtakt* und *Gegentakt.*

Experimentell kann man feststellen, dass die Eigenfrequenz von der Kopplungsstärke zwischen den Oszillatoren abhängt.

Komplizierte Bewegungsform der Pendel

Wird nur ein Pendel zur Zeit $t = 0$ ausgelenkt, so geht mit der Zeit die Schwingungsenergie auf das zweite Pendel über. Anschließend kehrt sie auf das erste Pendel zurück. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Definition 9.13: SCHWEBUNG

> *Eine Schwingung, bei der die Amplitude langsam periodisch schwankt, heißt Schwebung.*

Eine stärkere Kopplung zwischen den Oszillatoren beschleunigt den Energieaustausch zwischen den gekoppelten Pendeln.

Später wird man zeigen, dass eine Schwebung als Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz dargestellt werden kann.

Rückführung des gekoppelten Pendels auf erzwungene Schwingungen

- Jedes Pendel liefert die erregende Kraft $F(t)$ für das jeweilig andere Pendel.
- Die erregende Kraft und das erzwungene System haben dieselben *Eigenfrequenzen*.
- Erreger und anzuregendes System sind in Resonanz.
- Das anzuregende System entnimmt dem anregenden Energie.

⇒ Somit fließt vom erregenden in das anzuregende System solange Energie, bis der Erreger seine gesamte Energie an den Erregten abgegeben hat.

- Beide Pendel tauschen ihre Funktion als Erreger und Angeregter nach diesem Vorgang.

Nun kann man eine Erweiterung auf mehrere gekoppelte Oszillatoren vornehmen:
Die Energie wird solange weitertransportiert, bis der Energietransport das Ende der Kette erreicht. Offensichtlich führt dieser Energietransport zur Ausbildung einer Wellenerscheinung, bei der der Bewegungszustand der Pendelkette eine Funktion von Ort und Zeit ist:

$$\psi(x, t)$$

Quantitative Untersuchung der gekoppelten Federpendel

1. Gleichphasige Fundamentalschwingung:
   - Beide Pendel schwingen immer im Takt: $x_1(t) = x_2(t)$
   - Die Kopplungsfeder wird nicht beansprucht.
   - Jede der Massen m_1, m_2 mit $m_1 = m_2$ erfährt dieselbe rücktreibende Kraft wie beim einfachen Federpendel.

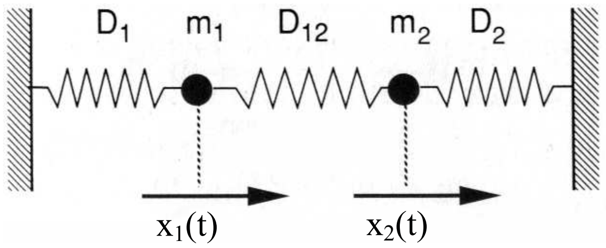


Abbildung 9.11: Gekoppelte, gleichphasige Federpendel

Eigenfrequenz der 1. Fundamentalschwingung (gleichsphasig) mit D als Federkonstante der rücktreibenden Feder:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{D}{m} \\ \Rightarrow \qquad \omega_1 &= \sqrt{\frac{D}{m}} \end{aligned}$$

Somit gilt für die 1. Fundamentalschwingung:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos \omega_1 t \\ x_2(t) &= A_1 \cos \omega_1 t \end{aligned}$$

2. <u>Gegenphasige Fundamentalschwingung</u>:
   - Beide Pendel sind immer gegenphasig: $x_2(t) = -x_1(t)$
   - Die Kopplungsfeder ist um $2x_1(t)$ gedehnt bzw. gestreckt.
   - Die Wandfedern sind um $x_1(t)$ gestaucht, die andere um $x_1(t)$ gedehnt; oder umgekehrt.

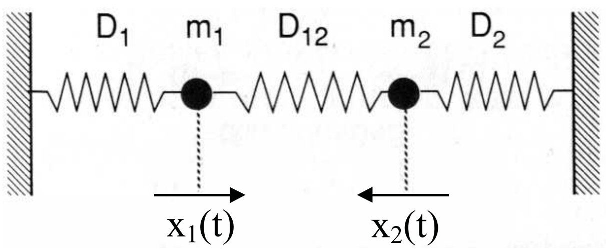


Abbildung 9.12: Gekoppelte, gegenphasige Federpendel

Die rücktreibende Kraft:

$$\underbrace{-D\cdot x_1(t)}_{\text{Wandfeder}} - \underbrace{2D_{12}x_1(t)}_{\text{Kopplungsfeder}} = -3Dx_1(t)$$

Somit lautet die Bewegungsgleichung für $D = D_1 = D_2 = D_{12}$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= -3Dx_1(t) \\ \omega_2^2 &= \frac{3D}{m} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{3D}{m}} \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D_{12}}{m}}$$

Anwendung der Grundgleichung der Dynamik:

Die Dehnung der Feder ist von beiden Massen abhängig. Z.B. erfährt die Masse m_1 die Kraft

$$-D_{12}(x_1(t) - x_2(t))$$

von der Kopplungsfeder und die Kraft

$$-Dx_1(t)$$

von der Wandfeder.

So ergibt sich für m_1:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) = -Dx_1(t) - D_{12}(x_1(t) - x_2(t))$$

... und analog für m_2:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) = -Dx_2(t) - D_{12}(x_2(t) - x_1(t))$$

Man betrachte den Spezialfall, dass die beiden Massen gleich sind:

$$\begin{aligned} m &= m_1 = m_2 \\ \ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 x_1(t) - \frac{D_{12}}{m}(x_1(t) - x_2(t)) \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 x_2(t) - \frac{D_{12}}{m}(x_2(t) - x_1(t)) \end{aligned}$$

Man erhält ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen. Jede Gleichung enthält beide Funktionen $x_1(t)$.

Lösungsansatz:
Einführung der Koordinaten des Schwerpunktes

$$z^+(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$

und der Relativkoordinaten

$$z^-(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) - x_2(t))$$

Ersetze $x_{1,2}(t)$ durch $z^{+,-}$ durch Addition/Subtraktion der gekoppelten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{z}^+(t) &= -\omega_0^2 z^+(t) \\ \ddot{z}^-(t) &= -\left(\omega_0^2 + \frac{2D_{12}}{m}\right) z^-(t) \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für z^+ und z^- sind entkoppelt und stellen Schwingungsgleichungen mit folgender Lösung dar:

$$\begin{aligned} z^+(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) && \omega_1 = \omega_0 \\ z^-(t) &= A_2 \cos\left[\left(\omega_0^2 + \frac{2D_{12}}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t + \varphi_2\right] \\ &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) && \omega_2 = \left(\omega_o^2 + \frac{D_{12}}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Definition 9.14: Normalschwingungen

Die durch

$$z^+(t) \quad ; \quad z^-(t)$$

beschriebenen harmonischen Schwingungen des gekoppelten Systems heißen Normal- oder Eigenschwingungen.

Die Rücktransformation von $z^+(t)$ und $z^-(t)$ auf $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gestattet also die Bewegung der gekoppelten Pendel als Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit ω_1 und ω_2 darzustellen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Anregung der beiden Normalschwingungen

A) Sei $A_2 \equiv 0$:

$$\begin{aligned} x_1(t = 0) &= A_1 \\ x_2(t = 0) &= A_1 \end{aligned}$$

Dann werden beide Pendel in dieselbe Richtung um denselben Wert ausgelenkt (Gleichphasige Schwingungen mit $\omega = \omega_1$).

B) Sei $A_1 \equiv 0$:

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= A_2 \\ x_2(t=0) &= -A_2 \end{aligned}$$

Hier werden beide Pendel in entgegengesetzte Richtung um denselben Wert ausgelenkt (Gegenphasige Schwingungen mit $\omega = \omega_2$).

Zu A) Man erhält die 1. Eigenschwingung ($x_1(t) \equiv x_2(t)$) durch die Wahl von $A_2 \equiv 0$.

Zu B) Man erhält die 2. Eigenschwingung ($x_1(t) = -x_2(t)$) durch die Wahl von $A_1 \equiv 0$.

Schwebungen

Als weiteren Spezialfall betrachte man die Situation

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A \\ \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

Hierbei ergeben sich Schwebungen:

$$x_1(t) = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \tag{9.7}$$

$$x_2(t) = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \tag{9.8}$$

Es fragt sich nun, wie man anregen muss, damit sich diese Bewegungsform ergibt. Dazu betrachte man den Zeitpunkt t_0. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & x_2(t=0) &= 0 \\ \text{sowie}\quad & x_1(t=0) &= 2A \end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist also nur das eine Pendel ausgelenkt ($x_1(t=0) = 2A;\quad x_2(t=0) = 0$)

Fasst man Gleichung (9.7) und (9.8) zusammen, so erhält man zunächst:

$$x_{1,2} = A\left\{\cos\omega_1 t \pm \cos\omega_2 t\right\}$$

Das Additionstheorem besagt:

$$\cos\alpha \pm \cos\beta = 2\underbrace{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{\text{bzw:} -\sin(\ldots)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}_{\text{bzw:} \sin(\ldots)}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} x_{1,2}(t) &= A_{mod}(t) \cdot \underset{(\sin)}{\cos} \left\{ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right\} \\ \text{mit} \quad A_{mod}(t) &= 2A \cdot \underset{(\sin)}{\cos} \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right\} \end{aligned}$$

Signalübertragung: Amplitudenmodulation

Versuch: *2 Schallquellen am menschlichen Ohr*
Das Trommelfell wird durch zwei Schallquellen mit ω_1 und ω_2 simultan in Schwingung versetzt. Am Oszillographen lese man ab, was am Ohr ankommt.

Die Frage ist nun, was man hört. Hört man

a) ω_1 und ω_2?

b) oder ω_T und modulierte Amplitude?

Mit ω_T als Trägerfrequenz.
Es stellt sich heraus, dass man

a) hört, wenn ω_1 und ω_2 nicht um mehr als 6% voneinander abweichen

b) hört, wenn Fall a) nicht zutrifft. Man hört dann einen modulierten Schwingungsvorgang mit ω_T

Definition 9.15: AMPLITUDEN- MODULATION

Amplituden- Modulation liegt vor, wenn gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_{mod}(t) \cdot \cos \omega_T t \\ \textit{mit} \quad \omega_T &: \textit{Trägerfrequenz} \end{aligned}$$

Dabei ist A_{mod} verglichen mit $\cos \omega_T t$ <u>langsam</u> zeitlich veränderlich und muss nicht notwendigerweise eine periodische Funktion sein.

$\Rightarrow$ Grundlegend für die Signalübertagung: Das zu übertragende Signal wird, als $A_{mod}(t)$, auf einen Träger mit $\cos \omega_T t$ aufmoduliert.

Wiederholung zu freien gekoppelten Schwingungen

- System hat zwei Eigenschwingungen: Gleichtakt und Gegentakt (Alle Oszillatoren schwingen mit derselben Frequenz)

- Jeder beliebige, andere Bewegungsvorgang kann als Überlagerung dieser Fundamentalschwingungen beschrieben werden: Dies liefert Schwebung.

Wiederholung zu erzwungenen gekoppelten Schwingungen

Wird ein beliebiges, schwingfähiges System mit einem Freiheitsgrad zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so tritt Resonanz bei seiner Eigenfrequenz ω_0 auf.

Hat ein schwingfähiges System nun zwei Freiheitsgrade, so existiert Resonanz bei ω_1 und ω_2, den beiden Eigenfrequenzen.
Experimentell kann dies nachgewiesen werden. Zur Demonstration muss die Erregerfrequenz ω_e in der Nähe der Eigenfrequenz gewählt werden. Dies ist am besten mit einem (Schritt-) Motor zu erreichen.

$$\begin{array}{ccll} \omega_e & \sim & \omega_1 & \Rightarrow \text{Gleichtakt} \\ \omega_e & \sim & \omega_2 & \Rightarrow \text{Gegentakt} \end{array}$$

Zur quantitativen Beschreibung der erzwungenen, gekoppelten Pendelschwingung dient die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_1(t) &= -D_1 \cdot x_1(t) - D_{12}(x_1 - x_2) - 2m\varrho\dot{x}_1(t) + F_0 \cos\omega_e t \\ m \cdot \ddot{x}_2(t) &= -D_2 \cdot x_2(t) + D_{12}(x_1 - x_2) - 2m\varrho\dot{x}_2(t) \end{aligned}$$

wenn die äußere Kraft $F_0 \cos\omega_e t$ an der Masse m_1 angreift. Zusätzlich ist die Dämpfung des Systems zu berücksichtigen.

Die Einführung der Normalkoordinaten z^+ und z^- lieferte entkoppelte Differentialgleichungen für z^+ und z^-, welche formal Gleichungen von gedämpften Schwingungen mit Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \left(\omega_0^2 - \varrho^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{D_{12}}{m} - \varrho^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

entsprechen.

Variation von ω_e liefert Resonanzen in der Umgebung von ω_1 und ω_2: Bei ω_1 trägt nur $z^+(t)$, bei ω_2 nur $z^-(t)$ maßgeblich zur Bewegung des Systems bei; das heißt, in Resonanz sind nur die beiden Normalschwingungen angeregt.
Außerhalb der Resonanzen ist die Bewegung eine Überlagerung von z^+ und z^-. Das System gerät nicht in Resonanz.
Anregung mit

$$\omega_1 < \omega_e < \omega_2$$

Gekoppelte elektromagnetische schwingungsfähige Systeme

LRC- Kreise können gekoppelt werden:

- Induktiv (gegenseitige Induktion)

- kapazitiv
- galvanisch

Beispiel: *Zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise*

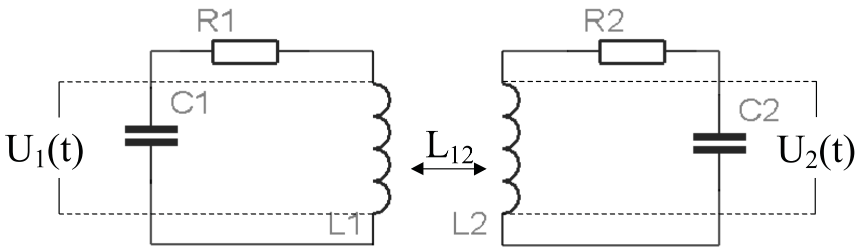


Abbildung 9.13: Induktiv gekoppelte Schwingkreise

Für I_1 und I_2 ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
L_1 \cdot \ddot{I}_1(t) + R_1 \cdot \dot{I}_1(t) + \frac{I_1}{C_1} + L_{12}\ddot{I}_2(t) \\
L_2 \cdot \ddot{I}_2(t) + R_2 \cdot \dot{I}_2(t) + \frac{I_2}{C_2} + L_{12}\ddot{I}_1(t)
\end{aligned}
$$

Die Induktivität L_{12} beschreibt die Tatsache, dass am Ort der Spulen vom Strom durch die jeweils andere Spule eine Spannung induziert wird, die dem Strom durch die Spule proportional ist; Also:

$$
\begin{aligned}
U_1(t) &= -L_{12}\frac{dI_2}{dt} \\
U_2(t) &= -L_{12}\frac{dI_1}{dt}
\end{aligned}
$$

Die Lösung erfolgt über den komplexen Ansatz

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(i\omega t)$$

und liefert eine quadratische Bestimmungsgleichung für ω.

Für den Spezialfall

$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_2 = L \\
C_1 &= C_2 = C \\
R_1 &= R_2 = 0
\end{aligned}
$$

teilt sich die Frequenz $\omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}$ durch die Kopplung in zwei Frequenzen ω_1 und ω_2 auf:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \left[\frac{1}{L - L_{12}C}C\right]^{\frac{1}{2}} \\
\omega_2 &= \left[\frac{1}{L + L_{12}C}C\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Für schwache Kopplung gilt:

$$\Delta\omega \sim \omega_0 \frac{L_{12}}{L}$$

9.5.2 N gekoppelte Oszillatoren

Man betrachte die freie Schwingung eines Systems mit N Oszillatoren. Nun muss eine Charakterisierung der Bewegungsform des Systems durch N Funktionen vorgenommen werden:

$$x_1(t), x_2(t) \quad ... \quad x_N(t)$$

Für ein gekoppeltes Torsionspendel (Torsionspendelkette) oder ein Fadenpendel sei die Bewegung durch

$$\psi_1(t), \psi_2(t) \quad ... \quad \psi_N(t)$$

beschrieben.

Versuch: *Torsionspendelkette mit 5 Oszillatoren*

Es soll nun versucht werden, das System so azuregen, dass die 5 Normalschwingungen deutlich werden.
⇒ Die manuelle Anregung *aus dem Gefühl heraus* gelingt nicht. Bei $N = 5$ ist dies nicht mehr so einfach wie bei $N = 2$.
Zum weiteren Vorgehen nutze man nun die Kenntnisse über Resonanz bei erzwungenen Schwingungen in gekoppelten Systemen.

Auf eine Luftkissenbahn werden 5 mit Federn gekoppelte Gleiter gesetzt (5 Freiheitsgrade). Allgemein gilt:

Eigenschwingungen bei N Oszillatoren

Bei einem System mit N Freiheitsgraden liegen N Fundamental-/ Eigenschwingungen vor.

Es wird anstelle einer manuellen Anregung ein Motor verwendet, der mit der Erregerfrequenz ω_e anregt.
Nun werden die Erregerfrequenzen langsam verändert und beobachtet, wie oft diese Resonanz hervorrufen. Man könnte feststellen, dass für $n = 5$ fünf verschiedene Erregerfrequenzen Resonanz hervorrufen; und somit auch 5 Eigenschwingungen existieren.

Experimentell gezeigt werden drei von den fünf möglichen Erscheinungsformen der Bewegung:

n=1 Gleichtakt: niedrigste Eigenfrequenz

n=2 Gegentakt: höchste Eigenfrequenz

n=3 Die Bewegung besitzt Knoten der Bewegung: Bestimmte Stellen bleiben in Ruhe

Die drei Normalschwingungen eines nicht linearen dreiatomigen Moleküls

Ein dreiatomiges Molekül hat drei Freiheitsgrade der Schwingung. Jedem Schwingungsfreiheitsgrad entspricht eine Normalschwingung. Somit liegen 3 Normalschwingungen vor. Das heißt, es liegen drei Bewegungsformen vor, bei denen alle Atome des Moleküls mit derselben Frequenz schwingen.

Diese drei Normalschwingungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ erfolgen nicht auf einer Geraden:

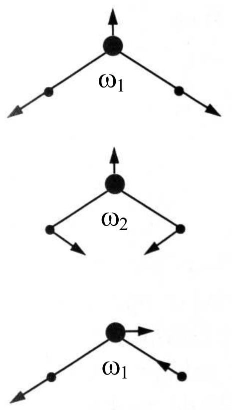


Abbildung 9.14: 3 Normalschwingungen

Bei allen drei Normalschwingungen ändert sich der Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls des Moleküls nicht.

Torsionspendelkette mit 50 Oszillatoren

Die Zahl der möglichen Eigenschwingungen ist gleich der Anzahl der schwingungsfähigen Elemente. Die Torsionspendelkette hat 50 Freiheitsgrade durch die 50 gekoppelten Torsionspendel. Die Charakterisierung der Bewegung erfolgt über:

$$\begin{array}{rcl} \psi_1(t) & ... & \psi_n(t) \\ n & = & 50 \end{array}$$

Man erzeuge einen Impuls auf der Torsionspendelkette. Dieser *läuft* über die Kette.

⇒ Man muss für jeden Zeitpunkt t die Auslenkung

$$\psi_i(t) \quad (i = 1, 2...N)$$

angeben.

- Die Energie wird zwischen den Drehpendeln übertragen.

- Die Störung wird auf Nachbarpendel übertragen.
- Es wird Energie transportiert: Verdrillungs- und kinetische Energie wird zwischen den Drehpendeln übertragen.

Diese Erkenntnisse sind denen des Kapitels mit *zwei* Oszillatoren gleich. Neu ist nun aber:

Anders als beim Doppelpendel pendelt die Energie nicht zwischen zwei benachbarten Pendeln hin- und her, sondern wird sukzessiv auf daran anschließende, gekoppelte Oszillatoren übertragen (in rückwärtiger Richtung nach Refexion an Ende). Die Störung, die der anfangs angeregte Oszillator erfuhr, breitet sich längs der Kette aus.
$\Rightarrow$ Wellenartige Erscheinung

9.5.3 Nicht- lineare Kraftgesetze

Es wurden bereits lineare Kraftgesetze behandelt.

1. Elastische Verformung lieferte Rückstellkraft/- Moment proportional zur Auslenkung.
2. LC- Kreis lieferte harmonische Schwingung; Proportionalität zwischen Stromfluss und dem Verhältnis der beiden Energiespeicher L und C.

Aus diesen Proportionalitäten resultierten lineare Kraftgesetze.

Neu: Alle Systeme bei denen die

- Gravitationskraft ($\propto \frac{1}{r^2}$)
- Coulombkraft

dominieren, liefern nicht- lineare Kraftgesetze:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Beispiel: Schwerependel/ Physikalisches Pendel:
Rücktreibendes Moment:

$$|\overrightarrow{M}| = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi(t)$$

mit $\varphi(t)$ als Auslenkwinkel

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} &= \overrightarrow{M} \\ |\overrightarrow{L}| &= J_A \cdot \ddot{\varphi}(t) \end{aligned}$$

wobei J_A das Trägheitsmoment bezüglich des Aufhängepunktes A ist.

Wenn J_S der Schwerpunkt des Systems (Pendel) ist, gilt:

$$J_A = J_S + m \cdot l^2$$

mit l als Abstand zwischen S und A sowie m als Masse. Die Masse wird als im Punkt S vereinigte Punktmasse aufgefasst.

Feststellung: Schwingungen mit nicht- linearen Kraftgesetzen sind zwar periodisch, aber nicht sinusförmig, also anharmonisch.

Weitere Beispiele:

- E- Lehre: Schwingkreis mit Eisenkern
- Mechanik: Fadenpendel oder Physikalisches Pendel.

Fourier- Zerlegung

Die Mathematik lehrt: Jede Schwingung (jeder periodische Vorgang) ist ein Gemisch aus sinusförmigen Schwingunen, d.h. jede nicht- harmonische Schwingung kann als eine Summe sinusförmiger Teilschwingungen dargestellt werden.

Man kann dies auch experimentell zeigen:

- Man kopple ein schwingungsfähiges System variabler Eigenfrequenz an den periodischen Vorgang $\psi(t)$ (Detektor).
- Das heißt, man versetzt es in Schwingung unter dem Einfluss des anharmonischen Vorgangs.
- Man erhält Resonanz bei jeder Frequenz, die in diesem anharmonischen Gemisch enthalten ist.

Fourier- Reihe für beliebigen, periodischen Vorgang

Sei T die Periode. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi_0 \quad +\psi_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\
&\qquad\quad +\psi_2 \cos(2\omega t + \varphi_1) \\
&\qquad\quad +... \\
&\qquad\quad +\psi_n \cos(n\omega t + \varphi_1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \\
\text{mit} \quad \omega &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n \exp(in\omega t + \varphi_n)$$

Kapitel 10

Wellen

10.1 Einführung: Allgemeine Eigenschaften von Wellenerscheinungen

Es werden Versuche durchgeführt:

- ...mit der Wellenwanne $\Rightarrow$ Kreiswellen oder ebene Wellen
- ...mit der Torsionspendelkette: lineare Anordnung von Drehpendeln $\Rightarrow$ Anregung einer Sinuswelle
- senkrecht aufgehangene Feder $\Rightarrow$ Ausbreitung der Störung in Richtung der Feder

Um die Gemeinsamkeiten aller Wellenerscheinungen zu beschreiben, folgt die

Definition 10.1: WELLE

Als Welle bezeichnet man die Ausbreitung einer Störung in

1. *einer periodischen Struktur*
2. *einem homogenen Medium.*

Die Störung; d.h. Welle ist eine Funktion

$$\psi(\overrightarrow{r}, t)$$

von Ort und Zeit.

Definition 10.2: Wellenerregung

Die Funktion

$$\psi(\overrightarrow{r}, t)$$

heißt Wellenerregung.

Gemeinsame Merkmale verschiedener Wellen

- Es erfolgt eine zeitabhängige Veränderung der Größe $\psi(\overrightarrow{r}, t)$, wenn man einen festen Ort $\overrightarrow{r}$ betrachtet.
- Die Störung ψ breitet sich in dem Medium mit endlicher Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ aus, eventuell in alle 3 Raumrichtungen $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$.
- Ursache der Ausbreitung ist die Kopplung zwischen verschiedenen Elementen des Mediums.
- Es wird keine Masse, aber Energie transportiert.

Zurückführung der Welle auf gekoppelte Pendel

Eine Schwingung wird sich infolge der Kopplung zwischen benachbarten Oszillatoren räumlich ausbreiten. Die Ausbreitung erfolgt solange, wie es angekoppelte Oszillatoren gibt.
$\Rightarrow$ Dabei wird Schwingungsenergie räumlich transportiert.
$\Rightarrow$ Eine derartige räumliche Ausbreitung heißt Welle.

Zusammenfassend ist eine Welle ein Vorgang, bei dem sich eine Schwingung in einem System gekoppelter Oszillatoren mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Die Geschwindigkeit hängt von der Masse der schwingenden Systeme sowie von der Kopplung zwischen ihnen ab.

Wellentypen

Die Störung im Medium kann entweder in Richtung der Ausbreitung dieser Störung gehen oder senkrecht darauf stehen. So folgen die Definitionen der beiden Wellentypen

Definition 10.3: Longitudinalwellen

Wellen, bei denen die Wellenerregung ψ in Ausbreitungsrichtung zeigt, heißen Longitudinalwellen (Versuch: senkrecht aufgehangene Feder).

Definition 10.4: Transversalwellen

> *Wellen, bei denen die Wellenerregung ψ senkrecht zu der Ausbreitungrichtung zeigt, heißen Transversalwellen (Versuch: Torsionspendelkette oder Seilwelle).*

Zum Vektorcharakter der Wellenerregung:

Zur Angabe der Richung der Störung $\psi(x, t)$ muss ψ ein Vektor sein:

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{r}, t)$$

Definition 10.5: Polarisationsrichtung

> *Die Richung der Wellenerregung $\overrightarrow{\psi}$ heißt Polarisationsrichtung der Welle.*

Bei Longitudinalwellen verzichtet man auf die Angabe der Polarisationsrichtung, da die Störung eh in Ausbreitungsrichtung erfolgt.

Dimension der Welle

Wellen sind im Allgemeinen mehrdimensional im folgenden Sinne: Die Störung breitet sich im Allgemeinen im Raum und nicht unbedingt längs einer Richtung aus.
So wird folgende Definition nötig:

Definition 10.6: Wellenfronten

> *Gebiete gleicher Störung, d.h. gleichen $|\overrightarrow{\psi}|$, heißen Wellenfronten.*

Man betrachte die drei folgenden Wellenerscheinungen:

1. Ebene Welle an Wellenwanne (Eine Ausbreitungsrichtung)
2. Kreisförmige Welle in Wellenwanne (Zwei Ausbreitungsrichtungen)
3. Schallwellen (Kugelwellen mit drei Ausbreitungsrichtungen)

Diese drei Wellen besitzen alle verschieden viele Ausbreitungsrichtungen. So lassen sich klassifizieren:

Definition 10.7: DIMENSON DER WELLE

1. *Wellen mit einer Ausbreitungsrichtung werden als eindimensionale Wellen bezeichnet:*
   1D- Welle mit Ausbreitung in eine Richtung
2. *Wellen mit zwei Ausbreitungsrichtungen werden als zweidimensionale Wellen bezeichnet:*
   2D- Welle mit Ausbreitung in einer Ebene
3. *Wellen mit drei Ausbreitungsrichtungen werden als dreidimensionale Wellen bezeichnet:*
   3D- Welle mit Ausbreitung im Raum

Beispiele von Wellen

Seilwelle

- Medium: Seil
- Eindimensionale Welle: Ausbreitung in eine Richtung
- Die Störung ist die seitliche Seilauslenkung
- Typ: Transversalwelle

Wasserwelle

- Medium: Flüssigkeit
- Zweidimensionale Welle: Ausbreitung längs der Oberfläche
- Die Störung ist die Auslenkung der Flüssigkeit(satome) an der Oberfläche.
- Typ: Transversalwelle

Schallwelle

- Medium: Gas...Festkörper
- Dreidimensionale Welle: Ausbreitung in alle Raumrichtungen
- Störung: Druckänderung bzw. Verschiebung der Moleküle des Mediums gegeneinander
- Typ: Longitudinalwelle

Elektromagnetische Welle

- Medium: Vakuum...Festkörper
- Dreidimensionale Welle: Ausbreitung in alle Raumrichtungen mit Lichtgeschwindigkeit c
- Störung: Zeitlich veränderliche Felder
- Typ: Transversalwelle mit $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{z}$

10.2 Fortschreitende Wellen

Es soll in diesem Kapitel eine genauere Untersuchung fortschreitender Wellen vorgenommen werden. So wird erneut die Torsionspendelkette als Beispiel für eine 1D- Welle verwendet:

Medium:
Lineare Anordnung von schwingungsfähigen Systemen, die beliebig gekoppelt sind.

1D- Welle:
Ausbreitungsrichtung ist die Kettenrichtung

Störung:
Auslenkung aus der Ruhelage

Transversale Welle:
Obgleich man transversale Wellen vorliegen hat, gebe man die Richtung von $\overrightarrow{\psi}$ nicht an: $\overrightarrow{\psi}$ hat die Richtung der Vertikalen; eine andere ist nicht möglich.

10.2.1 Darstellung harmonischer laufender Wellen

Untersucht wird die Ausbreitung einer Sinuswelle über die Torsionspendelkette. Angeregt wird über einen Motor.
$\Rightarrow$ Das äußere Pendel wird zu erzwungenen Schwingungen mit Frequenz $\omega = 2\pi\nu$ angeregt.

Betrachtung eines festen Ortes oder festen Zeitpunktes

1. Fester Ort $x = x_0$:

   Der Oszillator am betrachteten Ort führt eine Schwingung mit der Frequenz ω des Erregers aus:

   $$\psi(x_0, t) = \psi \sin(2\pi\nu t + \varphi(x_0)) \tag{10.1}$$

   Dabei hängt die Phasenlage $\varphi(x_0)$ vom herausgegriffenen Ort x_0 ab.

2. Fester Zeitpunkt: $t = t_0$:

   Vorgefunden wird eine sinusförmige Verteilung der Auslenkung $\psi(x, t_0)$ längs der Kette, d.h. ψ ist eine Sinusfunktion des Ortes.

   Schreibweise:

   $$\psi(x, t_0) = \psi_0 \sin\left(-\frac{s\pi}{\lambda} \cdot x + \tilde{\varphi}(t_0)\right) \tag{10.2}$$

   mit λ als Wellenlänge.

   Definition 10.8: WELLENLÄNGE

   Man bezeichnet λ als die Wellenlänge, wenn sich nach $x = \lambda$ der Wellenvorgang wiederholt.

Die Zusammenfassung der orts-/ zeitfesten Betrachtung liefert:

Aus Gleichung (10.1) und (10.2) ergibt sich:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin\left(\underbrace{2\pi\nu}_{\omega} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Zur Überprüfung: Bei Einsetzen von $x = x_0$ und $t = t_0$ ergeben sich wieder die Gleichungen (10.1) bzw. (10.2).

Bemerkung: Wird in der Gleichung in dem Sinusargument das Minuszeichen durch ein Pluszeichen ersezt, so läuft die Welle nicht mehr in $x-$ Richtung, sondern entgegengesetzt (nach links).

Diskussion der Ergebnisse

Im Folgenden wird die Abkürzung

$$2\pi\nu = \omega$$

verwendet und die Wellenzahl eingeführt:

Definition 10.9: WELLENZAHL

> *Für*
>
> $$\frac{2\pi}{\lambda} = k$$
>
> *heißt k Wellenzahl. Sie gibt die Anzahl der Wellenextrema pro Länge an.*

So folgt für den Ausdruck einer laufenden Sinuswelle:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx)$$

Berechnung der Phasengeschwindigkeit v_φ

Die Torsionspendelkette wird ausgelenkt. Es wird die Ausbreitung eines bestimmten Wellenmaximums längs der Kette beobachtet. Man stellt fest, dass sich die sinusförmige Verteilung starr entlang der Kette verschiebt.

Definition 10.10: PHASENGESCHWINDIGKEIT

> *Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenmaximums (oder auch einer beliebigen anderen Schwingungsphase) heißt Phasengeschwindigkeit v_φ.*

Wenn sich die Sinuswelle von einem Maximum um eine Wellenlänge λ verschoben hat, muss an betrachteter Stelle wieder ein Maximum sein. Dies kann nur der Fall sein, wenn das Torsionspendel am beliebigen Ort gerade einmal nach unten und wieder rauf geschwungen ist; also eine volle Schwingung vollzogen hat.

Definition 10.11: SCHWINGUNGSDAUER

> *Die Zeit, die vergeht, während sich die Welle um λ verschiebt, heißt Schwingungsdauer T.*

So folgt für die Phasengeschwindigkeit:

$$v_\varphi = \frac{\lambda}{T}$$

und mit $\nu = \frac{1}{T}$ folgt:

$$v_\varphi = \nu\lambda$$

...Oder auch mit $\omega = 2\pi\nu$ und $k = \frac{2\pi}{\nu}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Dies gilt allgemein für alle Wellentypen.

10.2.2 Die Wellengleichung

Motivation

Zur Aufstellung einer Wellengleichung motiviert die Frage: Wie kann man einer Anordnung/ Medium *ansehen*, ob und mit welcher Geschwindigkeit in ihm Wellenausbreitung möglich ist?

Dazu suche man eine Beziehung, die $\psi(x,t)$ erfüllen muss. Vorweck: Es wird sich um eine Beziehung zwischen den Ableitungen von $\psi(x,t$ nach x bzw. $t)$ handeln, also um eine Differentialgleichung für $\psi(x,t)$

Herleitung der Wellengleichung

Ausgehend von einer laufenden Sinuswelle

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Nun werden die partiellen Ableitungen von ψ nach x bzw. t gebildet:

1. Partiell nach x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -k \cdot \psi_0 \cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= k^2 \cdot (-\psi_0 \sin(\omega t - kx)) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -k^2 \psi
\end{aligned}$$

2. Partiell nach t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \omega \cdot \psi_0 \cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \cdot (\psi_0 \sin(\omega t - kx)) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \psi
\end{aligned}$$

Man kann somit schreiben:

$$\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Weiteres Umformen liefert:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_\varphi^2 \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{10.3}$$

Obige partielle Differentialgleichung (10.3) heißt Wellengleichung.

Stellt man für ein beliebiges physikalisches System die Grundgleichung der Dynamik auf (z.B.: aus dem Kräftegleichgewicht oder der Energiebilanz) und hat sie dann die Form der Wellengleichung, so tritt Wellenausbreitung mit der Phasengeschwindigkeit v_φ auf.

Diskussion der Ergebnisse

- Nicht nur die harmonische Sinuswelle ist Lösung der Wellengleichung.
- Aus Experimenten ist bereits die Existenz von Kreis-/ Kugelwellen bekannt. Auch diese sind Lösung der Wellengleichung.
- Dies gilt sogar für beliebige (nicht mal periodische) Störungen der Form:

$$f(x - v\varphi t)$$

Erweiterung auf 3D- Wellen

Für eine Kugelwelle gilt speziell

$$\psi(r,t) = \frac{A}{r}\sin(\omega t - kt)$$

Sie ist Lösung der 3D-Verallgemeinerung der obigen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_\varphi^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Die Gruppengeschwindigkeit

Feststellung: $v_\varphi(\omega)$ kann selbst von ω abhängen.

Dann läuft eine Störung, die nach Fourier aus einzelnen Sinuswellen mit verschiedenen Werten von ω aufgebaut ist, im Laufe der Zeit auseinander.

Versuch: *Puls auf Torsionspendelkette*

Man stellt fest: Die verschiedenen Sinuswellen besitzen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten $v_\varphi(\omega)$. Die Störung bewegt sich im Allgemeinen mit

$$v_g \neq v_\varphi(\omega)$$

Definition 10.12: Grupppengeschwindigkeit

*Die Geschwindigkeit v_g, mit der sich eine Störung (*Gruppe*) bewegt, heißt Gruppengeschwindigkeit.*

10.2.3 Energietransport mittels Wellen

Die Untersuchung des Energietransports geschieht anhand einer Torsionspendelkette.
Feststellung: Es wird keine Materie übertragen, sondern Energie. Dies kann an dem Auftreffverhalten einer Welle an einer Grenzfläche festgestellt werden.

Um obige Energie quantitativ zu erfassen, wird die Energiestromdichte eingeführt:

$$|\overrightarrow{j}_E| = v_\varphi \cdot \omega_E$$

mit ω_E die Energie(volumen)dichte

Energie- und Impulstransport elastischer Wellen

Bei einer elastischen Welle führen Massenelemente Δm Schwingungen aus, die sich wegen der Kopplung zwischen den Elementen im Raum ausbreiten.
Bezogen auf die Torsionspendelkette kann man die Massenelemente als einzelne Drehpendel interpretieren.

Nun soll die kinetische Energie eines einzelnen Massenelements betrachtet werden. Für die laufende Welle gilt:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \cos(\omega t - kx) \\ \Rightarrow \quad W_{kin}(t) &= \frac{1}{2}\Delta m \cdot \dot{\psi}^2(t) \\ &= \frac{1}{2}\Delta m \psi_0^2 \omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Mittelung über eine Schwingungsperiode liefert für $\sin^2(...) = \frac{1}{2}$, so dass:

$$\overline{W_{kin}} = \frac{1}{4}\Delta m \psi_o^2 \omega^2$$

Mit der *Belegungsdichte der Torsionspendelkette mit Pendeln* $\Delta m = \varrho \Delta V$ erhält man die mittlere kinetische Energiedichte zu

$$W_{kin} = \frac{\overline{W_{kin}}}{\Delta V} = \frac{1}{4}\varrho \psi_0^2 \omega^2$$

Im zeitlichen Mittel wird auch noch ebensoviel potentielle Energie transportiert.: So gilt für die gesamte Energiedichte ω_E:

$$\omega_E = \frac{1}{2}\varrho \psi_0^2 \omega^2$$

sowie für die Energiestromdichte j_E

$$j_E = \omega_E \cdot v_\varphi = \frac{1}{2} v_\varphi \cdot \varrho \psi_0^2 \omega_0^2$$

Somit ist die Energiestromdichte proportional zum Quadrat der Erregerfrequenz ω und zum Quadrat der Wellenamplitude ψ_0.

Impulstransport und Strahlungsdruck

- Impulstransport

Neben Energie transportiert eine Welle auch Impuls. Beim Versuch an der Torsionspendelkette lässt sich feststellen, dass eine Welle beim Impulsübertrag auf einen Abschluss des Mediums eine Kraft überträgt. Auf den Abschluss wird also ein Druck (Analog zum Druck auf die Wand in der kinetischen Gastheorie) ausgeübt; der Strahlungsdruck.

Sei die Energiedichte ω_E vorhanden. Dan gilt für die transportierte kinetische Energie W_{kin}:

$$W_{kin} = \frac{1}{2}\omega_E \cdot \underbrace{A \cdot v_\varphi \cdot t}_{V}$$

Der Ausdruck $A \cdot v_\varphi \cdot t$ ist das Volumen V, das ist der Zeit t auf die Fläche A auftrifft. Die kinetische Energie W_{kin} kann nun allgemein als

$$\begin{aligned} W_{kin} &= \frac{1}{2}mv_\varphi \cdot v_\varphi \\ &= \frac{1}{2}p \cdot v_\varphi \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei p der mit v_φ transportierte Impuls ist.

Es folgt:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2W_{kin}}{v_\varphi} \\ &= \frac{\omega_E \cdot A \cdot v_\varphi \cdot t}{v_\varphi} \end{aligned}$$

So folgt:

Impulsübertrag bei Wellen

$$p = \frac{W_E}{v_\varphi} \tag{10.4}$$

Diese Beziehung gilt sehr allgemein:

Sie sagt aus, dass mit dem Transport von Energie nach Maßgabe der Gleichung (10.4) auch ein Transport von Impuls verknüpft ist.

Die Beziehung gilt unter Verwendung des geeigneten v_φ für alle Wellenvorgänge.

- Strahlungsdruck

  Bei einer Totalreflexion einer Welle an einer Grenzfläche ist die Impulsübertragung auf diese Fläche

  $$2 \cdot p \qquad (p : \text{transportierter Impuls.})$$

  Die auf die Grenzfläche übertragene Kraft F ist

  $$\begin{aligned} F &= 2\frac{\omega_E \cdot A \cdot t}{t} \\ &= 2\omega_E \cdot A \end{aligned}$$

  Für den Strahlungsdruck $p_s = \frac{F}{A}$ folgt:

  Strahlungsdruck bei Wellen

  $$p_s = 2\omega_E \tag{10.5}$$

  Somit besteht ein wiederum sehr allgemeiner Zusammenhang zwischen Strahlungsdruck p_s und Energiedichte ω_E

10.2.4 Überlagerung von Wellen - Kohärenz und Interferenz

Wir betrachten jetzt die Konsequenzen folgend aus der Tatsache, dass die Wellengleichung linear in $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ und in ihren Ableitungen $\dot{\psi}(\overrightarrow{r}, t)$, $\ddot{\psi}(\overrightarrow{r}, t)$, ...etc. ist.

Aus dieser Linearität der Wellengleichung folgt, dass jede Linearkombination von zwei Lösungen ψ_1 und ψ_2 wiederum eine Lösung der Wellengleichung ist.

Definition 10.13: Interferenz

> *Die Überlagerung der Amplituden von Teilwellen am selben Ort und zur selben Zeit heißt Interferenz.*

Voraussetzungen für die Ausbreitung eines zeitlich/ räumlich stationären Wellenfeldes im Überlagerungsgebiet:

- Alle Teilwellen müssen dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω besitzen; anderenfalls würden Schwebungen entstehen, die zu einer zeitlich variablen Gesamtamplitude führen würden. Dies würde ein *Auswaschen* der Interferenzstruktur bei zeitlicher Mittelung zur Folge haben.
- Am vorgesehenen Ort $\overrightarrow{r}$ muss die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\overrightarrow{r})$ zwischen den Teilwellen zeitlich konstant sein. Allerdings kann $\Delta\varphi(\overrightarrow{r})$ vom Ort abhängen.

Definition 10.14: Kohärenz

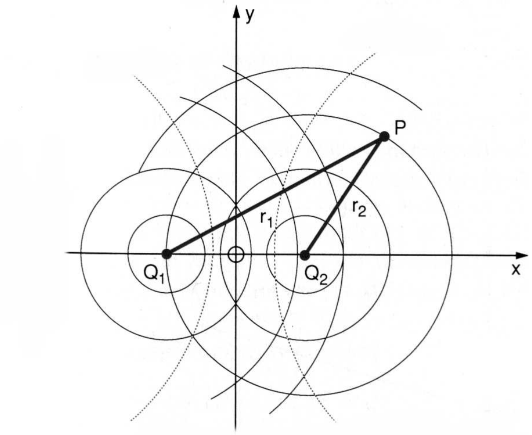
> *Wellen, die letztere Bedingung erfüllen, sind (räumlich) kohärent.*

Die Überlagerung kohärenter Teilwellen liefert ein ortsabhängiges, stationäres Wellenfeld.

Erzeugung kohärenter Teilwellen

Hier zwei Möglichkeiten:

1. Phasenstarre Kopplung von zwei Wellenerregern, Q_1 und Q_2. Es besteht eine zeitlich konstante Phasendifferenz zwischen den Erregern.

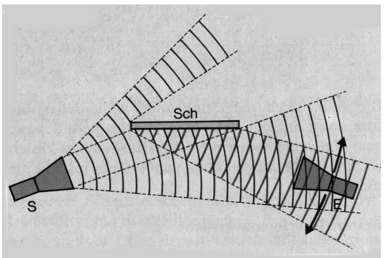


Es gilt:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

Dieser Ausdruck ist nicht von der Zeit t abhängig.

2. Durch Reflexion oder Ähnliches einer von einer einzelnen Quelle ausgehenden Welle werden kohärente Wellen erzeugt; sie überlagern sich nach Durchlaufen unterschiedlich langer Wege.



Die vom Sender S direkt zum Empfänger E gehende Welle durchlaufe die Strecke r_2.

Die vom Sender S über den Schirm Sch gehende Welle durchlaufe die Strecke r_1.

So gilt:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

Der experimetelle Nachweis kann in Fall 1 über die Akustik erbracht werden: z.B. mit einer Phasenstarren Kopplung von zwei (oder mehr) Lautsprechern.

In der Optik sind die Lichtquellen angrenzende Atome; die ausgesandten Lichtwellen haben Phasen, die zeitlich schwanken.

$\Rightarrow$ Die Lichtquellen sind inkohärent

$\Rightarrow$ Interferenzerscheinungen sind nur über Fall 2 erreichbar[1].

Interferenzmuster bei Überlagerung harmonischer, ebener Wellen

Man betrachte die Überlagerung am Ort $\vec{r}_0$ zur Zeit t:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1(\vec{r}_0, t) + \psi_2(\vec{r}_0, t) \\ \psi_1 &= A_1 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0) \\ \psi_2 &= A_2 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \end{aligned}$$

Aus $\psi = \psi_1 + \psi_2$ folgt:

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \\ &= C \cdot \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 \\ \Delta\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ C &= \left[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 a_2 \cos\Delta\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \\ \tan\varphi &= \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2} \end{aligned}$$

Die Intensität I eines Interferenzmusters ist

$$I \propto (\psi_1 + \psi_2)^2 = A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Man berechne den zeitlichen Mittelwert $\overline{I}$ für den Fall, dass $T = \frac{2\pi}{\omega}$ klein gegen die Ansprech-/ Messzeit des Detektors ist.

$$\begin{aligned} \overline{I(r_0)} &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \cos\Delta\varphi(\vec{r}_0) \\ \Delta\varphi &= (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r}_0 \end{aligned}$$

Die gemittelte Intensität $\overline{I}$ variiert als Funktion von $\vec{r}_0$ zwischen

$$\tfrac{1}{2}(A_1 + A_2)^2 \qquad \text{und}$$
$$\tfrac{1}{2}(A_1 - A_2)^2$$

[1] Das Laserlicht stellt als kohärentes Licht eine Ausnahme dar.

für $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ bzw. $\Delta\varphi = 2m\pi$.

Für inkohärente Wellen wäre der Ausdruck $\overline{\cos\Delta\varphi} = 0$. Es läge kein stationäres Interferenzmuster vor. Die gemittelte Intensität wäre:

$$\overline{I} = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2)$$

Bemerkung: Analoges geschieht bei der Überlagerung von Kugelwellen, wie sie z.B. von den Öffnungen eines Spaltes oder von zwei Quellen Q_1, Q_2 ausgehen. Die Interferenz-Maxima liegen auf Hyperbeln mit den Quellen Q_1 und Q_2 als Brennpunkte. Die Form der Hyperbeln hängt vom Abstand der Quellen $Q_{1,2}$ ab.
Dieser Umstand folgt aus der Definition der Hyperbel als geometrischer Ort jener Punkte, deren Abstand $(r_1 - r_2)$ eine Konstante ist.

10.2.5 Überlagerung von Wellen - Beugung, Reflexion und Brechung von Wellen

Einführung

Ein Wellenfeld (Ausbreitungsrichtung, Interferenzmuster... etc.) kann durch

- Reflexion an Grenzflächen
- Beugung an Begrenzungen (Spalt, Hindernis)
- Übergang in Medien mit anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit (Brechung)

verändert werden.

Das Verhalten des Wellenfelds kann mit Hilfe des Huygen‘schen Prinzips beschrieben werden.

Das Huygen‘sche Prinzip

Das Prinzip sagt aus, dass jeder Punkt einer Phasenfläche als Ausgangspunkt neuer Elementarwellen aufgefasst werden kann.

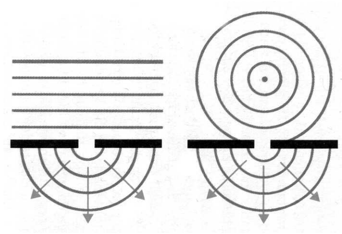


Abbildung 10.1: Zum Huygen‘schen Prinzip: Phasenflächen als Ausgangspunkt neuer Elementarwellen

Alle zu einer bestimmten Zeit t_0 von der Phasenfläche ausgehenden Elementarwellen überlagern sich phasenrichtig zum Zeitpunkt t:
Die Tangentenfläche an die überlagerten Wellenfronten ist die zum neuen Zeitpunkt t entstandene Phasenfläche, die gegenüber der ursprünglichen Phasenfläche ($t = t_0$) um $v_\varphi \cdot \Delta t$ vorgerückt ist ($\Delta t = t - t_0$).

- Für Schallwellen gilt (anschaulich):

  Alle Atome einer Phasenfläche werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt; die Anregungsenergie wird an Nachbaratome weitergegeben. Somit sind die schwingenden Atome die Wellenerreger der Elementarwellen.

- Für elektromagnetische Wellen im Vakuum gilt:

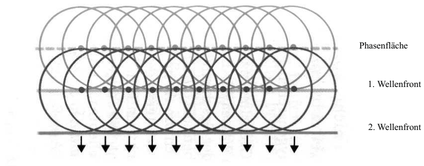


Abbildung 10.2: Zum Huygen‘ schen Prinzip: vorgerückte Wellenfronten

Schwingungen von $\overrightarrow{E}$ und $\overrightarrow{B}$- Feldern auf benachbarten Phasenflächen sind als Wellenerreger aufzufassen. Sie können ein dort befindliches Elektron zu erzwungenen Schingungen anregen; dieses Elektron strahlt Energie ab, da es sich beschleunigt bewegt.

Interferenzintensität

Überlagerung der Kugelwellen, die kohärent von N Quellen in einer Ebene mit Richtung r ausgehen:
N Quellen im Abstand δ, die von einer ebenen Welle, senkrecht auf die Ebene der Quellen, getroffen werden:

⇒ Quellen sind kohärent

⇒ Interferenzmuster werden hinter der Quellenebene erhalten

Nun soll die Interferenzintensität $I(\alpha)$ im Punkt P mit $r \gg N \cdot \delta$ berechnet werden:

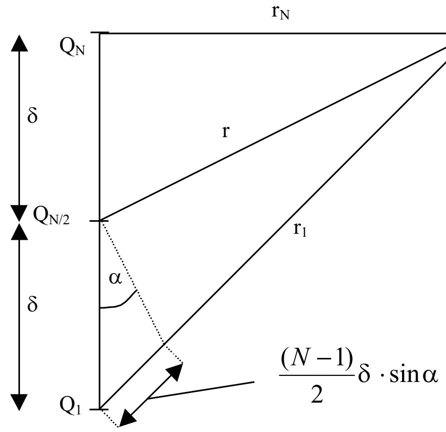
- r bildet den Winkel α mit der Quellenebene.
- Der Phasenunterschied zwischen benachbarten Elementarwellen:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= k \cdot \Delta s \\ &= k \cdot \delta \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

- Die Intensität in P ist aus der Amplitude

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \sum_{n=1}^{N} a \exp\left(i(kr_n - \omega t)\right) \\ \text{mit} \qquad r_n &= r + \left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cdot \delta \sin\alpha \end{aligned}$$

zu berechnen.



Für $\psi(\alpha)$ erhält man zunächst mit $\Delta\varphi = k \cdot \delta \sin\alpha$:

$$\psi(\alpha) = \underbrace{a \exp\left(i\left(\frac{N+1}{2}\right)\Delta\varphi\right) \cdot \sum_{n=1}^{N} \exp(-in\Delta\varphi)}_{A(\alpha)} \cdot \exp(ikr - \omega t)$$

So folgt:

$$\psi(\alpha) = A(\alpha) \cdot \exp(i(kr - \omega t))$$

- Die Berechnung von $A(\alpha)$:
  Die Summe

$$\sum_{n=1}^{N} \exp(in\Delta\varphi)$$

ist eine endliche geometrische Reihe mit dem Wert

$$\begin{aligned} & \exp(-i\Delta\varphi) \cdot \frac{\exp(-iN\delta\varphi) - 1}{\exp(-i\Delta\varphi) - 1} \\ = \quad & \exp\left(-i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi\right) \cdot \frac{\exp\left(i\frac{N}{2}\delta\varphi\right) - \exp\left(-i\frac{N}{2}\delta\varphi\right)}{\exp\left(\frac{i\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{i\Delta\varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

So folgt:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= a \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} \\ &= a \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N \cdot k\delta \sin\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot k\delta\sin\alpha\right)} \end{aligned}$$

So folgt die:

Intensität der Welle $I(\alpha) \propto |\psi(\alpha)|^2$

$$\begin{aligned} I(\alpha) &\propto a^2 \cdot \frac{sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} \\ mit \qquad \Delta\varphi &= k \cdot \delta \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

Es sollen nun die Nullstellen des Nenners diskutiert werden:

Differentiation in zwei Fälle:

- Für $\lambda > \delta$ lässt sich eine konstruktive Überlagerung der Teilwellen nur für $\alpha = 0$ erreichen.
  Resultat: Nur ein scharfes Maximum bei $\alpha = 0$ mit merklicher Intensität im Bereich $\Delta\alpha \propto \frac{1}{N}$, da der Nenner sonst keine Nullstelle hat.
- Für $\lambda < \delta$ gibt es p Maxima für

$$\begin{aligned} \sin\alpha_n &= n\frac{\lambda}{d} \\ n &= 0, 1, 2...p < \frac{\delta}{\lambda} \end{aligned}$$

  Das heißt, bei den Nullstellen des Nenners.

Beugung am Spalt

Grundlagen:

- Der Spalt habe die Breite d.
- Man lasse die Zahl der Quellen N gegen Unendlich gehen ($N \to \infty$), wobei die Gesamtbreite der mit Wellenerregern besetzten Fläche d konstant gehalten wird:

$$N \cdot \delta = d$$

  mit $\delta \to 0$ und $N \to \infty$.

Realisierung: Eine ebene, harmonische Welle fällt auf einen Spalt der Breite d. Untersucht wird nun die Intensität $I(\alpha)$ der durchgelassenen Welle.
Zunächst galt:

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\overbrace{N \cdot \delta}^{d} \cdot k \cdot \sin\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta \cdot k \cdot \sin\alpha\right)}$$

wobei $N\delta = d$ gesetzt wird.

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k \cdot d \cdot \sin\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{k \cdot d}{2N} \cdot \sin\alpha\right)}$$

Für großes N gilt:

$$\sin\left(\frac{kd}{2N} \cdot \sin\alpha\right) \simeq \frac{kd}{2N} \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad I(\alpha) \propto a^2 N^2 \frac{\sin^2\left(\frac{kd}{2} \cdot \sin\alpha\right)}{\left(\frac{kd}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2}$$

Setzt man den Ausdruck

$$kd \sin\alpha = \Delta\Phi$$

, so folgt:

$$I(\alpha) \propto N^2 a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)^2}$$

Man trage $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ gegen x auf, wobei $x = \frac{\Delta\Phi}{2}$ ist.

Das Ergebnis: $I(\alpha) = 1$ für $\alpha = 0$

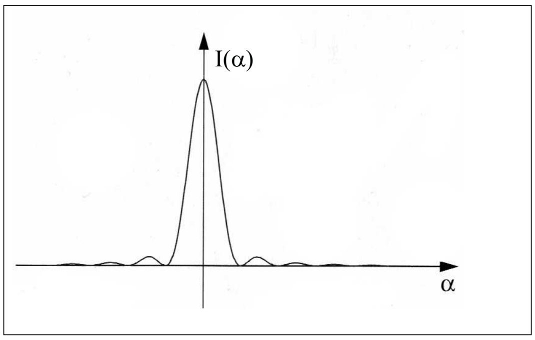


Abbildung 10.3: Intensität als Funktion des Winkels α

Zum Schaubild:

- Erste Nullstelle bei $x = \pi$; das heißt für $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$
- Erstes Nebenmaxima bei $x = \pm\frac{3}{2}\pi$ mit c.a. 4,5% der Höhe des Hauptmaximums

Definition 10.15: Beugung einer Welle

> *Die teilweise Ablenkung einer ebenen Welle aus der Vorwärtsrichtung beim Durchgang durch räumliche Begrenzungen nennt man Beugung der Welle.*

Merke: Die Intensitätsverteilung $I(\alpha)$ hinter dem Hindernis hängt vom Verhältnis Öffnungsgröße/Wellenlänge ab (d/λ).
Man kann aus der Intensitätsverteilung $I(\alpha)$ die Wellenlänge λ bestimmen, wenn d bekannt ist.

Reflexion einer Welle

Feststellung: Trifft eine Welle auf eine Mediengrenze auf, so wird im Allgemeinen ein Teil der Welle reflektiert, während der andere Teil in das Medium eindringt. Dabei findet eine Änderung der Ausbreitungsrichtung statt (Brechung der Welle).

Diese Vorgänge lassen sich mit dem Huygen‘ schen Prinzip beschreiben. Zunächst die Reflexion:

Wenn die Wellenfront auf die Grenzfläche trifft, wird sie Ausgangspunkt von neuen Elementarwellen, die sich zu einer Wellenfront der reflektierten Welle überlagern.

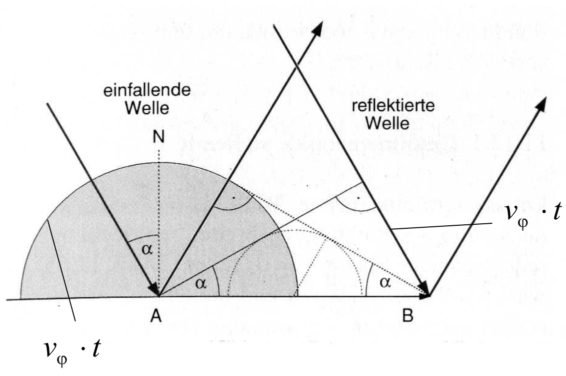


Abbildung 10.4: Reflexion einer Welle

Wenn die Wellenfront den Punkt B erreicht, hat die von Punkt A ausgehende Elementarwelle schon einen Radius von $v_\varphi \cdot t$, wenn t die Zeit ist, die zwischen dem Auftreffen der Wellenfront bei A und B verstreicht.
Die reflektierte Wellenfront ergibt sich als Tangente an die Elementarwelle des Radius $v_\varphi \cdot t$, welche durch B geht.

Reflexionsgesetz

Bei Reflexion einer ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche ist der Einfallswinkel α gleich dem Reflexionswinkel β:

$$\alpha = \beta$$

Brechung einer Welle

Die Brechung wird analog diskutiert. Beim Auftreffen auf die Mediengrenze werden Elementarwellen ausgelöst, die sich jedoch im neuen Medium mit der Geschwindigkeit v_2 ausbreiten. Für die Änderung der Ausbreitungsrichtung ergibt sich das

Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Dies gilt, wenn die Winkel α und β gegen die Normalen auf die Grenzfläche gemessen werden.

10.2.6 Dopplereffekt

Einführung

Wellenerzeuger (Quelle) und Wellenempfänger (Detektor) können sich relativ zum Wellenmedium oder zueinander bewegen.
Dann tritt der DOPPLER-Effekt auf: Die Frequenz der Welle ist verschieden von jener, die aufträte, wenn diese Bewegung nicht vorhanden wäre.

Fall 1: Bewegter Detektor

Der Detektor bewege sich bezüglich des Mediums mit der Geschwindigkeit v_D:
Die Phasengeschwindigkeit v_φ‘ (verglichen mit jener, die mit einem ruhenden Detektor gemsessen wird), ist geändert zu

$$v_\varphi‘ = v_\varphi \pm v_D$$

Anschaulich: Die Wellenberge kommen früher/später am Detektor vorbei, wenn dieser sich relativ zur Quelle bewegt.
Die Wellenlänge λ der Wellenerscheinung ist unverändert, da die Welle ja von einer ruhenden Quelle in einem ruhenden Medium abgegeben wird.

Nun soll untersucht werden, welche Frequenz ν_D man mit dem (mit v_D) bewegten Detektor messen würde. Es gilt:

$$\nu_D = \frac{v_\varphi‘}{\lambda}$$

Einsetzen von v_φ‘:

$$\nu_D = \frac{v_\varphi‘}{\lambda} = \frac{v_\varphi \pm v_D}{\lambda}$$

Ausklammern von v_φ liefert:

$$\nu_D = \frac{v_\varphi}{\lambda}\left(1 \pm \frac{v_D}{v_\varphi}\right)$$

Einführung von $v_0 = \frac{v_\varphi}{\lambda}$ liefert die:

Doppler- Beziehung mit bewegtem Detektor

$$\nu_D = v_0\left(1 \pm \frac{v_D}{v_\varphi}\right)$$

v_0*: Frequenz, die bei ruhendem Detektor gemessen wird*
$\pm$*: Positiv, wenn sich der Detektor auf die Quelle zubewegt; sonst negativ*

Fall 2: Bewegte Quelle

Bewegt sich die Wellenquelle, so sind die Abstände λ' zwischen den Wellenextrema verändert. Die Quelle bewegt sich während einer Schwingungsdauer T um

$$\Delta x = v_Q \cdot T$$

mit v_Q als Quellengeschwindigkeit in Bewegungsrichtung.

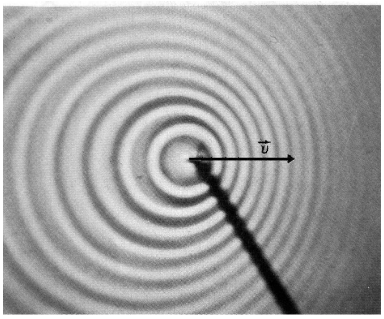


Abbildung 10.5: Bewegte Quelle in der Wellenwanne

Dabei ist die Wellenfront in T um

$$\lambda_0 = v_\varphi \cdot T$$

von der Quelle weggelaufen. So folgt:

Der Abstand zweier Maxima ist somit:

$$\lambda' = \lambda_0 \pm \Delta x$$

Bewegt sich die Quelle auf den Detektor zu, gilt das negative $(-)$ Vorzeichen, bewegt sie sich weg, das positive $(+)$.

Obigen Zusammenhang kann man noch wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \overbrace{v_\varphi \cdot T}^{\lambda_0} \pm \overbrace{v_Q \cdot T}^{\Delta x} = T \cdot (v_\varphi \pm v_Q) \\ &= \frac{1}{\nu_0}(v_\varphi \pm v_Q) \end{aligned}$$

wobei $\nu_0 = \frac{1}{T}$ die Frequenz der Erregerquelle ist.

Bleibt noch zu diskutieren, welche Frequenz ν_D der Detektor registriert, wenn sich die Quelle mit v_Q bewegt.

Nach wie vor gilt:

$$\begin{aligned} \nu_D &= \frac{v_\varphi}{\lambda'} \\ &= \frac{v_\varphi}{\frac{v_\varphi \pm v_Q}{\nu_0}} \end{aligned}$$

Umformung liefert die

Doppler- Beziehung mit bewegter Quelle

$$\nu_D = \frac{v_0}{1 \pm \frac{v_Q}{v_\varphi}}$$

$\pm$*: Negativ, wenn sich die Quelle auf den Detektor zubewegt; Sonst positiv*

Kopfwellen und Mach'scher Kegel

- Fall 1: $v_Q = v_\varphi$:

  Wird $v_Q = v_\varphi$, so wird die Wellenlänge $\lambda' = 0$. Die Amplituden der zu verschiedenen Zeiten ausgesandten Wellen überlagern sich in Vorwärtsrichtung in Phase.

  Es entsteht eine Welle mit großer Amplitude (Kopfwelle):

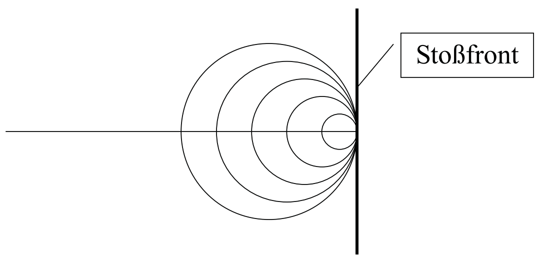


Abbildung 10.6: Bewegte Quelle mit Kopfwelle

- Fall 2: $v_Q > v_\varphi$:

  Wird $v_Q > v_\varphi$, so sind die Wellen auf Kegeln mit dem Öffnungswinkel α in Phase.

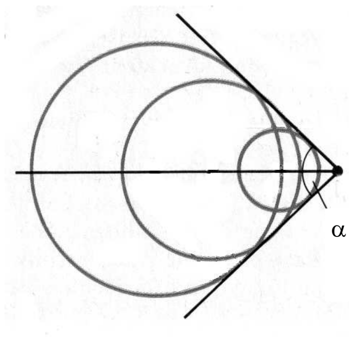


Abbildung 10.7: Bewegte Quelle mit Kopfwellenkegel

Für den Kegel gilt:

$$\sin\alpha = \frac{v_\varphi}{v_Q}$$

Hier bildet die Mantelfläche des Kegels die Stoßfront.

Definition 10.16: MACH'SCHER KEGEL

Der Kopfwellenkegel eines bewegten Senders mit einer Geschwindigkeit größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle wird MACH*'scher Kegel genannt.*

Definition 10.17: MACH'SCHE ZAHL

Der Quotient

$$\frac{v_\varphi}{v_Q}$$

wird als MACH*'sche Zahl Ma bezeichnet.*

Beispiele für das Auftreten des Doppler-Effektes

1. Rotverschiebung des Lichtes von Sternen:

   Die charakteristischen Frequenzen (Linien), die von angrenzenden Atomen ausgehen, sind im Sternenlicht gegenüber den entsprechenden Linien verschoben, wenn sie auf der Erde emittiert werden.

   Es findet eine Verschiebung zu kleineren Frequenzen hin statt (Rotverschiebung).

Diese Rotverschiebung ist ein Hinweis auf die Expansion des Weltalls (Urknalltheorie).

2. Doppler-Verbreiterung:

   In glühenden Gasen werden die Linien von Atomen emittiert, die sich relativ zum Beobachter bewegen. Dies verursacht eine Verbreiterung der Spektrallinien, da Bewegungen in alle Richtungen erfolgen.

3. Verkehrsradar (Radar-Messstand)

   - Sender strahlt Welle der Frequenz ν ab.
   - Auto empfängt dopplerverschobene Frequenz ν (Bewegter Detektor)
   - Auto reflektiert die Welle der Frequenz ν (Bewegte Quelle)
   - Sender/Empfänger registriert ν

   Es gilt:

$$\nu = \nu \left(1 + \frac{2 \cdot v_{Auto}}{c}\right)$$

   mit der Lichtgeschwindigkeit c.

10.3 Stehende Wellen

10.3.1 1D- stehende Wellen

Versuch: *stehende Wellen*: Mit der Torsionspendelkette werden stehende Wellen durch Reflexion der laufenden Welle an einer Mediengrenze erzeugt.

Feststellungen:
An der Mediengrenze wird im Allgemeinen Energie reflektiert. Es läuft zumindest ein Teil der Welle zurück.

Es treffe eine ebene harmonische Welle

$$\phi_1 = \psi_0 \cos(\omega t - kx)$$

auf die Mediengrenze. Es wird angenommen, dass die Welle total reflektiert wird. Dann gilt:

$$\phi_1 = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Hier wurde bereits ein möglicher Phasensprung bei der Refelexion berücksichtigt.

Das Additionstheorem der cos- Funktion ergibt für die Überlagerung von einlaufenden und reflektierten Wellen:

$$\psi(x,t) = 2\psi_0 \cdot \cos \underbrace{\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)}_{Ortsabhängigkeit} \cdot \cos \underbrace{\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)}_{Zeitabhängigkeit}$$

Die Amplitudenverteilung

$$2\psi_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

hängt periodisch von x ab; die Amplitudenverteilung ist stationär.

Definition 10.18: Stehende Welle

Eine Welle mit stationärer Amplitudenverteilung nennt man stehende Welle.

Eigenschaften stehender Wellen

- An den Stellen

$$x_m = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) \cdot \frac{(2n+1)\pi + \varphi}{2}$$

bleibt die Amplitude immer Null. Diese Punkte werden als Schwingungsknoten bezeichnet.

- An den Stellen

$$x_m = \frac{2m\pi + \varphi}{2} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$$

wird die Amplitude maximal und ändert sich zwischen $\pm 2\psi_0$. Diese Änderung findet innerhalb einer Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ statt.

- Folgerung: Alle Elemente des Wellenmediums schwingen mit derselben Frequenz und derselben Phase.
$\Rightarrow$ Eine stehende Welle entspricht einer Eigenschwingung des Mediums.

Reflexion an Mediengrenzen

1. Festes Ende:

   Das Medium ist in diesem Fall an der Mediengrenze in Ruhe. Dies ist dann möglich, wenn sich einfallende und reflektierte Welle mit umgekehrtem Vorzeichen an der Mediengrenze überlagern.

   Der Phasensprung beträgt

$$\varphi = \pi \quad (= 180^\circ)$$

   So folgt:

$$\psi(x,t) = -2\psi_0 \sin \omega t \cdot \sin kx$$

2. Loses Ende:

   Es findet keine Änderung der Auslenkungsrichtung statt. Somit kein Phasensprung!

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \psi(x,t) &= 2\psi_0 \cos \omega t \cdot \cos kx \end{aligned}$$

3. Stehene Wellen in beidseitig begrenzten Medien

   Es liegt ein Medium mit 2 festen Enden vor.

   $\Rightarrow$ Wellenknoten an beiden Enden.

   Auf die gesamte Länge L des Mediums müssen $n \cdot \frac{\lambda}{2}$ der stehenden Welle entfallen. So gilt für die Länge:

$$L = n\frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

   ...oder für die mögliche Wellenlänge (λ_n) der stehenden Welle:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

   Für die Anregungsfrequenzen (mittels äußerer Kraft) folgt aus $v_n \cdot \lambda_n = v_\varphi$:

$$v_n = \lambda_\varphi \cdot \frac{n}{2L}$$

Versuch: *Ruben' sches Flammenrohr*

Es werden stehende Schallwellen in einem zylindrischen Rohr erzeugt. Durch dieses Rohr strömt Gas, welches aus Öffnungen an der Oberseite austritt und dort verbrennt.

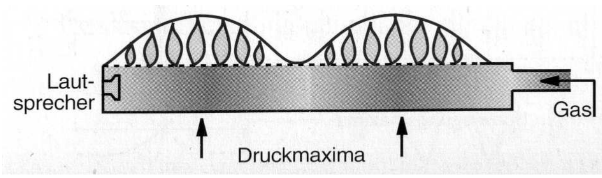


Abbildung 10.8: Ruben' sches Flammenrohr

- Ohne Lautsprecher: Alle Flammen sind gleich hoch
- Mit Lautsprecher: Für geeignete ν_n's ist eine Anregung einer stehenden Welle möglich. In den Druckbereichen strömt dann mehr Gas aus, so dass dort die Flammen höher werden.

Somit veranschaulicht der Versuch Schallwellen.
Betrachtung der Abstände $\Delta\nu$ zwischen verschiedenen Frequenzen ν_n, bei denen stehende Wellen auftreten:

$$\begin{aligned}\nu_{n+1} &= \Delta\nu = \frac{v_\varphi}{2L}\left((n+1)-n\right)\\ \Delta\nu &= \frac{v_\varphi}{2L}\end{aligned}$$

Zahlenwerte aus einem Versuch:

$$\begin{aligned}v_{Schall} &= 330ms^{-1}\\ L_{Rohr} &= 2m\\ \Delta\nu &= 82,5s^{-1}\end{aligned}$$

Man halte fest: Stehende Wellen sind Lösungen der Wellengleichung. Dabei werden spezielle Lösungen durch die vorgegebenen Randbedingungen ausgewählt.

10.3.2 2D- stehende Wellen

Zweidimensionale stehende Wellen sind Lösungen der 2D- Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_\varphi^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

für vorgegebene Randbedingungen.

Diese Lösungen sind der Form

$$\psi(x,y,t) = A(x,y) \cdot \cos\omega t$$

wobei $A(x,y)$ von den Randbedingungen abhängit.

Des weiteren kann man die 2D- Welle $\psi(x,y,t)$ als eine Überlagerung von zwei laufenden Wellenvektoren $\overrightarrow{k}_1$ [2] und $-\overrightarrow{k}_2$ auffassen.

Beispiel: *Rechteckige Membran*
Diese sei entlang ihrer Begrenzung fest eingespannt. Die Abmessungen in die Raumrichtungen $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ seien a, b. Erzeugt wird eine stehende Welle. Für die Wellengleichung gilt:

$$\psi(x,y,t) = \psi_0 \cdot \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \cdot \cos\omega_{mn}t$$

Wobei m, n ganzzahlig sind und die Bedingung

$$k^2 = kx^2 + ky^2$$

erfüllt ist. Der Wert von ω_{nm} folgt aus:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\frac{v_\varphi}{\lambda} \\ &= v_\varphi \cdot k \end{aligned}$$

zu

$$w_{mn} = v_\varphi \left[\left(\frac{m+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

[2] $\overrightarrow{k}_1 = k_x, k_y$

10.4 Schallwellen

Definition 10.19: SCHALLWELLEN

Als Schallwellen werden elastische Wellen in deformierbaren Medien (Festkörper, Flüssigkeiten, Gase) bezeichnet.

Hörbar ist der Frequenzbereich von $16Hz$ *bis* $16kHz$.

Wiederholung

Die Ausbreitung von Störungen in deformierbaren Körpern wird durch die elastische Eigenschaft der Materie bestimmt.

- Bei Festkörpern:

  Die Dehnung $\frac{\Delta L}{L}$ ist proportional zur Schubspannung $\tau = \frac{F}{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &\propto \tau \\ \frac{\Delta L}{L} &= \frac{1}{E} \cdot \tau \end{aligned}$$

- Bei Flüssigkeiten und Gasen:

  Die Kompressibilität $\frac{\Delta V}{V}$ ist proportional zur Druckspannung $\sigma = \frac{F}{A} = \Delta p$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &\propto \sigma \\ \frac{\Delta V}{V} &= \kappa \cdot \Delta p \end{aligned}$$

  Die Proportionalitätskonstante κ wird in der Beziehung $\frac{1}{\kappa}$ als Kompressionsmodul bezeichnet. Beachtet werden muss, dass eine Proportionalität nur für kleine Deformationen gilt.

Schallausbreitung in Gasen und Flüssigkeiten

Die Schallausbreitung muss einer Wellengleichung, z.B. einer für eine Druck-/ Dichteschwankung genügen. Im Folgenden wird nun eine Wellengleichung für die Schallausbreitung in Gasen vorgenommen.

Man betrachte eine Gassäule: Durch die Druckstöße der Schallwelle ändert das Volumen

$$V = A \cdot \Delta x$$

seine Größe und Lage infolge des unterschiedlichen Druckes auf die Stirnflächen. Es wird schrittweise vorgegangen:

1. Berechnung der Kraft F_x auf V:

$$F_x = A \cdot \Delta x \cdot \left[\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x}\right]$$

   V erfährt eine Beschleunigung $\dot{v}(t)$. Aus der Grundgleichung der Dynamik erhält man:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot V \cdot \dot{v}(t) &= -F_x \\ \varrho \cdot A\Delta x \cdot \dot{v}(t) &= -A\Delta x \frac{dp}{dx} \\ \Rightarrow \qquad \varrho \cdot \dot{v}(t) &= -\frac{dp}{dx} \end{aligned} \tag{10.6}$$

   In Worten: Die Beschleunigung, die V erfährt, wurde auf den Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ zurückgeführt.

2. Die Größenänderung und die elastischen Eigenschaften von V:

   V ändert seine Größe, da im Allgemeinen $v(x)$ und $v(x+\Delta x)$ verschieden sind. Wenn nun ΔV die Druckänderung sei, gilt:

$$\begin{aligned} \Delta V &= A(v(x+\Delta x) - v(x))\Delta t \\ &= A \cdot \Delta x \left(\frac{v(x+\Delta x) - v(s)}{\Delta x}\right) \cdot \Delta t \\ &= V \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \Delta t \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{dv}{dx} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

   Die Kompression ΔV setzt einen Druckunterschied voraus. Dabei gilt (wegen den elastischen Eigenschaften):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= -\kappa \Delta p \\ \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} \cdot \Delta t &= -\kappa \cdot \Delta \\ \frac{dv}{dx} &= -\kappa \cdot \dot{p} \end{aligned} \tag{10.7}$$

Nun wird Ergebnis (10.6) nach der Zeit t und das Ergebnis (10.7) nach x abgeleitet:

$$\begin{aligned} (10.6) \quad &: \qquad \varrho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \\ (10.7) \quad &: \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\kappa \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies:

$$\varrho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

.... und analog für $p(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \cdot \varrho} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

mit dem Ausdruck

$$v_\varphi^2 = \frac{1}{\kappa \cdot \varrho}$$

für die Phasengeschwindigkeit.

Schallausbreitung als isothermer Prozess

Vorgehensweise: Zunächst wird κ berechnet; damit dann v_φ:

$$\begin{aligned} p \cdot V &= R \cdot T && \text{(allgemeine Gasgleichung)} \\ dp \cdot V &= p \cdot dV = 0 && \text{(isotherm)} \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{dp}{p} \stackrel{!}{=} -\kappa \cdot dp \end{aligned}$$

Mit $\kappa = \frac{dV}{V} = -\kappa \cdot dp$ folgt:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{p} \\ v_\varphi &= \sqrt{\frac{p}{\varrho}} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert eine Schallgeschwindigkeit von

$$v_\varphi = 280 \frac{m}{s}$$

Experimente belegen aber eine tatsächliche Schallgeschwindigkeit von $v_\varphi = 330 \frac{m}{s}$. Daraus schließe man, dass die durch die Schallwelle verursachten Druckänderungen so schnell stattfinden, dass kein Temperaturausgleich stattfinden kann. Somit liegt hier **kein isothermer Prozess** vor.

Schallausbreitung als adiabatischer Prozess

Mit $C_p; C_v$ als molare Wärmekapazitäten bei p bzw. V konstant, gilt die Adiabatengleichung für $p(V)$:

$$p \cdot V \cdot \frac{C_p}{C_V} = \text{konstant}$$

Dies liefert für v_φ:

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{p \cdot C_p}{\varrho \cdot C_V}}$$

Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase der Form $\frac{p}{\varrho} = \frac{R \cdot T}{M_{mol}}$ folgt:

$$v_\varphi = \left(\frac{R \cdot T}{M_{mol}} \cdot \frac{C_p}{C_V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich experimentell bestätigen, denn hier ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_φ temperaturabhängig:

$$v_\varphi \propto \sqrt{T}$$

Schallausbreitung in Festkörpern

In zur obigen Vorgehensweise analoger Weise kann noch gezeigt werden, dass Wellenerscheinungen durch die elastischen Eigenschaften von Festkörpern hervorgerufen werden.
Die Phasengeschwindigkeit v_φ wird durch das Elastizitätsmodul E (Anstelle des Kompressibilitätsmoduls $\frac{1}{\kappa}$ bei Flüssigkeiten) bestimmt:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \\ \varrho &= \text{Dichte des Festkörpers} \\ E &= \text{Elastizitätsmodul} \end{aligned}$$

Typische Werte für Schallausbreitung in Festkörpern, z.B. Metallen: $v_\varphi = 5000 \frac{m}{s}$.

Versuch: *Messung der Schallgeschwindigkeit in Festkörpern*

- Eine Schallquelle erzeugt am Anfang des Mediums ein Signal
- Am Ende wird ein zeitlich verzögertes Signal durch den Energiestrom der Schallquelle gemessen.

Nun lässt sich die Ausbreitung der Störung durch

1. Luft
2. Stahl

messen.

1. Werte für Luft:
    - Strecke: $6m$

- $\tau = 16,9ms$

$\Rightarrow v_L \sim 330\frac{m}{s} \qquad \left(= \left(\frac{C_p}{C_V} \cdot \frac{RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

2. Werte für Stahl:
   - Strecke: $6m$; somit Hin-/ Rückweg: $12m$
   - $\tau = 2,36ms$

   $\Rightarrow v_{Stahl} \sim 5000\frac{m}{s} \qquad \left(= \left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

10.5 Elektromagnetische Wellen: Dipolstrahlung und ebene elektromagnetische Wellen

10.5.1 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Einleitung

Zu untersuchen ist die Frage, was passiert, wenn die mechanischen Abmessungen eines (bereits bekannten Aufbaus des) Schwingkreises verändert werden.
Dazu wird der Aufbau schrittweise von einem LC-Kreis zu einem Draht verändert:

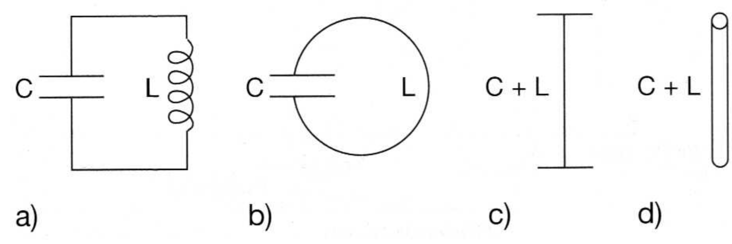


Abbildung 10.9: Übergang eines LC-Kreises zum Draht

Die offensichtliche Verkleinerung von L und C führt zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Die Resonanz wird sehr klein. Dennoch hat der aufgebogene Draht noch die Eigenschaften eines Resonators.
In der unteren Grafik ist der Verlauf der magnetischen und elektrischen Feldlinien gezeigt:

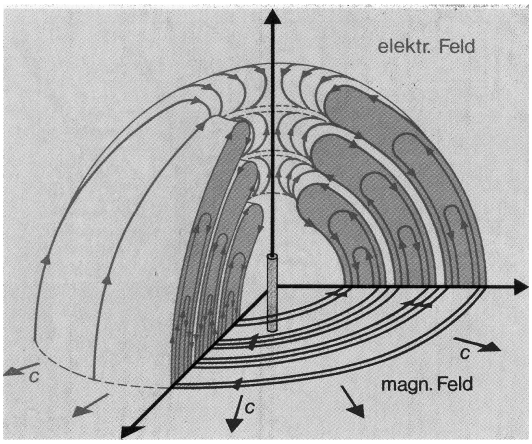


Abbildung 10.10: Feldverteilung um einen Draht

Die Feldverteilung hat sich vollständig geändert. $\overrightarrow{E}$- und $\overrightarrow{B}$-Feld sind nicht mehr in räumlich getrennten Energiespeichern lokalisiert.

Makroskopische Vorstellung zur Dipolschwingung - Die Nahzone

Die Elektronen bewegen sich simultan mit der Schwingungsfrequenz ν: Bei $\nu = 100MHz$ beträgt allerdings die Verschiebung der Elektronen nur noch ca. $10^{-7}cm = 1nm$.

1. Schwingungsphase:

   Im oberen Teil des Drahtes sind Elektronen abgezogen; im unteren angehäuft worden: So existiert ein elekrisches Dipolfeld.

2. Schwingungsphase:

   Die Ladungen haben sich ausgeglichen, es existiert kein elektrisches Feld $\overrightarrow{E}(t)$ mehr, dafür hat sich ein konzentrisches Magnetfeld $\overrightarrow{B}(t)$ aufgebaut.

   Das $\overrightarrow{B}$- Feld hält die Elektronen durch Induktion in Bewegung.

3. Schwingungsphase

   Wie Phase 1, nur mit einem $\overrightarrow{E}$- Feld in umgekehrter Richtung.

4. Schwingungsphase

   Wie Phase 2, nur mit einem $\overrightarrow{B}$- Feld in umgekehrter Richtung.

Diese Betrachtungen gelten allerdings nur für die Nahzone; das heißt für Abstände der Größenordnung der Dipollänge l.

Elektromagnetische Strahlung der Dipolantenne - Die Fernzone

Die bisherigen Überlegungen zur Dipolschwingung sind noch unvollständig: Wenn sich die Ladungen am Dipol ausgeglichen haben, besteht immer noch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Es muss (Induktion) von einem zeitlich veränderlichen $\overrightarrow{E}$- Feld umgeben sein. Die $\overrightarrow{E}$- Feldlinien können aber nicht auf dem Dipol enden, da kein Ladungsungleichgewicht vorhanden ist. Vielmehr entstehen bei der erneuten Ladungstrennung neue elektrische Felder, welche die bisherigen Felder vom Dipol verdrängen.
Somit wird ein Teil der Feldlinien abgestrahlt.
Das $\overrightarrow{B}$- Feld bewegt sich mit dem $\overrightarrow{E}$- Feld nach außen (konzentrische Kreise).

Bei Abständen, die groß gegen die Dipoldimension sind, bewegen sich geschlossene $\overrightarrow{E}$- Feldlinien nach außen, die von konzentrischen $\overrightarrow{H}$- Feldlinien umgeben sind.
In dieser sogenannten Fernzone stehen $\overrightarrow{E}$- und $\overrightarrow{B}$- Feld senkrecht aufeinander und sind in Phase.

Zur Symmetrie des Feldes:

- In Achsrichtung wird keine Energie abgestrahlt.
- Charakteristisch für die Strahlung ist die Rotationssymmetrie um die Dipolachse.
- Die maximale Emission erfolgt senkrecht zur Dipolachse.

Experimentelle Realisierung eines Senders

Der Aufbau:
Ein Dipolstrahler wird induktiv/kapazitiv an einen rückgekoppelten geschlossenen Schwingkreis gekoppelt. Die anregende Hochfrequenzquelle soll mit konstanter Amplitude schwingen.
Als Energiequelle dient eine kapazitive Kopplung des Schwingkreises an das Gitter einer Elektronenröhre, so dass dem Schwingkreis periodisch Energie aus der Anoden- Spannungsquelle zugeführt wird. Die zugeführte Energie deckt die Abstrahlverluste.

Diskussion:
Im Stab werden die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Es fließt ein Strom

$$I(z,t) = I_0(z) \cdot \sin \omega t$$

Die Randbedingungen lauten

$$I\left(z = \pm\frac{l}{2}\right) = 0$$

Das heißt, es existieren Nullstellen (Knoten) an den Stabenden.

$\Rightarrow$ $I(z,t)$ ist eine stehende Stabwelle. Die niedrigste Resonanzfrequenz ω_0 folgt aus $\omega_0 = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda}$ und $l = \frac{\lambda}{2}$ zu

$$\omega_0 = \frac{\pi}{l} \cdot c$$

Erzeugung und Nachweis erzwungener Schwingungen:
Die Erzeugung erzwungener, elektromagnetischer Schwingungen erfolgt einfach aus einem Wechselstromkreis, der eine Spannungsquelle ($U_\sim$ im $100MHz$- Bereich) und die Bauteile L,C und R enthält.
Zum Nachweis werden die Ladungen des Empfängerdipols durch die $\overrightarrow{E}$- und $\overrightarrow{B}$-Felder zu erzwungenen Ladungsschwingungen anregegt.
$\Rightarrow$ Es fließt ein Wechselstrom. Dieser wird dann gleichgerichtet und als Spannung gemessen.

Untersuchung des elektrischen Feldes des Hertz'schen Dipols

Das $\overrightarrow{E}$- Feld des schwingenden Dipols ist durch sein zeitabhängiges Dipolmoment $\overrightarrow{p}(t)$ charakterisiert. Dieses Dipolmoment beschreibt durch seine zweite Ableitung die Beschleunigung, welche die Ladungen des Dipols erfahren:

$$\left|\overrightarrow{E}\right| \propto \left|\overrightarrow{\ddot{p}}(t)\right|$$

Dieses $\overrightarrow{E}$- Feld muss eine Wellenstörung darstellen:

$$\left|\overrightarrow{E}\right| \propto \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Die Störung breitet sich radial mit Lichtgeschwindigkeit c von einer Punktquelle aus. Des weiteren muss für die Abstandsabhängigkeit die Proportionalität $\propto \frac{1}{r}$ gelten, da sich die Energie ($\propto |\overrightarrow{E}|^2$) auf eine Fläche verteilt, deren Fläche $A = 4\pi r^2$ ist.

Quantitativ gilt

$$\overrightarrow{E}(\varphi, r, t) = \ddot{p}\frac{\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \sin\varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 \cdot r}$$

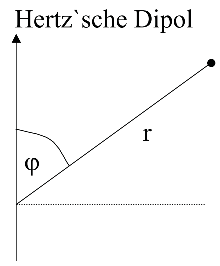


Abbildung 10.11: Abstrahlwinkel φ

Die Abstrahlcharakteristik

Es soll die Energiestromdichte $|\overrightarrow{S}|$ eingeführt werden. Die Vermutung liegt nahe, dass diese durch das Dipolmoment p_e charakterisiert wird.
Da p_e sowohl das $\overrightarrow{E}$- Feld wie auch das $\overrightarrow{B}$- Feld (induktiv) bestimmt, die Energie aber proportional zum Quadrat der Feldgröße ist, muss

$$S \propto \omega^4 \cdot p^2$$

mit ω als Erregerfrequenz gelten.

Man betrachte eine Ladung e , die unter dem Takt der eingestrahlten Erregerfrequenz ω gegen ihre Ruhelage um $x(t)$ verschoben wird.

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

Dann gilt für

$$p_e(t) = e x_0 \sin \omega t = e \cdot x(t)$$

Andererseits soll auch gelten:

$$\begin{aligned} S &\propto \omega^4 e^2 x_o^2 \sin^2 \omega t \\ &= \ddot{p}^2(t) \\ &= e^2 \ddot{x}(t)^2 \\ S &\propto e^2 a(t)^2 \end{aligned}$$

Dies ist ein sehr allgemeiner Sachverhalt. Jede Ladung, die sich beschleunigt bewegt (bei der sich also die Geschwindigkeit ändert), strahlt eine Welle ab, für die gilt:

$$\begin{aligned} S &\propto e^2 \dot{v}^2 \\ &\propto a(t)^2 \end{aligned}$$

Beispiele:

- Ladungen in einem Kreisbeschleuniger wie ein Betatron oder Zyklotron führen eine beschleunigte Bewegung (Radialbeschleunigung) aus und strahlen darum ab.
- Auch bewegte Ladungen, die abgebremst werden (Auftreffen auf Materie), strahlen ab. Beispiel: Röntgenröhre

Wiederholung I - Entstehung von elektromagnetischen Wellen

- Voraussetzung ist eine kollektive Bewegung von Ladungen (z.B. im Hertz‘ schen Dipol oder Kreisbeschleuniger). Des weiteren muss die Bewegung beschleunigt sein; nur dann wird Energie als elektromagnetische Welle abgestrahlt.
- Abgestrahlte Energie pro Zeit und Fläche wird durch die Energiestromdichte $|\vec{S}|$

$$\left|\vec{S}\right| \propto |\vec{a}(t)|^2$$

ausgedrückt ($a(t)$ ist eine zeitabhängige Beschleunigung).

- Das Frequenzspektrum des Hertz‘schen Dipols: Bekannt ist:

$$s \propto \underbrace{\omega^2 e^2 x_0^2 \sin^2 \omega t}_{a(t)^2}$$

Gefragt ist nun die mittlere Leistung; gemittelt über mindestens eine Schwingungsperiode T. So gilt:

$$\overline{S} \propto \frac{1}{2}\omega^4 e^2 x_0^2$$

- Der Zusammenhang von x_0 und ω: Man beschreibe die Abstrahlung und die Dämpfung im Modell des gedämpften Oszillators, der unter dem Einfluss der elektrischen Kraft $F_e(t) = e\overrightarrow{E}(t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird:

$$\ddot{x} = 2\gamma \cdot \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \exp(i\omega t)$$

Wenn $E(t) = E_0 \exp(i\omega t)$, ist die Lösung:

$$x(t) = x_0(\omega) \exp(i\omega t)$$

Das Ergebnis war:

$$|x_0(\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2}$$

So folgt:

$$\overline{S} \propto \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Die Halbwertsbreite der Frequenzverteilung ist also durch die Dämpfung

$$\Delta\omega = 2\gamma$$

des Oszillators gegeben.

10.5.2 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch beschleunigte Ladungen

Synchrotonstrahlung

Definition 10.20: SYNCHROTONSTRAHLUNG

Elektromagnetische Strahlung, die von geladenen Teilchen auf gekrümmten Bahnen emittiert wird, heißt Synchrotonstrahlung.

Die Eigenschaften

- Wie beim Hertz' schen Dipol wird in Richtung von $\overrightarrow{a}$ keine Strahlung emittiert.
- Durch relativistische Effekte ($v \approx c$) ergibt sich eine extreme Vorwärts-/ Rückwärts- Asymmetrie in der Abstrahlcharakteristik: Es entsteht eine schmale, intensive Strahlungsquelle in Vorwärtsrichtung.
- Die Synchrotonstrahlung ist polarisiert: $\overrightarrow{E} \| \overrightarrow{a}$
- Das Frequenzspektrum ist kontinuierlich: Das Maximum der Frequenzverteilung liegt - je nach Beschleunigungsenergie - im UV bishin zum Röntgenbereich.
- Vergleich mit dem Hertz' schen Dipol: Schaut man von der Seite auf die Bahnkurve, so sieht man, wie beim Hertz' schen Dipol, ein oszillierendes Elektron.

Beispiele für Kreisbeschleuniger - Das Zyklotron

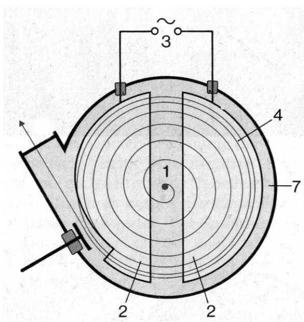


Abbildung 10.12: Zyklotron - Draufsicht

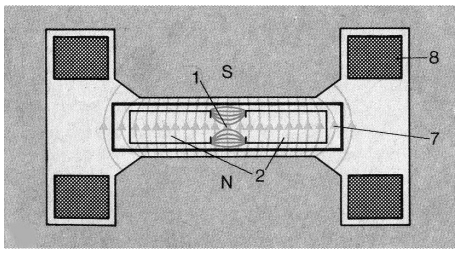


Abbildung 10.13: Zyklotron - Querschnitt

- Zwischen den beiden durch einen Spalt voneinander getrennten Dosenhälften ($Nr.2$) liegt eine Spannung $U_\sim(t)$ an ($Nr.3$).

- Die aus der Quelle ($Nr.1$) stammenden Ionen/Elektronen werden beschleunigt.
- Das Umpolen der Spannung (Wechselspannung) ermöglicht, dass beim Durchlaufen jeder der beiden Hälften beschleunigt werden kann.
- Durch ein Magnetfeld orthogonal zu den Dosen (⇒Lorentzkraft) werden die geladenen Teilchen auf Kreisbahnen gehalten.

Die Frequenz $U_{\sim}(t)$:

Man stelle eine Kräfte-Bilanz auf:

$$m_e \cdot a_r = \frac{m_e v^2}{r} = evB$$

Die Umlaufzeit $T = \frac{2\pi r}{v}$ ergibt sich mit

$$\frac{v}{r} = \frac{eB}{m_e}$$

zu

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

Somit gilt für die Zyklotronfrequenz:

$$\frac{eB}{m_e} = \omega_Z = \frac{2\pi}{T}$$

Man sieht, dass die Frequenz von der Energie unabhängig ist. So können die Spalte von den Elektronen immer zur richtigen Zeit durchlaufen werden. Die Beschleunigung der Elektronen zwischen den Dosen äußert sich nun in Form kinetischer Energie. Somit wächst der Bahnradius r mit zunehmender Teilchenenergie an.
Beachte: Die Unabhängigkeit von T von der Energie gilt jedoch nur, solange die Bewegung der Elektronen durch die nicht- relativistische Mechanik beschrieben werden kann.

Beispiele für Kreisbeschleuniger - Das Synchroton

- Es handelt sich um einen Ringbeschleuniger mit konstantem Bahnradius der Elektronen.
- Die höchste Teilchenergie liegt bei $\leq 500 GeV$.
- Die Bahndefinition und Teilchenfokussierung erfolgt über Felder von C-Elektromagneten mit geeigneter Polschuh-Form.
- Die Beschleunigung erfolgt über elektrische Felder.

- Beispieldaten (CERN):
  - Ringumfang: 6,9km
  - 588 Ablenkmagnete
  - $400GeV$ Gesamtenergie
  - Geschwindigkeit der Elektronen: 99,999% der Lichtgeschwindigkeit.

Die Röntgenbremsstrahlung

Jede Beschleunigung einer Ladung verursacht eine Abstrahlung elektromagnetischer Energie:

$$S \propto |\overrightarrow{a}(t)|^2$$

Die Verzögerung/ Abbremsung einer Ladung bedeutet ebenfalls eine (negative) Beschleunigung. Es wird somit Energie abgestrahlt.

Dies findet Anwendung bei der Röntgenröhre:

- Schnelle Elektronen ($\sim 60keV$ Energie) werden auf die Energie *Null* abgebremst (siehe Abb 10.14), wenn sie auf eine metallische Anode treffen.
- Ein Teil der Energie tritt als Wärme auf; ein Teil als elektromagnetische Strahlung.
- Das Röntgenspektrum enthält einen kontinuierlichen Anteil, der auf die Abbremsung der Ladung zurückgeht.

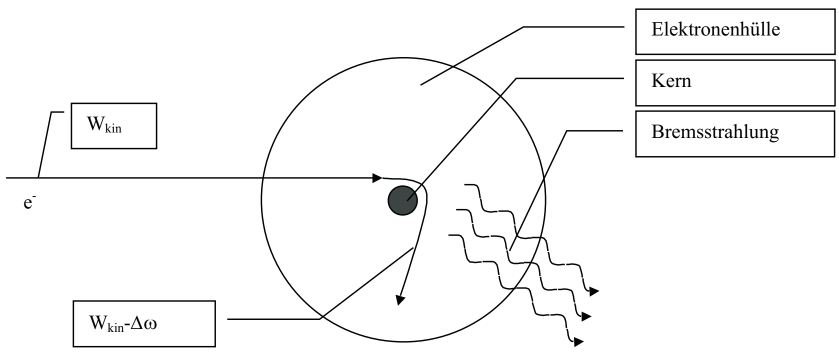


Abbildung 10.14: Abbremsvorgang

Beim Abbremsen werden die Elektronen auf eine gekrümmte Bahn gezwungen, was eine Radialbeschleunigung hervorruft. Diese Beschleunigung verursacht die elektromagnetische Strahlung.

Andere schwingungsfähige Systeme - Der Hohlraumresonator

Lässt man den Drahtbügel um zwei Kondensatorplatten um diese rotieren, so entsteht ein Hohlraum. Somit stellen Boden und Deckel des (zylindrischen) Hohlraums die beiden Kondensatorplatten dar. Der Mantel wird als Spule interpretiert.

Somit hat der Hohlraum elektromagnetische Eigenschwingungen: $\overrightarrow{E}$- Feld und $\overrightarrow{B}$- Feld sind zueinander senkrecht polarisiert. Das $\overrightarrow{E}$- Feld steht senkrecht zum Mantel.
Als mechanisches Analogon zum Hohlraumresonator kann man die Schwingung einer Platte, die 3D- Schwingung von Musikinstrumenten oder die 3D- stehende Schallwelle in Gassäulen o.ä. betrachten.

Versuch: *Mirkowellenstrahlung*
Mikrowellen sind elektromagnetische Wellen aus Hohlraumresonatoren mit einer Frequenz um $\nu \cong 10^9 Hz$; sogenannte *cm-Wellen.*

- Strahlung in Form von elektromagnetischen Wellen wird abgegeben.
- Die Reflexion an einer Grenzfläche liefert eine stehende elektromagnetische Welle.
- Die Strahlung ist polarisiert.

Anregung und Nachweis elektromagnetischer Eigenschwingungen

<u>Anregung:</u>

Es wird über eine Stromschleife elektromagnetische Energie mit der Frequenz μ (variabel) eingekoppelt, welche mit dem Wechselstrom $I_{\sim}(t, \nu)$ betrieben wird.
$\Rightarrow$ Ein hochfrequentes $\overrightarrow{B}$- Feld wird eingekoppelt. Dieses regt die Hohlraumschwingung an.

<u>Nachweis:</u>

Der Nachweis erfolgt über die Messung der induzierten Hochfrequenzspannung (gleichgerichtet). Das Ergebnis ist eine scharfe Resonanz als Funktion der Frequenz.
Versuch: *Polarisation der Mikrowellen*

1. Wenn das $\overrightarrow{E}$- Feld in Richtung der Gitterstäbe gerichtet ist, nehmen die Elektronen des Metalls Energie auf. Sie werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt.
   - Das $\overrightarrow{E}$- Feld bricht zusammen.
   - Der Detektor wird nicht mehr zu erzwungenen Schingungen angeregt.
2. Der Analysator bleibt fest. Der Hohlraumresonator (die Mikrowellenquelle) wird gedreht: Nun bricht das $\overrightarrow{E}$- Feld nicht zusammen.

Die Lecherleitung

Ein Hohlraumresonator gibt elektromagnetische Energie an zwei parallele Doppel-Leitungen ab.

Ergebnis: An und zwischen den Drähten läuft eine elektromagnetische Welle zum Empfänger.
⇒ Diese Anordnung stellt einen Prototyp eines Fernsehkabels dar. In der modernen Version ist dies ein Koaxial- Kabel, bei dem beide Leiter einander umgeben; eingebettet in Kunststoff.

Nachweisen lässt sich die Welle durch einen Empfänger- Schwingkreis, dessen Enden mit Gleichrichter und Galvanometer verbunden sind.
Das Bewegen des Detektors entlang der Leitung lässt eine Folge von Knoten und Bäuchen des $\vec{E}$- Feldes erkennen.

Zum Verständnis der Lecherleitung:

Man wähle als Ersatzschaltbild eine Kette aus lauter LC- Gliedern:

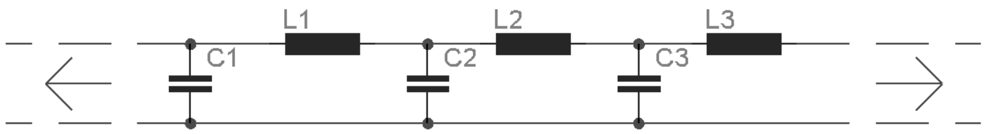


Abbildung 10.15: Kette aus LC-Gliedern

Der Vorgang an der Schaltung:

- An einem Ende wird ein LC-Kreis durch den Hohlraumstrahler zu erzwungenen Schwingungen angeregt.
- Durch die Kopplung des benachbarten LC-Kreises erfolgt eine Anregung der nachfolgenden Kreise.

⇒ Die Verhältnisse sind gleich derer der Torsionspendelkette: Die Torsionspendelkette ist das mechanische Analogon für die Lecher-Leitung.

10.5.3 Wellengleichung und Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Es folgt die Herleitung der Wellengleichung für elektromagnetische Wellen in nichtleitenden Medien.

Ausgehend von den Maxwell‘ schen Gleichungen erhält man folgende Gleichungen für die Orts- und Zeitabhängigkeit der Feldstärken $\overrightarrow{E}$ und $\overrightarrow{B}(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial x^2} + \quad ... \quad + \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial x^2} + \quad ... \quad + \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} \epsilon &= {\epsilon_0}^3 \cdot \epsilon_r \\ \mu &= \mu_0 \cdot \mu_r \end{aligned}$$

Diskussion

Dies sind drei Wellengleichungen für $E_{x,y,z}$ und $B_{x,y,z}$, die die 3D- Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beschreiben. Offenbar ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_φ

$$v_\varphi = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_9 \mu_r}}$$

Im Vakuum ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) gilt:

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \\ &= 2,998 \cdot 10^8 m s^{-1} \end{aligned}$$

c_0 ist mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit identisch.
⇒ Licht ist eine elektromagnetische Welle!

Beispiele für elektromagnetische Wellen

1. Eine ebene elektromagnetische Welle, die in x-Richtung abgestrahlt wird (Technisch: Fernfeld des Hertz‘ schen Dipols):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{E}_0 \sin(\omega t - kx) \\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{B}_0 \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{E}$ und $\overrightarrow{B}$ liegen in der Ebene senkrecht zur $\overrightarrow{x}$-Richtung, wobei zwischen den Amplituden die folgende Verknüpfung von $\overrightarrow{E}$ und $\overrightarrow{B}$ über die Maxwell‘ schen Gleichungen besteht:

$$|\overrightarrow{E}_0| = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} |\overrightarrow{H}_0| = \left(\frac{1}{\epsilon\mu}\right)^{\frac{1}{2}} |\overrightarrow{B}_0|$$

mit $c = \frac{\omega}{k}$ wenn c die Lichtgeschwindigkeit im betreffenden Medium ist.

2. Eine Kugelwelle, bei der die Energie gleichmäßig in alle Richtungen verteilt wird, ist

$$E(r) = \frac{E_0}{r}\sin(\omega t - kr)$$

mit r als Abstand von der Strahlquelle.

Die Amplitude $\frac{E_0}{r}$ muss mit wachsendem r abnehmen, da sich die abgestrahlte Energie auf immer größere Kugelschalen verteilt.

Herleitung der Wellengleichung

- Man betrachte ein würfelförmiges Volumenelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.
- Das magnetische Feld $\overrightarrow{H}$ zeige in z-Richtung:

$$H_z(t) \qquad \text{(zeitabhängig)}$$

- Für die Maxwell' schen Gleichungen gilt noch allgemein:
  1. Die Kurve (K) umschließt A:

  $$\oint_{(K)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\int_A \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{dA} \qquad \text{(1. Maxwell' sche Gleichung)}$$

  2. Die Kurve (K') umschließt (A'):

  $$\oint_{(K')} \overrightarrow{E}\overrightarrow{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{(A')} \overrightarrow{B} dA$$

  1. Für (K) wähle man als Weg das durch dx und dz aufgespannte Quadrat: $A = dx \cdot dz$
  2. Für (K') wähle man als Weg das durch dx und dy aufgespannte Quadrat: $A = dx \cdot dy$

<u>Zur 1. Maxwell' schen Gleichung:</u>

$$\begin{aligned}\oint_{(K)} \overrightarrow{H}\overrightarrow{ds} &= \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial x} \cdot dx\right) dz - H_z \cdot dz \\ &= \frac{\partial H_z}{\partial x} \cdot dx \cdot dz\end{aligned}$$

Nach der 1. Maxwell' schen Gleichung ist dies gleich:

$$\begin{aligned}\int_{(A)} \overrightarrow{D}\overrightarrow{dA} &= -Dy \cdot dx \cdot dz \\ &= -\epsilon_0 E_y dx \cdot dz \\ \Rightarrow \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{dt}\end{aligned} \tag{10.8}$$

In Worten:
Mit dem $\vec{H}$- Feld, H_z, ist ein $\vec{E}$- Feld, E_y, (welches senkrecht auf $\vec{H}$ steht) verknüpft. Die Ausbreitungsrichtung ist senkrecht auf $\vec{H}$ und $\vec{E}$; somit in x-Richtung.

<u>Zur 2. MAXWELL'schen Gleichung:</u>

$$\begin{aligned}\oint_{(K)} &= \left(E_y + \frac{\partial E_y}{dx} \cdot dx\right) \cdot dy - E_y \cdot dy \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot dy \cdot dx\end{aligned}$$

Wegen der 2. Maxwell' schen Gleichung gilt mit

$$\begin{aligned}\int_{(A)} \vec{B}\vec{dA} &= B_z \cdot dy \cdot dy \\ &= \mu_0 H_z \cdot dx \cdot dy\end{aligned}$$

die Beziehung:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{10.9}$$

Differentiation von (10.8) nach x und (10.9) nach t liefert:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_o \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Dies ist eine 1D- Wellengleichung für $H_z(x,t)$.

Differentiation von (10.8) nach t und (10.9) nach x liefert

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_o \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

... eine 1D- Wellengleichung für $E_y(x,t)$.

Die Ausbreitungsrichtung ist die x-Richtung. Die Ausbreitung erfolgt mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Offenbar ist die ebene harmonische Welle

$$\begin{aligned}E_y &= E_0 \sin(\omega t - kx) \\ H_z &= H_0 \sin(\omega t - kx)\end{aligned}$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$ Lösungen der Wellengleichung.

Das Verhältnis $\frac{E_0}{B_0}$ folgt aus den Maxwell' schen Gleichungen:

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{c}$$

wobei $B_0 = \mu_0 H_0$

Versuch 1: *Die Messung von c*

Untersucht werden sollen stehende Wellen bekannter Frequenzen.
Dazu lasse man elektromagnetische Wellen, erzeugt von einem Mikrowellengenerator bekannter Frequenz (Herstellerangabe), sich über eine Lecherleitung in x- Richtung ausbreiten und dann reflektieren.

Man stellt fest: Durch die Überlagerung von hin-/ rücklaufender ebener elektromagnetischer Welle entstehen stehende Wellen:

$$\begin{aligned}\psi_{sw} &= A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx) \\ &= 2A\cos kx - \sin\omega t\end{aligned}$$

Die Randbedingungen verlangen: Es muss eine ganze Zahl von halben Wellenlängen

$$n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

in den *Resonator* passen.

Des weiteren ist aus $\frac{\omega}{k} = c$ bekannt:

$$\lambda \cdot \nu = c$$

Im Versuch wurde für $\frac{\lambda}{2} = 1,6cm$ gemessen. Bekannt ist die Frequenz $\nu = 9,2GHz$. So ergibt sich für das experimentell ermittelte c in Materie (Luft):

$$\begin{aligned}c &= \lambda \cdot \nu \\ &= 3,2cm \cdot 9,2 \cdot 10^9 s^{-1} \\ &\approx 2,94 \cdot 10^{10} \frac{cm}{s}\end{aligned}$$

Versuch 2: *Stehende Wellen mit Hertz'schen Dipol gegen Hörsaalwand*

Der Dipolstrahler wird gegen die Hörsaalwand gedreht. Dann wird mit dem Empfänger das Intensitätsfeld abgefahren. So können die Extrema demonstriert werden.

- Bekannt ist die Frequenz des Senders im $100MHz$- Bereich.

- Die kleinere Frequenz müsste eine andere Wellenlänge verursachen: Der Versuch bestätigt: λ ist größer.
- Somit bleibt gültig: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser elektromagnetischen Welle ist c.

Versuch 3: *Messung der Lichtgeschwindigkeit in Luft mit der Drehspiegelmethode*

Das Ergebnis vorweg: Es wird genau dasselbe c gemessen. Dies unterstreicht die *Vermutung*, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht wird nach der Foucault' schen Drehspiegelmethode bestimmt. Das Prinzip:

- Ein Lichtstrahl (Laser) triff zwei mal auf den in der Entfernung b stehenden Drehspiegel.
- Der reflektierte Strahl trifft nach
$$\Delta\tau = \frac{2b}{c}$$
wieder auf.
- Aber: Der rotierende Spiegel hat sich in der Zeit um den Winkel β weitergedreht:
$$\beta = \omega \cdot \Delta\tau$$
Obiges folt aus $\omega = \frac{d\varphi}{d\tau}$.
So gilt für β:
$$\beta = \omega \frac{2b}{c}$$
- Der Auftreffpunkt (Δs) auf dem Schirm folgt aus der goemetrischen Überlegung unter Verwendung des Reflexionsgesetzes:
$$\begin{aligned} \Delta s &\cong L \cdot 2\beta \\ &= L \cdot 2\omega \cdot \frac{2b}{c} \end{aligned}$$
So folgt:
$$\begin{aligned} c &= \frac{4\omega \cdot b \cdot L}{\Delta s} \\ &= \frac{8\pi \cdot b \cdot L}{\Delta s} \end{aligned}$$

Im Versuch wurden folgende Daten gemessen:

ν	L	b	Δs
$500 s^{-1}$	$5m$	$15,3m$	$3 \cdot 10^{-3} m$

So folgt für die experimentell ermittelte Lichtgeschwindigkeit:

$$c = 2,96 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Der genaueste Messwert liegt bei:

$$c = 299.792.456,2 \frac{m}{s} \quad \pm \quad 1,1 \frac{m}{s}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c ist heute auf den Wert

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

festgesetzt. Sie wird zur Definition des Meters (Basiseinheit: $1m$) benutzt. Man misst also über die Beziehung

$$\lambda \cdot \nu = c$$

lediglich noch die Frequenz ν.

Polarisation elektromagnetischer Wellen

Elektromagnetische Wellen sind **transversal**.
Das heißt, $\overrightarrow{E}$- Feld und $\overrightarrow{B}$- Feld sind beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und zueinander.

$\Rightarrow$ Man muss die Polarisation, also die Schwingungsrichtung des $\overrightarrow{E}$- Vektors angeben.

Definition 10.21: LINEARE POLARISATION

> *Wenn die Polarisationsrichtung für alle Zeiten festliegt (in einer Ebene senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung), so heißt die elektromagnetische Welle linear polarisiert.*

Definition 10.22: ELLIPSISCHE POLARISISATION

> *Rotieren die Feldvektoren während des Ausbreitungsvorgangs mit der Kreisfrequenz ω um die Ausbreitungsrichtung, so heißt die elektromagnetische Welle elliptisch polarisiert.*

Definition 10.23: ZIRKULARE POLARISATION

> *Wenn der Feldvektor bei der Rotation seinen Betrag nicht ändert, so heißt die elektromagnetische Welle zirkular polarisiert.*

Definition 10.24: Unpolarisierte Welle

> *Kommen im Wellenfeld alle Polarisationsrichtungen gleich häufig vor, so ist die elektromagnetische Welle unpolarisiert.*

Bemerkung: Beim Durchgang durch Materie kann aus einer unpolarisierten Welle eine (teilweise) polarisierte Welle entstehen.

10.6 Das Spektrum elektromagnetischer Wellen

Grundlagen

Elektromagnetische Wellen gibt es im Frequenzbereich von einigen Hz bis zu $10^{24}Hz$. Dabei gilt für alle elektromagnetischen Wellen

$$c = \lambda \cdot \nu$$
oder
$$c = \frac{\omega}{k}$$

Entstehung elektromagnetischer Wellen:

- Bei der Abstrahlung von Antennen: Kollektiv beschleunigte Bewegung von Ladungen.
- Bei Energieübergängen in makroskopischen Körpern/ Dipolstrahlern (Kerne, Atome, Moleküle): Elektromagnetische Strahlung wird von mikroskopischen Systemen in bestimmten Paketgrößen absorbiert und emitiert:

  $$W_n - W_n = h \cdot \nu$$

  mit der Planck‘ sche Konstante :

  $$h = 6,67 \cdot 10^{-34} Js$$

Merke: Die Energie ist in Paketen der Größe $\Delta W = h \cdot \nu$ im Wellenfeld enthalten.

Zur Sprechweise:

- Bei elektromagnetischen Wellen, deren Wellenlänge länger als $\lambda \approx 1cm$ ist, spricht man von *Wellen.*
- Bei hinreichend kurzwelliger Strahlung mit $\lambda < 1cm$ spricht man von *Strahlung* (Röntgenstrahlung, γ-Strahlung...)

Charakterisierung der elektromagnetischen Wellen in den verschiedenen Spektralbereichen

1. **Radiowellen**

   Allgemein: Die Wellenlänge ist $\lambda > 10^{-1}cm$

   - Erzeugung und Nachweis:
     Die Erzeugung erfolgt über ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen von Sendern; Zum Beispiel über die Abstrahlung von Dipolantennen, Hohlleitern...
   - Informationsübertragung:
     Die Informationsübertragung erfolgt über die Modulation der elektromagnetischen Welle:

- Die Amplitudenmodulation.
  Eine elektromagnetische Welle bekommt die Amplitude
  $$A_s(t)$$
  aufmoduliert:
  $$A(x,t) = A_s(t) \cdot A_0 \sin(\omega t - kx)$$
- Die Frequenzmodulation:
  Beispiel: Die Kapazität eines Schwingkreises ändert sich im Takt von $A_s(t)$. Dadurch ändert sich die Eigenfrequenz und somit auch die Frequenz der abgestrahlten Welle im Takt des Signals.

- Zur Informationsübertragung: Die technische Realisierung:

  Stufe 1:
  - Monochromatische, ungedämpfte Trägerwelle wird mit einem rückgekoppelten Generator erzeugt (Sender).
  - Die Information wird aufmoduliert. Die Schwingung wird verstärkt.

  Stufe 2:
  - Es erfolgt die Abstrahlung der elektromagnetischen Welle von der Senderantenne.
  - Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c

  Stufe 3:
  - Die elektromagnetische Welle induziert Ströme in der Empfängerantenne.
  - Die Antenne ist an einen abstimmbaren Empfängerschwingkreis gekoppelt (Resonanz).
  - Demodulation: Das Informationssignal $A_s(t)$ wird von der Trägerwelle getrennt.
  - Anschließende Verstärkung macht den Betrieb eines Lautsprechers möglich.

2. **Infrarot(Ultrarot)- Strahlung**

   Allgemein: Die Frequenz geht von $\nu = 3 \cdot 10^{11} Hz$ bis $\nu = 3,8 \cdot 10^{14} Hz$.
   Die Wellenlänge reicht von $\lambda = 1mm$ bis $\lambda = 790nm$.

   - Erzeugung von Infrarotstrahlung:
     - Man erhitzt einen festen, flüssigen oder gasförmigen Körper (unter hohem Druck).
     - Es liegt ein kontinuierliches Emissionsspektrum vor.
     - Die Temperaturstrahlung ist umso intensiver, je höher die Temperatur T ist.
     - Das Spektrum verschiebt sich mit wachsendem T zu kürzeren Wellenlängen.
   - Das mikroskopische Bild:

- Atome, die nahe beisammen sind, beineinflussen einander, indem sie Kräfte aufeinander ausüben.
- Durch Stöße werden die Ladungsverteilungen in den Atomen gegeneinander bewegt, das heißt, sie führen mehr oder weniger periodische Bewegungen aus.
  In jedem Fall aber handelt es sich um beschleunigte Bewegungen: Dabei entsteht ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld. Liegt dies vor, so wird von den Atomen Strahlung abgegeben.
- Trifft die Strahlung auf Moleküle auf, so kann sie wieder absorbiert werden. Die Moleküle werden zu Schwingungen angeregt und man stellt die Entstehung von *Wärme* fest.
  * Beispiel: Eine solche Energieübertragung findet von der Sonne zur Erde durchs Vakuum statt. Dies setzt eine zweimalige Energieumwandlung voraus:

$$\begin{array}{rcl} \text{Molekülbewegung (Quelle)} & \Rightarrow & \text{Elektromagnetische Energie} \\ \text{Elektromagnetische Energie} & \Rightarrow & \text{Molekülbewegung (Empfänger)} \end{array}$$

- Man halte fest: Durch die kollektive Schwingung von Gitteratomen wird ein praktisch kontinuierliches Frequenzspektrum abgestrahlt.

3. **Schwarze Körper**

Definition 10.25: SCHWARZE KÖRPER

Ein Körper, der die gesamte anfallende Strahlung absorbiert (also nicht reflektiert), heißt schwarzer Körper.

Damit sich der schwarze Körper nicht erwärmt, muss er die absorbierte Energie im Gleichgewicht auch wieder emittieren.

Dies ist auch der Fall:

Er gibt die Energie in Form von elektromagnetischer Energie wieder ab.

Für einen schwarzen Körper gelten folgende Gesetze:

(a) Gesetz von STEFAN BOLZMANN:
Die gesamte, über alle λ- Werte aufgenommene Energie per Zeit (Leistung P_s), ist:

$$\begin{array}{rcl} P_s & = & \sigma \cdot A \cdot T^4 \\ \sigma & = & 5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4} \end{array}$$

(b) Wien' sches Verschiebungsgesetz:
Am meisten Energie wird um die Wellenlänge λ_m herum abgestrahlt:

$$\lambda_m \cdot T = \text{konstant} = 2,898 \cdot 10^{-3} mK$$

Häufig wird die spezifische Abstrahlung angegeben: Die pro Zeit und Fläche in den Halbraum 2π emittierte Energie:

$$M_\lambda \cdot d\lambda \quad = \quad \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc_0}{kT\lambda}\right) - 1}$$

Alternativ kann man auch die Strahlungsenergie, die auf dA auf $d\nu$ entfällt, angeben:

$$M_\nu d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Es folgt die in dem gesamten Halbraum abgestrahlte Leistung:

$$dP_\lambda = \frac{4\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kt\lambda}\right) - 1} \cdot Ad\lambda$$

Zum Nachweis der Strahlung gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Thermosäule:
Eine Kaskade aus Thermoelementen. Jeweils eine Lötstelle ist vor der Bestrahlung geschützt.

(b) Bolometer:
Die Erwärmung bewirkt eine Änderung des Widerstandes R. Es wird ΔR in Brückenschaltung gemessen.

Versuch: *Schwarzer Körper*

Als Lichtquelle dient eine Bogenlampe. Die Strahlung wird spektral nach Wellenlängen, die im Gemisch der Strahlung vorhanden sind, zerlegt (Geradsicht-Prisma). Der Nachweis der Strahlung erfolgt über eine Thermosäule:

Zur Durchführung: Der Detektor wird durch das Wellenlängenspektrum bewegt. Man misst:

$$\frac{dP}{d\lambda} \quad \text{gegen} \quad \lambda$$

Ergebnis: Das Maximum von $\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$, λ_{max} liegt im Infrarotbereich.

Diskussion zur Planck'schen Formel

Die obigen Gleichungen gelten für beliebige Temperaturstrahler, und nicht nur solche, deren Maximum λ_m im Infrarotbereich liegt. Nur lassen sich Temperaturstrahler mit Temperaturen $T > 3500K$ schlecht herstellen: Deshalb sind die Gesetzte des schwarzen Körpers besonders relevant für den Infrarotbereich.

Unsere Sonne ist in guter Näherung ein schwarzer Körper mit einer Oberflächentemperatur von

$$T_s \sim 6000K$$

Bedeutung/Konsequenzen des Planck' schen Strahlungsgesetzes:

- Astrophysik: Das Spektrum gibt Auskunft über die Oberflächentemperatur
- Kosmische Hintergrundstrahlung: Mikrowellenstrahlung, die den Kosmos erfüllt. Deren Spektrum folgt dem Planck' schen Strahlungsgesetz für $T \sim 2,7K$

  Dieser Zahlenwert und dessen Existenz ist ein weiterer Beleg für die Urknall- Hypothese.

  (Photonen werden nicht mehr absorbiert und verlieren im Verlauf der Zeit Energie durch adiabatische Abkühlung.

4. **Sichtbares Licht**

Das Spektrum des sichtbaren Lichts:

$$\begin{aligned} 390nm \leq \quad & \lambda \quad \leq 790nm \\ 7,7 \cdot 10^{14} \geq \quad & \nu \quad \geq 3,8 \cdot 10^{14} Hz \end{aligned}$$

Der Nachweis des sichtbaren Lichts erfolgt

- durch Fotografische Methoden
- durch Fotoelektrische Methoden
- über ein Fotomultiplier.

Natürliche Lichtquellen: Temperaturstrahler mit hinreichend großer Temperatur.

Das makroskopische Modell:

- Ein Atom ist ein atomarer Dipol; aufgebaut aus einem praktisch ortsfesten positiv geladenen Kern und Elektronen, die gegen diesen Kern Schwingungen ausführen können.
- Da alle atomaren Dipole in einer natürlichen Lichtquelle sich mit thermischer Geschwindigkeit gegeneinander bewegen und zusätzlich völlig reglos gegeneinander orientiert sind, ist das Feld der Lichtquelle recht kompliziert.
- Auf jeden Fall gilt: $\overrightarrow{E}$- und $\overrightarrow{B}$-Vektoren sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts.

- Sonderfälle: Durch spezielle Tricks kann man erreichen, dass der $\vec{E}$-Vektor bestimmte Bahnen im Raum orthogonal zur Ausbreitungsrichtung durchläuft (Polarisiertes Licht).

5. **Der Laser**

- Modellvorstellung: Kollektive Bewegung von Elektronen im optischen Resonator
- Prinzip: Alle atomaren Dipole im Resonator strahlen in Phase elektromagnetische Strahlung (unter dem Einfluss des elektromagnetischen Feldes im Resonator (erzwungene Schwingungen)) ab.

$\Rightarrow$ Genaueres in Kapitel 11.2.4

6. **UV- Strahlung**

- Das Spektrum der UV- Strahlung:

$$\begin{aligned} 10nm \leq & \quad \lambda \quad \leq 380nm \\ 7 \cdot 10^{14} \leq & \quad \nu \quad \leq 3 \cdot 10^{16} Hz \\ W = h \cdot \nu & \quad \lesssim \quad 100eV \end{aligned}$$

- Erzeugung von UV- Strahlung:
  - Temperaturstrahler haben ihr Maximum bei machbaren Temperaturen bei viel größeren Wellenlängen als die des UV- Bereichs: Der Quotient $\frac{dP}{d\lambda}$ ist im UV- Bereich zu klein.
    Somit sind Temperaturstrahler als UV-Quelle ungeeignet.
  - Die Erzeugung erfolgt über Gasentladung:
    Durch Elektronenstöße werden Atome angeregt. Die Anregungsenergie kann dann als UV- Strahlung abgegeben werden.
  - Beispiele:
    * Hg- Dampflampe
    * Halogenlampe
    * Xe- Lampe
    * He- Entladung
- Nachweis der UV- Strahlung:
  - Fotozelle
  - Fotomultiplier
  - Fotografisch

- Fluoreszenz:
  Die Anregungsenergie des UV- Lichts wird teilweise dazu verwendet, Atome in bestimmten Materialien zu Zuständen anzuregen, in welchen die Atome ihre Anregungsenergie in Form von sichtbarem Licht wieder abgeben.
- UV- Strahlung ist biologisch wirksam: Sie bräunt die Haut im Wellenlängenbereich

$$0,265\mu m \leq \lambda \leq 0,305\mu m$$

7. **Röntgenstrahlung**

- Das Spektrum der Röntgenstrahlung:

$$\begin{aligned} 15nm \geq \quad & \lambda \quad \geq 10^{-12}nm \\ 10^{16} \leq \quad & \nu \quad \leq 3 \cdot 10^{20}Hz \end{aligned}$$

- Erzeugung von Röntgenstrahlen in der Röntgenröhre:

  In einer Röntgenröhre treffen schnelle Elektronen ($30...60keV$ Energie) auf eine metallische Oberfläche (Anode). Die Geschwindigkeit der Elektronen ist dann $v = 6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$.
  Innerhalb von $10nm$ bis $100nm$ werden die Elektronen dann beim Auftreffen auf die Anode auf $v \sim 0\frac{m}{s}$ abgebremst (Driftgeschwindigkeit im Leiter).
  Ein Teil der kinetischen Energie, die bei der Abbremsung umgesetzt wird, tritt als elektromagnetische Strahlung auf: Die Röntgenbremsstrahlung.
  Da diese Abbremsung kein periodischer Beschleunigungsvorgang ist, ist das Frequenzspektum kontinuierlich.

  Die Spektren der Röntgenstrahlung haben aber eine obere Grenzfrequenz ν_g, beziehungsweise eine untere Grenzwellenlänge λ_g, die von der Beschleunigungsspannung U der Elektronen abhängig ist:

  Die höchste Quantenenergie, die entstehen kann, folgt aus der Energieerhaltung:
  Die Elektronen erhalten bei der Beschleunigung die kinetische Energie

$$W_{kin} = eU$$

  mit U als Beschleunigungsspannung.
  Des weiteren muss gelten:

$$h\nu \leq W_{kin}$$

So folgt für die Grenzfrequenz ν_g:

$$\nu_g = \frac{eU}{h}$$

Man drücke noch ν durch λ aus:

Es folgt das Gesetz von DUANE-HUNT:

$$\begin{aligned} U \cdot \lambda_g &= \frac{hc}{e} = \text{ konstant} \\ &= 12,4 \cdot 10^{-10} kV \cdot m \end{aligned}$$

Ein Zahlenbeispiel: $\lambda_g(60keV) = 0,2\text{Å}$

- Charakteristische Röntgenstrahlung:

  Diskrete Linien sind der Bremsstrahlung überlagert. Sie entstehen aufgrund von Übergängen zwischen Energie- Niveaus des Anodenmaterials: $h\nu_{nm} = W_n + W_m$

- Erzeugung von Röntgenstrahlen in Kreisbeschleunigern:

  Ultraharte Röntgenstrahlung (Synchrotonstrahlung) wird in Teilchen-Kreisbeschleunigern erzeugt:

  Von der Seite betrachtet bewegen sich die Elektronen im Kreisbeschleuniger wie in einer Dipolantenne. Die bewegten Elektronen geben einen Teil ihrer Energie als Röntgenstrahlung ab.

- Nachweis der Röntgenstrahlung:

  Der Nachweis erfolgt über Zählrohre, Halbleiterzähler; auch Fotoplatten werden geschwärzt. Dabei wird die ionisierende Wirkung der Röntgenstrahlung ausgenutzt.

8. **Gammastrahlung (γ- Strahlung)**

   Wenn Atomkerne aus einem angeregten Zustand W_n in einen Grundzustand W_0 übergehen, kann elektromagnetische Strahlung der Quantenenergie $\sim 1MeV$ abgegeben werden.

   Das Spektrum der γ- Strahlung:

$$\begin{aligned} \lambda &\sim 10^{-13} m \\ \nu &\sim 3 \cdot 10^{21} Hz \end{aligned}$$

   Beim Nachweis wird erneut die ionisierende Wirkung ausgenutzt.

Kapitel 11

Atome in elektromagnetischen Feldern

11.1 Atombau - Energetische Struktur von Atomen

11.1.1 Energieaufnahme und -abgabe durch Atome

Die Energieabgabe

Es wird die Lichtemission im sichtbaren Bereich, die von angeregten Atomen ausgeht, untersucht.

Versuch: *Linienspektrum des H- Atoms (Balmer-Serie)*

- Als Lichtquelle dient eine mit Welchelspannung betriebene Gasentladungsröhre. Sie ist mit Wasserdampf gefüllt.
- Dissoziation von Wasser:

  $$H_2O \Rightarrow OH + H$$

  Durch Stoßprozesse mit den Elektronen und Ionen der Entladung werden H- Atome angeregt.

  Sie sind für die Lichtemission verantwortlich.
- Eine oxidierende Substanz sorgt dafür, dass der gebildete, atomare Wasserstoff wieder zu H_2O oxidiert wird. So treten keine störenden Bandspektren von molekularem Wasserstoff, H_2, auf.

- Es erfolgt eine spektrale Zerlegung des Lichts unter Annahme des Snellius‘ schen Brechungsgesetztes, beruhend auf der Tatsache, dass die Brechzahl $n(\lambda)$ von der Wellenlänge λ, die emittiert wird, abhängt.

Versuch: *Linienspektrum des Hg – Atoms (sichtbarer Bereich)*

- Die spektrale Zerlegung erfolgt über ein Beugungsgitter.
- Prinzip: Überlagerung der N Kugelwellen, die von N Quellen ausgehen; die N-Quellen liegen auf einer Linie.
- Das Interferenzmuster der von den N Quellen ausgehenden Kugelwellen hängt von der Wellenlänge λ ab: Ergebnis ist eine Folge von scharfen Maxima (Ordnung $0, 1, 2...$), deren Abstand von λ abhängt.

Man stellt fest: Lichtenergie wird nur bei einigen diskreten Frequenzen emittiert, deren Werte von der Atomsorte abhängen.

Beispiel: Das H- Atom:

$$\nu = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

mit $n = 2$ für die Balmer- Serie im sichtbaren Bereich.
Zu der verwendeten Konstante:

Definition 11.1: RYDBERG- KONSTANTE

Die Zahl

$$R_H = 3,288 \cdot 10^{15} \frac{1}{s}$$

heißt RYDBERG- *Konstante.*

Versuch: *Franck-Hertz- Versuch*

Im Franck-Hertz- Versuch wird untersucht, wie die Energieaufnahme durch die Atome erfolgt (Erst dann kann sie in Form elektromagnetischer Strahlung abgegeben werden).

<u>Versuchsaufbau</u>

- Glühemission (Heizspannung U_H)
- Beschleunigung durch die Gitterspannung U_G
- Die Energieabgabe zwischen Gitter und Anode durch die Bremsspannung U_{GA}
- Der Stromfluss bei verschiedenen Spannungen U_G wird gemessen: $I(U_G)$

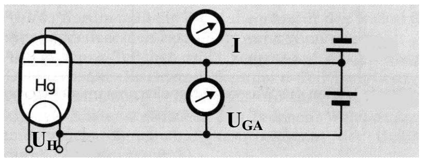


Abbildung 11.1: Aufbau Franck-Herz-Versuch

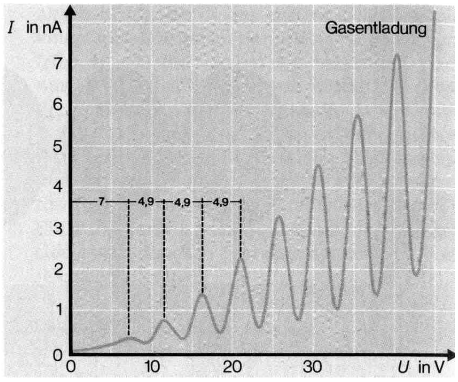


Abbildung 11.2: Kennlinie Quecksilber

Trägt man I gegen U_G auf, so entsteht eine charakteristische, gezackte Kennlinie. Der Abstand ΔU zwischen den lokalen Maxima ist charakteristisch für die Gasfüllung (Z.B.: HG-Dampf: $\sim 5eV$).

Erklärung der Kennlinie:

Sobald die kinetische Energie der Elektronen $eU_B = \frac{1}{2}mv^2 = W_{kin}$ größer als die Anregungsenergie eines Zustandes

$$e\Delta U \geq W_n$$

im Atom wird, geben die Elektronen genau diese Energiemenge an das Atom ab.
Der Vorgang:

- Ein Elektron im Atom wird auf einen Zustand höherer Energie angehoben: dazu ist die Energie $e\Delta U$ notwendig.
- Die Anregungsenergie des Atoms ist: $W_n = e\Delta U$
- Die einmal aufgenommene Energie kann ausschließlich als elektromagnetische Strahlung der Frequenz

$$h\nu = e\Delta U$$

wieder abgegeben werden

- Beispiel für das H- Atom:
Die möglichen Energiezustände W_n sind:

$$\begin{aligned} W_n &= h \cdot R_H \cdot \frac{1}{n^2} \\ n &= 1, 2, 3... \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Energie kann nur in diskreten Paketen durch Atome aufgenommen/ abgegeben werden. Elektronen können in Atomen nur diskrete Energien, W_n, besitzen.

- Bei Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen, W_n und W_m, wird Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung frei, für deren Frequenz ν folgendes gilt:

$$h\nu = W_n - W_m$$

- Dasselbe gilt für die Absorbtion: Damit ein Übergang von m nach n stattfindet, muss bei Fotoanregung die Frequenz der Strahlung $h\nu = W_m - W_n$ gewählt werden.

- Die diskrete energetische Struktur wird durch den Franck-Hertz-Versuch gut demonstriert:
Die $I(U)$- Kennlinie reflektiert direkt die quantisierte Energieaufnahme durch Atome.

Versuch: *Franck-Hertz- Versuch - Neongas*

Der Franck-Hertz- Versuch wird mit Neongas durchgeführt:

- Anregungsenergie: $\sim 19eV$

- Der Übergang mit Emission erfolgt hier im sichtbaren Bereich von $3p$ nach $3s$

11.1.2 Das Bohr'sche Atommodell

Das Bohr' sche Atommodell liefert eine nicht vollständig richtige Erklärung für die Energiewerte W_n, die ein Elektron im H- Atom annehmen kann. Es gibt bessere Modelle (Orbitalmodell), die aber mehr Formalismus erfordern. Dennoch bauen sie auf dem Modell von Bohr auf.

Die Grundvorstellungen:

- Einfach positiv geladener Atomkern (Proton).
- Das Elektron ist im Coulomb- Feld des Protons gebunden (wie die Planeten im Gravitationsfeld der Sonne)
- Das Elektron soll eine Kreisbahn mit Radius r_n durchlaufen.

Um die experimentellen Befunde verstehen zu können, hat Bohr zwei Forderungen gestellt:

Qualitativ

1. Es gibt bestimmte Bahnen r_n, auf denen das Elektron keine Energie in Form elektromagnetischer Strahlung abgibt.
2. Energie wird nur abgegeben, wenn das Elektron einen Übergang zwischen zwei verschiedenen Bahnen macht; das heißt wenn ein Übergang $r_n \to r_m$ stattfindet.

Quantitativ

1. Auf den zugelassenen Bahnen kann der Bahndrehimpuls L_n nur ganz bestimmte Werte haben:
$$L_n \stackrel{!}{=} n \cdot \frac{h}{2\pi} \qquad (n = 1, 2...)$$
wobei gilt (Kreisbahn):
$$L_n = m_e r_n v_n \stackrel{!}{=} n \cdot \frac{h}{2\pi} \tag{11.1}$$
Beziehung (11.1) wird als 1. Bohr'sches Postulat bezeichnet.
2. Wenn ein Elektron von einer zugelassenen Bahn r_n auf eine andere, r_m, übergeht, dann wird die Energiedifferenz $W_n - W_m$ in Form von elektromagnetischer Energie abgestrahlt:
$$W_n - W_m = h \cdot \nu \tag{11.2}$$
Beziehung (11.2) wird als 2. Bohr'sches Postulat bezeichnet.

Mit den beiden Postulaten kann man die Energiezustände, die das Elektron einnehmen kann, berechnen:

Berechnung der Energieniveaus

1. Schritt:

   Die möglichen Bahnradien und zugehörigen v_n- Werte erhält man

   (a) aus der Kräftegleichheit zwischen Zentripetalkraft und Coulombkraft:

   $$\frac{m_e v_n^2}{r_n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 - Q_2}{r_n^2}$$

   mit $Q_1 = -e$ und $Q_2 = +e$ beim H-Atom.

   (b) und aus dem 2. Bohr'schen Postulat:

   $$L_n n \cdot h \stackrel{!}{=} m_e r_n v_n$$

   Man erhält als Ergebnis:

   $$\begin{aligned} r_n &= \frac{n^2 \cdot \epsilon_0 h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \\ v_n &= \frac{e^2}{2\epsilon_0 \cdot n \cdot h} \end{aligned}$$

2. Schritt:

   Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus seiner kinetischen und potentiellen Energie zusammen:

   $$\begin{aligned} W_{tot} &= W_{kin} + W_{pot} \\ W_{kin} &= \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ W_{pot} &= -\int_{r_n}^{\infty} F(r) dr \end{aligned}$$

   Die potentielle Energie ist bis auf das Vorzeichen gleich der Arbeit, um m_e von der Bahn r_n gegen die Coulomb- Kraft

   $$F(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

   ins Unendliche zu bringen.

   So folgt:

   $$W_{pot} = -\frac{e^4 m_e}{4\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

und für die Totalenergie:

$$W_{tot} = W_n = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

Das (-) Zeichen gibt an, dass das Elektron mit dieser Energie im Kernfeld gebunden ist; das heißt, eine potentielle Arbeit derselben Größe wäre aufzuwenden, um das Elektron aus dem H- Atom auszulösen.

Diskussion

Das Bohr'sche Atommodell lässt die Berechnung der Rydbergkonstanten zu: Die Atomradien r_n sind in guter Näherung übereinstimmend mit solchen der kinetischen Gastheorie. Insbesondere der Bohr'sche Atomradius r_1:

$$r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} m$$

Dies ist der H- Atomradius für $n = 1$

11.2 Wechselwirkung von Atomen mit elektromagnetischer Strahlung

11.2.1 Quantisierung des Lichts

Einleitung

Bisher ist bekannt, dass die Energieaufnahme/ -abgabe durch Atome nur in Paketen der Größe

$$\Delta W = \hbar \cdot \omega$$

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ stattfindet.
Jetzt wird demonstriert, dass das elektromagnetische Wellenfeld (λ, ν) quantisiert ist: Soweit Energieaustausch mit Materie betroffen ist, liegt die Energie im elektromagnetischen Wellenfeld in Form von Lichtquanten der Größe $\hbar\omega$ vor.

Diesen Lichtquanten muss, neben ihrer Energie $\hbar\omega$, ein bestimmter Impuls und Drehimpuls, der Photonenspin, zugeordnet werden.

Der folgende Photoeffekt liefert einen sehr direkten Beleg für diese Lichtquanten-Vorstellung

Der Photoeffekt

Man betrachte die Lichtemission bei Lichteinstrahlung (UV) auf Materie:

Versuch: *Hallwachs- Versuch*

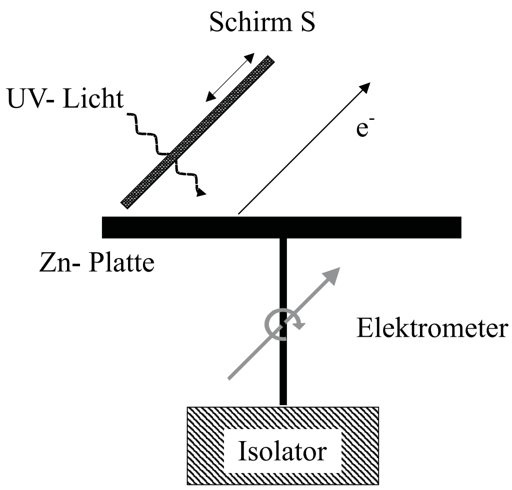


Abbildung 11.3: Aufbau des Hallwachs- Versuch

Die negativ aufgeladene Zn-Platte wird mit UV- Licht bestrahlt:

- Das Elektrometer entlädt sich.
- Die negativen Ladungen fließen ab.
- Sie müssen durch das UV- Licht aus der Platte abgelöst werden.

Keine Entladung tritt auf, wenn man

- den Schirm S einschiebt.
- die Zn-Platte positiv auflädt. Dann können die Elektronen die Platte nicht verlassen, da die Umgebung negativ ist.

Zunächst wurden nur qualitative Aussagen gemacht. Mit der Photozelle lässt sich der Sachverhalt nun auch qualitativ untersuchen:

Versuch: *Photozelle: Bestimmung von h*
Es wird der unten skizzierte Aufbau verwendet: Licht fällt auf die Anode und löst dort Elektronen aus. Gelangen einige zur Anode, so fließt ein Strom. Durch das Anlegen einer gegenpoligen Spannung kann der Stromfluss auf Null geregelt werden. Bei diesem Punkt (W_{kin}) gelangen selbst die schnellsten Elektronen eben *nicht* mehr zur Anode.
Gemessen wird die Abhängigkeit der kinetischen Energie der Elektronen W_{kin} von der Frequenz ν des einfallenden Lichtes:

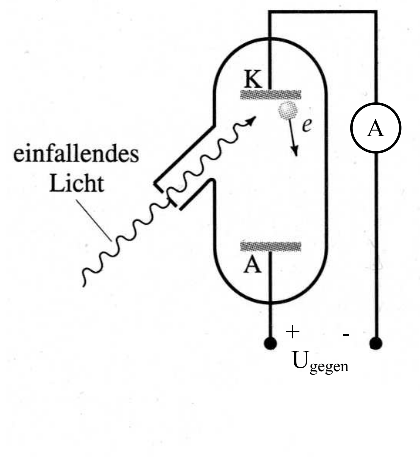


Abbildung 11.4: Photozelle

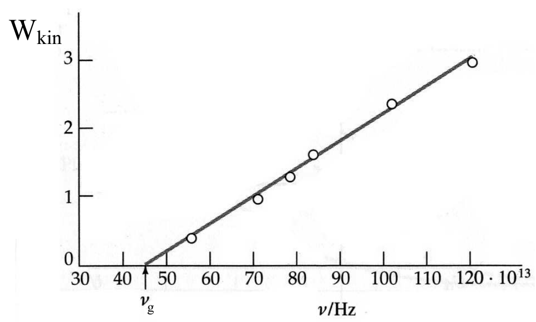


Abbildung 11.5: Diagramm W_{kin}^{max} gegen ν

Feststellungen:

- j_e ist proportional zur eingestrahlten Lichtintensität
- $W_{kin}(\nu)$ hängt linear von ν ab, ist aber unabhängig von der Lichtintensität.

- Unterhalb einer bestimmten Grenzfrequenz ν_g liegt keine Elektronenemission vor.

Erklärung des Photoeffekts:[1]

Die Elektronenablösung erfolgt in Einzelprozessen zwischen Photonen (Lichtquanten) der Energie

$$W = \hbar\omega$$

und Metallelektronen, deren Auslösearbeit

$$W_a$$

erfordert. Den Überschuss

$$h\nu - W_a$$

erhält das abgelößte Elektron als kinetische Energie W_{kin}, falls nicht ein Teil davon in Folgeprozessen (Stöße) verloren geht.
Die Energiebilanz für W_{kin}^{max}:

$$\begin{aligned} h \cdot \nu &= W_a + W_{kin} \\ W_{kin} &= h\nu - W_a \end{aligned}$$

So folgt:

Grenzfrequenz ν_g

$$\nu_g = \frac{W_a}{h}$$

Aus der Steigung der Geraden in Abb.11.5 kann h bestimmt werden.

Planck'sche Konstante

$$\begin{aligned} h &= 6,626 \cdot 10^{-34} Js \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34} Js \end{aligned}$$

[1] Einstein, 1905 Nobelpreis f. Physik

Photonen- Impuls

Der Strahlungsdruck der elektromagnetischen Welle auf eine Grenzfläche rührt vom Impuls der Photonen her.

Bereits gezeigt wurde, dass Masse und Energie äquivalent sind:

$$\begin{aligned} W &= mc^2 \\ \Rightarrow \qquad h\nu &= mc^2 \\ m &= \frac{h\nu}{c^2} \end{aligned}$$

Dies ist die Masse, die einem sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegenden Photon zugeordnet werden kann.
Sein Impuls folgt dann zu

$$\begin{aligned} p &= m \cdot c = \frac{h\nu}{c} \\ p &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

Folgend aus der Beziehung $\lambda \cdot \nu = c$ für elektromagnetische Strahlung.

Alternative Herleitung: Im Kapitel 10.2.3 wurde die Beziehung zwischen dem transportierten Impuls und der durch die Welle transportierten Energie W_E für elastische Wellen hergeleitet:

$$p = \frac{W_E}{v_\varphi}$$

Mit $W_E = h\nu$ und $v_\varphi = c$ ergibt sich wieder

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Der Compton- Effekt

Die Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Strahlung zeigen sich noch deutlicher beim Stoß von Photonen auf einzelne, praktisch freie (ungebundene) Elektronen.
Dabei gelten die Sätze der Energie- und Impulserhaltung beim Stoß zwischen zwei Teilchen.

Versuch: *Compton- Streuung*

Bei diesem Versuch wird die Streuung von monochromatischer Röntgen- Strahlung $\underline{\underline{\nu}}$ an Graphit untersucht.

Befund:
Neben der Streustrahlung mit unverändertem $\underline{\underline{\nu}}$ wird ein weiterer Anteil mit niedriger Frequenz $\underline{\underline{\nu}}$‘ im Winkel ζ beobachtet. Auch Elektronen werden ausgelöst und entfernen sich im Winkel γ. Durch die Streuung verändert sich also

die Wellenlänge eines Teils der reflektierten Strahlung um $\Delta\lambda$. Diese Werte für $\Delta\lambda$ lassen sich erklären, wenn man annimmt, das Röntgenquanten an einzelnen Elektronen inelastisch gestreut werden (Energie-/ Impulserhaltung).

Für Energie und Impuls der Röntgenquanten ist

$$\begin{aligned} W &= h \cdot \nu \\ p &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

zu verwenden.

Nach Energiesatz:

$$\begin{aligned} h\nu &= W_{kin} + h\nu' \\ h\nu &= (m(v) - m_0)\, c^2 + h\nu' \end{aligned}$$

Nach Impulssatz:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= m \cdot v \cdot \cos\gamma + \frac{h\nu'}{c} \cos\zeta \\ 0 &= -m \cdot v \cdot \sin\gamma + \frac{h\nu'}{c} \sin\zeta \end{aligned}$$

Das Ergebnis beider obiger Beziehungen ist

$$\underbrace{(\lambda' - \lambda)}_{\Delta\lambda} = \frac{h}{m_0 c} \cdot (1 - \cos\zeta)$$

Definition 11.2: COMPTON- WELLENLÄNGE

Der Quotient

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

heißt COMPTON- *Wellenlänge.*

Photonendrehimpuls

Zirkular polarisiertes Licht ist immer mit einem Drehimpulstransport verknüpft: Er kann bei der Absorbtion des Lichtes durch eine schwarze Scheibe über die Drehimpulserhaltung nachgewiesen werden, wenn die Scheibe drehbar aufgehängt ist. Die Scheibe übernimmt dann den Drehimpuls des absorbierten Lichtes.

Der Photonendrehimpuls (Spin) ist

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

und bei

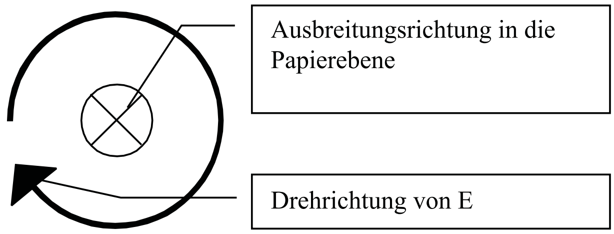


Abbildung 11.6: Photonenspin (rechts pol. Licht)

- rechts zirkular polarisiertem Licht parallel zur Ausbreitungsrichtung gerichtet (Abb 11.6).
- links zirkular polarisiertem Licht entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung gerichtet (Abb 11.7).

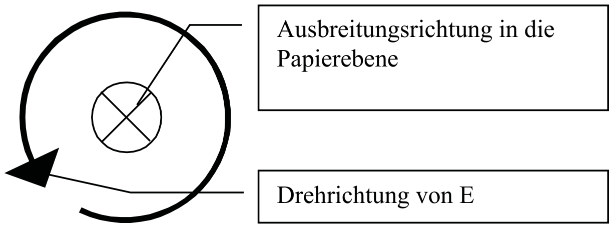


Abbildung 11.7: Photonenspin (links pol. Licht)

- linear polarisiertem Licht unorientiert. Das Licht enthält gleich viele Photonen beider Spinrichtungen.

11.2.2 Prozesse bei der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie

Atome im eizelnen elektromagnetischen Wellenfeld

Genauer: Untersucht werden Atome im Feld einer stehenden elektromagnetischen Welle, wie sie sich in einem optischen Resonator (z.B. zwischen zwei Spiegeln) abgebildet haben mögen. Dabei sind für die Anwendung zwei Fälle wichtig:

1. Gleichgewicht zwischen elektromagnetischer Strahlung und den Atomen im Wellenfeld:

   Dies ist die Situation des Hohlraumstrahlers (schwarzer Körper) - Im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung.

2. Atome im Feld eines Lasers: Es besteht kein Gleichgewicht mit der Umgebung.

Bestrahlt werden Atome, bei denen zwei Energieniveaus $W_1(N_1)$ und $W_2(N_2)$ für die Wechselwirkung mit dem Wellenfeld von Bedeutung sind. Es gilt:

$$(W_1 - W_2) = h\nu$$

Die Photonen des Wellenfeldes können vom elektromagnetischen Wellenfeld absorbiert beziehungsweise emittiert werden. Die Charakterisierung des Wellenfeldes erfolgt durch

1. Die Frequenz ν
2. und die Energiedichte $\varrho(\nu)$.

Die Besetzung der Zustände N_1 und N_2 kann sich durch die Wechselwirkung des Wellenfeldes mit den Atomen ändern:

Wechselwirkungsprozesse zwischen Strahlungsfeld und Atomen

Betreffend die

- Absorbtion
- Spontane Emission ohne Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld
- induzierte (stimulierte) Emission unter dem Einfluss eines Strahlungsfeldes

Vorgehensweise: Betrachtung der Bilanz der drei obigen Prozesse. Berechnung der Raten für die Übergänge (Emission/Absorbtion). Es müssen im thermischen Gleichgewicht gleich viele Absorbtions-/ Emissionsprozesse stattfinden.

Absorbtion

Die Zahl der Übergänge per Zeit, $\frac{dN_1}{dt}$, vom Zustand W_1 in den Zustand W_2, ist:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &\sim \varrho(\nu) \\ &\sim N_1(t)\end{aligned}$$

Das heißt, die Absorbtionsrate $\frac{dN_1}{dt}$ ist proportional zur Energiedichte $\varrho(\nu)$ des elektromagnetischen Feldes sowie zur momentanen Besetzung von W_1, $N_1(t)$.

Man setzt fest:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}N_1 \cdot \varrho(\nu)$$

Definition 11.3: EINSTEIN- KOEFFIZIENT FÜR ABSORBTION

Der Proportionalitätsfaktor

$$B_{12}$$

heißt EINSTEIN- *Koeffizient für Absorbtion.*

Induzierte Absorbtion

Durch ein Photon $h\nu$ kann ein Übergang von W_1 nach W_2 ausgelöst werden. Dabei wird ein Photon der Energie $h\nu = W_2 - W_1$ frei.

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} \cdot N_2(t) \cdot \varrho(\nu)$$

Definition 11.4: EINSTEIN- KOEFFIZIENT FÜR INDUZIERTE EMISSION

Der Proportionalitätsfaktor

$$B_{21}$$

heißt EINSTEIN- *Koeffizient für induzierte (stimmulierte) Emission.*

Diskussion

- Die induzierte Emission und Absorbtion sind Umkehrprozesse. So setzen wir $B_{12} = B_{21}$. Absorbtion und induzierte Emission finden mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt.

- Das zusätzliche Photon wird in dieselbe Richtung wie das angeregte Photon emittiert: Die einfallende Lichtwelle polarisiert die angeregten Atome und regt sie zu erzwungenen Schwingungen an. Jeder atomare Dipol emittiert in Phase bevorzugt in Richtung der angeregten Welle.

  $\Rightarrow$ Der Beitrag zum Strahlungsfeld $\varrho(\nu)$ ist kohärent.

Spontane Emission

Wird ein Atom durch Energiezufuhr in den Zustand W_2 gebracht, so geht es im Mittel nach einer bestimmten mittleren Zeit τ wieder in den Zustand W_1 über (auch ohne das Vorhandensein eines elektromagnetischen Feldes).

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} \cdot N_2(t)$$

Definition 11.5: EINSTEIN- KOEFFIZIENT FÜR SPONTANE EMISSION

Der Proportionalitätsfaktor

$$A_{21}$$

heißt EINSTEIN- *Koeffizient für spontane Emission. Er ist gleich dem Kehrwert der Zeit τ:*

$$A_{21} = \frac{1}{\tau}$$

11.2.3 Thermisches Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie: Die Planck‘sche Strahlungsformel

Zeitlich gemittelt finden gleich viele Übergänge

$$\begin{array}{lll} 1 \Rightarrow 2 & \text{(Absorbtion)} & \text{wie} \\ 2 \Rightarrow 1 & \text{(Emission)} & \text{statt} \end{array}$$

Gleichsetzen liefert:

$$\overbrace{B_{12} \cdot N_1 \varrho(\nu)}^{\text{Absorbtion}} = \overbrace{B_{21} N_2 \varrho(\nu) + A_{21} \cdot N_2}^{\text{Emission}}$$

Aus $B_{12} = B_{21} = B$ folgt:

$$\begin{aligned} B(N_1 - N_2)\varrho(\nu) &= A_{21} \cdot N_2 \\ \varrho(\nu) &= \frac{\frac{A_{21}}{B}}{\frac{N_1}{N_2} - 1} \end{aligned}$$

Im thermischen Gleichgewicht bei T ist

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \end{aligned}$$

und

$$\varrho(\nu) = \frac{A_{21}}{B} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{11.3}$$

Die Gleichung (11.3) hat bereits die Bauweise der Planck‘schen Formel.
Das Verhältnis $\frac{A_{21}}{B}$ erhält man aus dem Grenzfall für $\varrho(\nu)$ bei sehr kleinen ν-Werten:

Dazu wird der Term

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1$$

für den Fall $h\nu \ll kT$ entwickelt:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \simeq \frac{h\nu}{kT}$$

So folgt:

$$\varrho(\nu) = \frac{A_{21}}{B} \cdot \frac{kT}{h\nu} \qquad \text{für } h\nu \ll kT$$

Die Energiedichte ist aber gegeben durch die Zahl $n(\nu)$ der stehenden Wellen, *Moden*, im Hohlraum multipliziert mit der Energie kT, die im Mittel auf eine Mode entfällt: $\varrho(\nu) = n(\nu) \cdot kT$.
Es gilt (Ohne Beweis):

$$n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Nach einsetzen:

$$\begin{aligned} \varrho(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot kT \qquad (\textsc{Rayleigh-Jeans}\text{-Gesetz}) \\ \text{und} \qquad \frac{A_{21}}{B} &= \frac{8\pi hnu^3}{c^3} \end{aligned}$$

Für die Energiedichte $\varrho(\nu)$ ergibt sich aus dem Vergleich zwischen der für alle ν gültigen Formel für $\varrho(\nu)$ und jener für kleine ν, dem Rayleigh-Jeans-Gesetz, die Plack' sche Formel für die Energiedichte eines Hohlraums zu

$$\varrho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT} - 1\right)}$$

Aus dieser Form erhält man über die Beziehung zwischen Energiedichte und Energie- Stromarbeit das bereits bekannte Ergebnis für die abgestrahlte Leistung: Die Energie mit der Dichte $\varrho(\nu)$ wandert mit c zur Wand; dort trifft die Leistung

$$dP = c \cdot \varrho(\nu) d\nu$$

auf.

Das Verhältnis

$$\frac{A_2 1}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

zeigt an, dass die Wahrscheinlichkeit für eine spontane Emission, relativ zu jener für die induzierte Emission, proprtional zu ν^3 ansteigt.
Dies bedeutet, dass es immer schwieriger sein wird, eine Verstärkung des elektromagnetischen Wellenfeldes zu erreichen, wenn ν ansteigt.
Dies ist von wesentlicher Bedeutung bei der Implementisierung von Lasern für die diversen Frequenzbereiche.

11.2.4 Laser

Definition 11.6: Laser

> ***L****ight* ***A****mplification by* ***S****timulated* ***E****mission of* ***R****adiation*
>
> *Ein Laser ist eine Lichtquelle für kohärentes Licht. Alle Atome strahlen in Phase.*

Prinzip eines Lasers

Bekannt ist bereits, dass Absorbtion und stimulierte Emission gleich wahrscheinlich sind.

Eine Verstärkung eines elektromagnetischen Feldes erreicht man, wenn die Anzahl N_2 der Atome im Zustand W_2 größer als die Anzahl N_1 der Atome im Zustand W_1 ist (Besetzungsinversion).
Dann erfolgt eine kohärente Verstärkung des elektromagnetischen Feldes: Der Beitrag der stimulierten Emission zum Strahlungsfeld ist in Phase mit dem bereits vorhandenen Strahlungsfeld. Dieses wird also im Falle der Besetzungsinversion verstärkt.

Eine Besetzungsinversion ($N_2 > N_1$) liegt im thermischen Gleichgewicht nicht vor. Sie erfordert die Störung des Gleichgewichts durch gezielte Überbesetzung von Zustand W_2 durch Elektronenanregung.

Prinzipieller Aufbau des Lasers

Alle Laser bestehen aus drei Komponenten:

Lasermedium: Laseraktives Material, in dem die Lichtverstärkung stattfindet.

Pumpquelle: Energielieferant: Energie wird an das Lasermedium geliefert.

Rückkopplungs- Mechanismus: Dieser dient der Erhöhung der Verweildauer des Laserlichts im Lasermedium. (Im einfachsten Fall: Zwei Spiegel S_1, S_2 senkrecht zur Laserachse.)

Energieniveauschema des Lasermediums

Das Lasermedium muss mindestens drei, besser vier Energieniveaus haben, damit durch optisches Pumpen eine Besetzungsinversion zwischen dem oberen/ unteren Laserniveau (W_2, W_1) erzeugt werden kann.

<u>Das 4- Niveau- System:</u>
Der Vorteil des Schemas, wie in Abb. 11.8 dargestellt, liegt darin, dass auch das untere Laser- Niveau praktisch leer ist. Dadurch lässt sich viel leichter die Besetzungsinversion zwischen E_2 und E_1 erhalten.

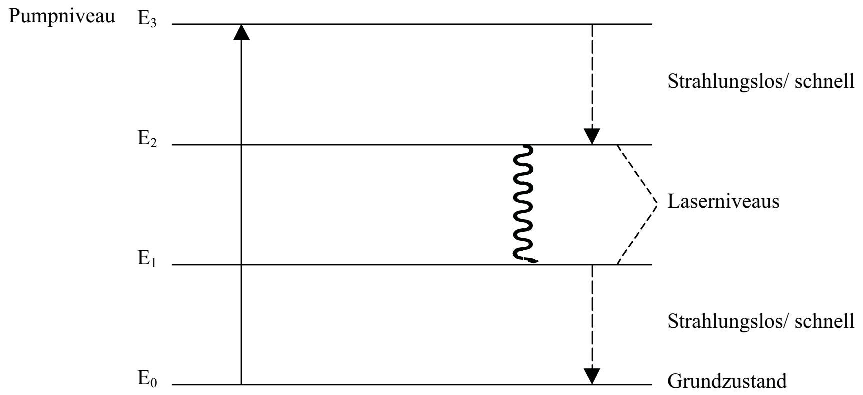


Abbildung 11.8: 4- Niveau- System des Lasers

Wirkungsweise des Lasers

1. Schritt:

   Es erfolgt spontane Emission (in alle Richtungen).

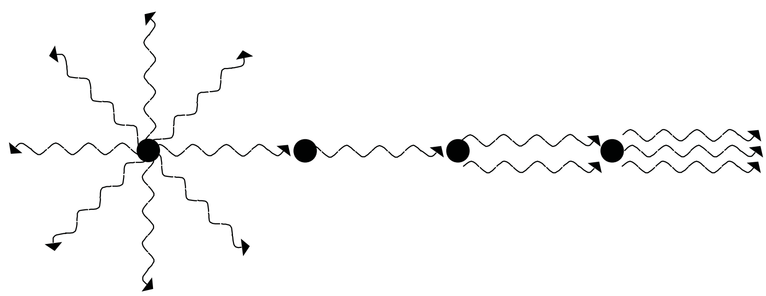


Abbildung 11.9: Spontane Emission mit induzierten Übergängen

   Die emittierten Photonen induzieren Übergänge in weiteren angeregten Atomen.

2. Schritt:

   Sei das Lasermedium ein langer Zylinder:

   Dann erfolgen längs der Zylinderachse wesentlich mehr induzierte Übergänge als senkrecht dazu.

   $\Rightarrow$ So entsteht ein lawinenartiges Anwachsen der Strahlung in Achsenrichtung. Dadurch wird die Inversion jedoch auch sehr schnell abgebrannt.

Erzeugt wurde ein kurzer Lichtimpuls in Richtung der Zylinderachse.

3. Schritt:

   Man bringt das Lasermedium in die Rückkopplungsanordnung: Dadurch wird die Aufenthaltsdauer der Photonen im Medium wesentlich erhöht (verhundertfacht).

   Dazu lässt man zwischen den Spiegeln eine stehende Welle entstehen, deren Intensität anwächst. Der Spiegelabstand muss ein Vielfachse der halben Lichtwellenlänge sein.

   So lässt sich die Wahrscheinlichkeit für induzierte Emission wesentlich erhöhen.

Zusammenfassung zum Laserprinzip

Die Grundkomponenten:

- Präparation angereger Atome (Pump- Mechanismus)
- Auslösen einer Photonen- Lawine über induzierte Emisssion
- Aufrechterhalten eines intensiven stehenden Lichtfeldes (Rückkopplungsmechanismus)
- Aufrechterhalten eines stationären Laserfeldes

Der Vergleich zur Gasentladung:

induzierte Emission	$\leftrightarrow$	Stoßprozesse
Pumpmechanismus	$\leftrightarrow$	Heizkathode
Laseraktives Medium	$\leftrightarrow$	Ionisierungsenergien; Atomare Strukturen

Lasertypen - Der He/Ne- Gaslaser

<u>Aufbau:</u>

- Lasermedium:
  He/Ne- Gasgemisch, in dem eine Glimmentladung brennt ($U \sim 1keV$; $I \sim 10mA$)
- Pumpquelle:
  Stöße energiereicher Elektronen mit He- Atomen, verbunden mit der Anregung metastabiler Zustände des He
- Rückkopplungsmechanismus:
  2 konkave Spiegel

Das Entladungsrohr ist mit zwei Fenstern abgeschlossen, die unter dem BREWSTER-Winkel angesetzt sind.
Dadurch wird Licht mit dem $\overrightarrow{E}$-Vektor in Bildebene ungehindert durchgelassen.
Licht mit dem $\overrightarrow{E}$-Vektor senkrecht dazu wird aus dem Resonator herausgefiltert.
$\Rightarrow$ Laser liefert linear polarisiertes Licht

Funktionsprinzip:

Durch e^-- Stöße werden He- Atome in metastabile Zustände 2^1s ; 2^3s angeregt.
Die Energie kann nun nur durch Stöße mit Ne- Atomen abgegeben werden:

- Die Stöße $(He^* + Ne)$ besetzen die oberen Laser- Niveaus $5s$ und $4s$.
- Die Laserübergänge sind:

$$\begin{array}{lcl} 5s \rightarrow 3p & : & 6328\mathring{A} \\ 4s \rightarrow 3p & : & 1,15\mu m \end{array}$$

- Das untere Laserniveau $3p$ wird schnell durch spontane Emission in das $1s$- Niveau entleert.
- Die Besetzung des $1s$- Zustandes wird durch Wandstöße abgebaut.
- Wichtig: Der Durchmesser des Entladungsrohrs darf nicht zu groß sein: $\o = 1...4mm$

Lasereigenschaften:

- Der Wirkungsgrad liegt bei $\eta \sim 0,1\%$
- Die Ausgangsleistung: $W \sim 1mW$
- gute Kohärenz- Eigenschaften
- gute Strahlqualität

Resonanz und Eigenschwingung im Resonator

Betrachtet wird ein Laser mit transversalem Intensitätsprofil.

- Die Eigenschwingungen zwischen den gekrümmten Spiegeln sind keine ebenen Wellen. Sie sind schmale Lichtbündel, die im Fokus eine Taille von $0,1...1mm$ besitzen und als leicht divergentes Bündel $(\Delta\alpha)$ durch den semi- transparenten Spiegel austreten.
- Entlang der Laserachse existieren Intensitäts- Knoten und Bäuche.

- In der transversalen Grundschwingung gibt es in transversaler Richtung keine Knoten/ Bäuche: Die Intensität fällt als Funktion von α, dem Winkel zur Laserachse, nach einer Gaußfunktion der Form

$$\begin{aligned} I(\alpha) &\sim \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2}\right) \\ \text{mit} \qquad \Delta\alpha &\approx \frac{\lambda}{d} \end{aligned}$$

Diskussion:

- Ein solches Gauß'sches Lichtbündel stellt das physikalisch mögliche Optimum der Kollineation[2] einer Welle dar.
- Zwar ist der Öffnungswinkel wie jener bei der Spaltbeugung; jedoch ist der Intensitätsabfall zum Rande hin viel schärfer als bei den Beugungsmaxima hinter dem Spalt (Dort nur quadratische Abnahme mit Zunahme des Winkels).
- Typischer Öffnungswinkel eines Laserstrahles:

$$\frac{\lambda}{d} = \Delta \simeq \frac{0,5 \cdot 10^{-6} m}{0,5 mm} \approx 10^{-3} = 1m\text{rad}$$

Anwendung: Vorteile von Lasern

- Die Leistungsdichte:
  - Wert um $\sim 10^{15} W cm^{-2}$
  - ermöglicht Materialbearbeitung (Schneiden, Bohren, Härten)
  - ermöglicht Fusionsexperimente
- Hohe Kohärenz ermöglicht
  - Holographie (3D- Bilderzeugung)
  - Interferometrie (Beugung am Spalt/ Gitter)
- Gute Bündelung; kleine Strahldivergenz wird ausgenutzt
  - bei der Entfernungsmessung (Satellitenvermessung)
  - bei der Vermessung beim Tunnelbau
  - in der Unterhaltungselektronik (CD's, Laserdrucker). Zum Abtasten von CD's werden allerdings Leuchtdioden, die zur Lasertätigkeit gebracht wurden, als Massenware eingesetzt.

[2] kollineare Abbildung zweier geometrischer Figuren aufeinander

Grenzdaten von Lasern

- Monochromasie: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 10^{12}$
- Pulsdauer: $\tau \sim 10^{-14}s$
- Leistung: $P \sim 10^{12}W$
  Dies entspricht der Leistung von 10^3 großen Kraftwerken. P steht jedoch nur für ca. 10^-9sec zur Verfügung.
- Bei optischen Versuchen mit dem He/Ne- Laser in der Vorlesung:
  - $P \approx 30mW$ im Gleichstrombetrieb
  - $\lambda = 633nm$

Versuch: *Beugungsversuch mit Laser*
Man bestrahle eine Spalt mit Breite b mit dem Laser.

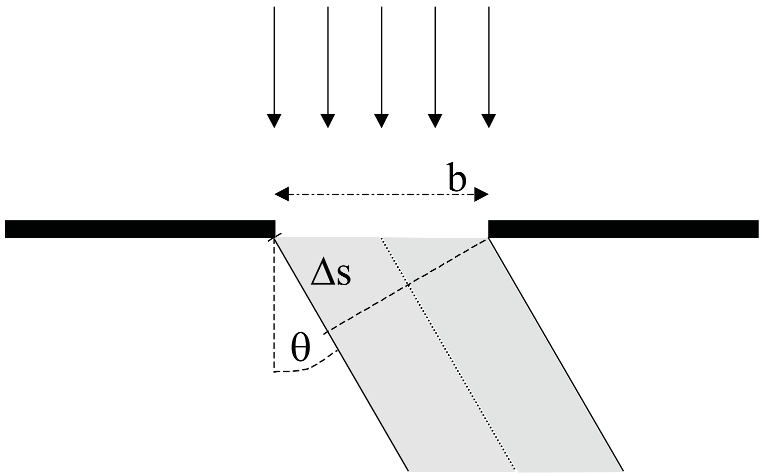


Abbildung 11.10: Laserversuch zur Beugung

Für $\Delta s = b \cdot \sin\Theta_1 = \lambda$ gibt es in beiden Teilbündeln Paare von Strahlen, die sich gegenseitig auslöschen.
$\Rightarrow$ 1. Minima der Intensitätsverteilung $I(\Theta)$ bei $\Theta = \Theta_1$

Beim Gitter:
Die Intensitätsverteilung ist durch zwei Faktoren bestimmt:

1. Die Interferenz zwischen den Teilbündeln verschiedener Spalte: Maxima liegen dann vor, wenn eine konstruktive Überlagerung aller Teilbündel vorliegt.
2. Die Beugung an jedem Spalt verursacht eine Intensitätsmodulation der Interferenzstruktur.

Kapitel 12

Geometrische Optik

12.1 Einleitung

Für viele Anwendungen ist die Wellennatur des Lichts von untergeordneter Bedeutung:
Es kommt hauptsächlich auf die Ausbreitungsrichtung des Lichts und auf deren Änderung durch abbildende Elemente (Linsen, Spiegel, etc.) an.

Zur Ausbreitungsrichtung:
Die Ausbreitungsrichtung ist durch die Normale auf die Phasenfläche gegeben:

Definition 12.1: LICHTSTRAHL

> *Die Normalen auf die Phasenflächen der (Licht)Welle heißen Lichtstrahlen.*

Definition 12.2: LICHTBÜNDEL

> *Begrenzt man eine Welle durch Blenden, Linsenränder etc., so nennt man den so ausgeschnittenen Teil der Welle Lichtbündel.*
> *Ein Lichtbündel ist die Gesamtheit der Lichtstrahlen, welche den Bündelquerschnitt ausfüllen.*

Man halte fest: Die Beschreibung einer räumlich begrenzten fortschreitenden Welle ist eine **Näherung**. Die Idealisierung steht im Konflikt mit der Wellennatur des Lichts.

Ein Beispiel:

In Abb. 12.1 versucht man eine möglichst weitgehende Einschnürung eines Lichtbündels durch Blende B vorzunehmen.
Unterschreitet nun aber die Blendenöffnung d einen Wert von ca. $1mm$ ø, so tritt schon nach dem Schirmabstand $b \sim 1m$ eine deutliche Aufweitung des Strahls auf. Der Grund: Beugung der Welle an der Öffnung der Blende B.

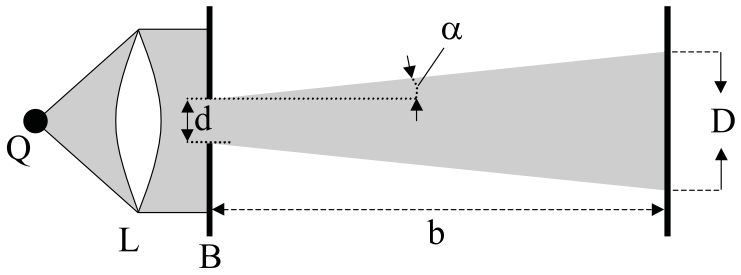


Abbildung 12.1: Beugung an Blendenöffnung

Als Maß für den Öffnungswinkel des Bündels, α, nehmen wir den Winkel, unter dem bei einer Spaltblende das 1. Minimum erscheinen würde. Unter der guten Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ für kleine Winkel gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{\lambda}{d} \\ \lambda &: \text{Wellenlänge des Lichts} \\ d &: \text{Blendenöffnung} \end{aligned}$$

Das Problem:

- Ist die Öffnung d der Blende B weit genug geöffnet, so erreicht man einen gut parallelen Strahl, jedoch ist dann der Lichtbündeldurchmesser D ebenfalls groß.
- Ist die Öffnung d klein, so wird D durch die Beugung bestimmt, und ist somit wieder (relativ zu d) groß.

Will man bestimmen, wann D minimal wird, so wird D zunächst durch d, α, b ausgedrückt:

$$\begin{aligned} D &\approx d + 2\alpha \cdot b \\ &\approx d + \frac{2\lambda}{d} \cdot b \end{aligned}$$

Man bilde nun

$$\frac{\partial D}{\partial d} \stackrel{!}{=} 0$$

und erhält:

$$\begin{aligned} d_{min} &\approx \sqrt{2\lambda b} \\ D_{min} &\approx 2 d_{min} \end{aligned}$$

So steht fest: Das Auflösungsvermögen optischer Instrumente ist begrenzt durch Beugung.
Je kleiner λ ist, desto besser gilt die Idealisierung der geometrischen Optik; die Beschreibung der Welle durch Lichtstrahlen (Strahlenoptik).

Das Näherungsmodell der geometrischen Optik (Verwendung von Lichtbündeln) hat viele Vorteile: Die Untersuchung des Verhaltens einer wirklichen Welle in optischen Anordnungen mit vielen im Allgemeinen gekrümmten Grenzflächen zwischen Medien unterschiedlicher Brechzahlen ist kompliziert. Die geometrische Optik erlaubt eine einfachere Behandlung.

Grundtatsachen geometrischer Optik

1. In einem homogenen Medium breitet sich das Licht geradlinig aus.
2. Für Lichtstrahlen gilt das Superpositionsprinzip: Sie überlagern sich ungestört. Die Interferenz wird vernachlässigt.
3. Der Weg eines Lichtstrahls ist umkehrbar. Mit
$$f(\omega t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r})$$
ist auch
$$f(\omega t + \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r})$$
Lösung der Wellengleichung.
4. An der Grenzfläche zwischen zwei Medien werden Lichtstrahlen nach dem Reflexionsgesetz reflektiert (siehe Kap. 10.2.5) und gemäß dem Snellius‘ schen Brechungsgesetz gebrochen.

Diese vier Grundtatsachen kann man allgemeiner durch das Fermat‘ sche Prinzip formulieren:

Fermat- Prinzip

Ein Lichtstrahl wählt den kürzesten optischen Weg (im Vergleich zu benachbarten Wegen).

Erklärung:

Sei s der geometrische Weg von der Quelle zum Empfänger. Dann ist der optische Weg s‘ im Medium mit der Brechzahl n definiert als:

$$s‘ \quad = \quad n \cdot s$$

oder

$$
\begin{aligned}
s' &= \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot s = \frac{\lambda_0 \cdot s}{\lambda} = m \cdot \lambda_0 \\
\text{mit} \qquad m &= \frac{s}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Die Anzahl an Wellenzügen, m, ist minimal und damit auch die Laufzeit von Quelle bis Empfänger.

Als Beispiel betrachten wir Abb. 12.2. Dort sind drei verschiedene optische Minimalwege (1-3) zwischen Quelle Q und Empfänger E eingezeichnet. Zum Vergleich dazu noch Nachbarwege (gestrichelt):

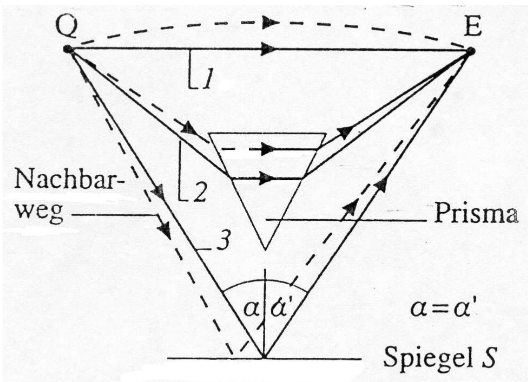


Abbildung 12.2: Prisma mit Optimal- und Nachbarwegen

1. Verbindungsgerade $\overline{QE}$
2. Ein im Prisma gebrochener Strahl
3. Ein am Spiegel S reflektierter Strahl

Zu 1. und 3.: Optischer und geometrischer Weg sind identisch.
Zu 2.: Die Laufstrecke im Prisma ($n > 1$) darf nicht zu groß sein. Die Minimierung der Summe der Teilwege liefert die durchgezogene Gerade.

$\Rightarrow$ Reflexions- und Brechungsgesetz sind Spezialfälle des FERMAT- Prinzips

Brechung elektromagnetischer Wellen

Allgemein ist bekannt:

$$
\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c_1}{c_2}
$$

wobei c_1 und c_2 hier die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichts in den beiden Medien sind.

Definition 12.3: BRECHZAHL n

> *Die Brechzahl n des Mediums i ist definiert als*
>
> $$n = \frac{c_0}{c_i}$$
>
> *mit c_0 als Vakuum- Lichtgeschwindigkeit.*

Allgemein gilt[1]:

$$c_i = (\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_i \mu_i)^{-\frac{1}{2}}$$

Von oben folgt:

$$\begin{aligned} n &= \frac{c_0}{c_i} = (\epsilon_i \mu_i)^{\frac{1}{2}} \\ n &\approx \sqrt{\epsilon_i} \end{aligned}$$

Versuch: *Brechung am Prisma*

Man betrachte einen Prismaquerschnitt (Dreieck). Der Topwinkel im Dreieck sei γ. Das Licht fällt senkrecht ein und wird um den Winkel ϱ abgelenkt.

Dann gilt für kleine γ:

$$\begin{aligned} \varrho &\approx \gamma(n-1) \\ \varrho &\propto (n-1) \end{aligned}$$

Das heißt, ϱ steigt mit der Brechzahl n an.

Bemerkung: Normalerweise nimmt $n(\lambda)$ als Funktion von λ ab, das heißt, kurzwelliges Licht wird stärker gebrochen (Dispersion).

[1] In dieser Reihenfolge: Influenzkonstante, magnetische Feldkonstante, Dielektrizitätszahl, Permeabilitätszahl

12.2 Optische Abbildungen

Grundversuche zu optischen Abbildungen durch Linsen:
Ein paralleles Lichtbündel fällt auf eine plan-konvexe Linse. Dies verursacht eine Sammlung aller Parallel- Strahlen in einem Punkt im Abstand f von der Linse (Brennweite).

Definition 12.4: OPTISCHE ACHSE

> *Die Symmetrieachse der Linse heißt optische Achse. Ihr Schnittpunkt mit der Brennebene heißt Brennpunkt.*

Auch beim Verkippen der Linse bleibt der Bildpunkt in der Brennebene (bei kleinen Winkeln).

Wird hingegen eine plan- konkave Linse verwendet, so divergiert das Lichtbündel hinter der Linse so, als käme es von einer punktförmigen Lichtquelle in der objektseitigen Brennebene im Abstand f von der Linse (virtueller Brennpunkt).

Ursache der fokussierenden Wirkung von Linsen:
Ausschlaggebend ist die Richtung des Lots auf die gekrümmte brechende Fläche der Linse: Die Neigung zur optischen Achse wächst mit zunehmendem Abstand von der optischen Achse. Das heißt: Der Ablenkungswinkel ändert sich als Funktion des Abstandes zur Linsenmitte.

Versuch: *Demonstration der Linsenwirkung*

Eine Sammellinse fokussiert auch divergentes Licht, welches von Objektpunkten ausgeht, deren Abstand g von der Linse $g > f$ ist.
Die Fokussierung erfolgt in einem Abstand b auf der anderen Seite von der Linse.
$\Rightarrow$ Da jedem Gegenstandspunkt ein Bildpunkt zugeordnet ist, erzeugt die Linse von einem Objekt ein Bild.

Das Linsengesetz

In einem Versuch messe man die

- Bildwerte als Funktion der Gegenstandsweite.
- Bildgröße als Funktion der Gegenstandsweite

Das Ergebnis:

Linsengesetz

$$\begin{aligned}\frac{1}{g}+\frac{1}{b} &= konstant = \frac{1}{f}\\ \frac{B}{G} &= \frac{b}{g} = V\end{aligned}$$

Dabei ist:

f: Brennweite

g: Gegenstandsweite

b: Bildweite

B: Bildgröße

G: Gegenstandsgröße

V: lateraler Vergrößerungsmaßstab

Ableitung des Linsengesetztes
Das Linsengesetz muss aus dem Snellius‘ schen Brechungsgesetz folgen. Dies ergibt sich unter folgenden Indealisierungen:

- Dünne Linsen: Die Linsen sind im Vergleich zum Linsendurchmesser dünn.
- Das Lichtbündel darf nur einen kleinen Öffnungswinkel haben.
- Das Lichtbündel muss achsennah sein, das heißt, es darf auch nur einen kleinen Winkel mit der optischen Achse einschließen.

Sind obige Forderungen erfüllt, sind folgende Näherungen zulässig:
Im Brechungsgesetz:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + ... \approx \varphi$$

Bei trigonometrischen Beziehungen

$$\tan\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{2} + ... \approx \varphi$$

verwenden. Man vernachlässigt dann Fehler in 3. Ordnung von φ. Dies äußert sich dann im Abbildungsfehler von Linsen.
Gemäß Abb. 12.3 gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varrho}{\sin\gamma} = n = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varrho}{\gamma}$$

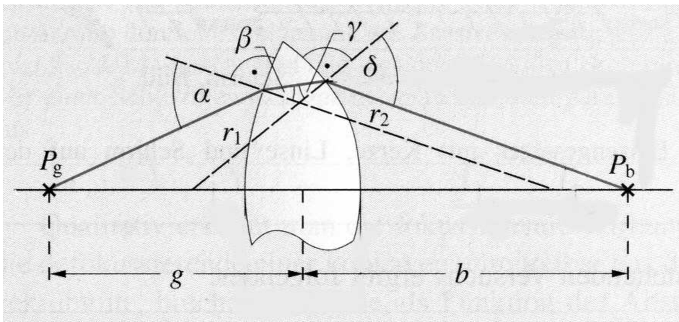


Abbildung 12.3: Zur Ableitung des Linsengesetzes

Zwischen den in Abb. 12.3 gesetzten Winkeln gibt es Beziehungen, die durch die Dreieckslehre gegeben sind.
Das Ergebnis ist:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad = \quad (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$$

Dies gilt für alle Strahlen, die von P_g ausgehen und die Forderungen erfüllen.

Gauß'sche Abbildung

⇒ Gibt es prinzipiell auch andere Abbildungsgesetzte als das Linsengesetz?

⇒ Antwort: Nach Gauß ist das Linsengesetz die einzige Möglichkeit, die eine eineindeutige Abbildung jedes Punktes aus dem Gegenstandsraum in den Bildraum vornimmt.

Linsenfehler sphärischer Linsen

Die Ursache der Abbildungsfehler:
Achsenferne Strahlen und größere Neigungswinkel zur optischen Achse führen zu Linsenfehlern. Allerdings ist daran nicht die Linse *schuld*, sondern deren Konstruktion.

Wichtige Linsenfehler:

- Sphärische Aberration:

  Der Brechungswinkel müsste bei einem Parallelstrahlbund proportional zum Abstand von der optischen Achse anwachsen, damit alle Teilstrahlen des Bündels im Brennpunkt fokussiert werden.

  Tatsächlich aber wächst die Ablenkung stärker als proportional an (Grund: sin- Funktion im Brechungsgesetz). So haben die Randstrahlen eine kleinere Brennweite.

Abhilfe:

- asphärischer Linsenschliff
- nach außen abfallende Brechzahl $n(r)$
- mehrlinsige Objekte, kombiniert aus Sammel- und Zerstreuungslinsen

- Chromatische Abberation:

  Aufgrund der λ- Abhängigkeit von $n(\lambda)$ (Dispersion) wird rotes Licht schwächer als blaues Licht gebrochen. Die Brennweite wächst mit der Wellenlänge.

  Abhilfe:

  - Kombination aus Sammel- und Zerstreuungslinsen, bei der die Dispersion der Sammellinsen durch jene der Zerstreuungslinse aufgehoben wird.

- Astigmatismus:

  Bei schrägem Auffall liegt in den Auftreffpunkten, die auf unterschiedlicher Höhe senkrecht zur optischen Achse stehen (M_1, M_2), eine unterschiedliche Krümmung der Linse vor. Dies verursacht eine

  - unterschiedliche Fokussierung in den verschiedenen Richtungen
  - elliptische Verzeichnung des Bildes

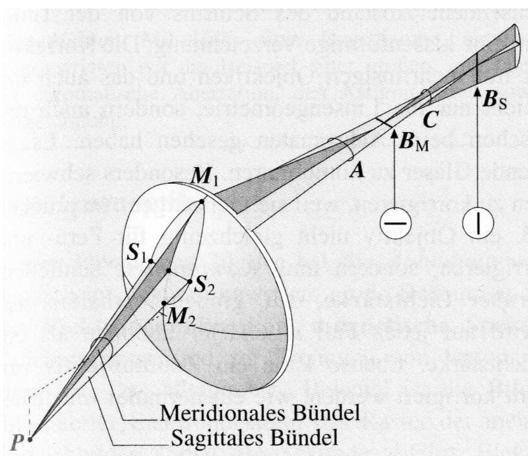


Abbildung 12.4: Entstehung einer astigmatischen Abbildung

12.3 Ionen- und Elektronenoptik: Teilchenoptik

Im 20. Jahrundert ist die Abbildung geladener Teilchen, die sich im Vakuum bewegen, von großer Bedeutung geworden. Hier einige Anwendungsbeispiele:

- Massenspektrometer (magnetisches Spektrometer, Quadrupol- Spektrometer)
- Elektronenmikroskop
- TV- Bildschirmröhre
- PC- Monitor

Elektrische und magnetische Felder haben nicht nur die Funktion, geladene Teilchen abzulenken, sondern sie können auch eine fokussierende/ abbildende Wirkung haben. Es gibt eine Vielzahl von elektrischen/ magnetischen Linsentypen, auch solche, die mit Hochfrequenten Feldern[2] arbeiten.

Die wesentlichen Punkte:

- Alle abbildenden Elemente müssen eine Gauß'sche Abbildung durchführen, das heißt dem Linsengesetz
$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \text{konstant} = \frac{1}{f}$$
genügen.
- Auch in der Teilchenoptik gelingt die Gauß'sche Abbildung nur näherungsweise. Die Linsenfehler sind im Allgemeinen in dritter Ordnung im Öffnungswinkel des Teilchenbündels.

Beispiel für eine elektrostatische Linse: Rohr- Einzellinse

Aufbau

- Drei hintereinander befindliche Rohrstücke: Das mittlere Stück weist gegenüber den beiden äußeren eine Spannung U auf.
- Dadurch bekommen die Äquipotentiallinien eine Ausbuchtung nahe der Rohrachse.
$\Rightarrow$ Das $\vec{E}$- Feld besitzt eine radiale Komponente, die nach außen hin (im weiten) linear zunimmt; so, wie es das Prinzip der Abbildung fordert.

Der Bahnverlauf

- Im linken Feld ist $\vec{E}_r$ zunächst nach außen gerichtet. Die Ionen werden nach außen abgelenkt.

[2]Für Linsen dieses Typs erhielt W. Paul (Uni Bonn) 1989 den Nobelpreis.

- Dann wird $\overrightarrow{E}_r$ die Richtung umkehren: Das Ion ist jetzt weiter außen, es erfährt also eine stationär nach innen gerichtete Kraft.
- Die Kombination der beiden *Randfelder* im linken *Rohrkondensator* wirkt als Sammellinse.
- Analog lässt sich das zweite Feld diskutieren: Dies hat im Gesamten eine fokussierende Wirkung.
- Die Polarität der Linse (Vorzeichen von U) spielt keine Rolle.

Feststellung:

Ein Punkt im Gegenstandsraum P_g wird genau auf einen Punkt im Bildraum P_b abgebildet.

Bemerkung: Der Strahlendurchmesser sollte auf ca. 30% des Rohrdurchmessers begrenzt werden, um Linsenfehler weitgehend zu vermeiden.

Kapitel 13

Materiewellen und Elektronenmikroskopie

13.1 Einführung

Wiederholung zur Quantenoptik

Die Quantenoptik sagt aus, dass die Absorbtion/ Emission von elektromagnetischer Strahlung in Form von Quanten (Photonen) erfolgt:
Die Energieaufnahme/ -abgabe erfolgt in Paketen der Energie

$$W_\gamma = h\nu$$

Aus dem Strahlungsdruck p, den die Welle auf eine Grenzfläche ausübt, berechnet man den durch Photonen transportierten Impuls p_γ zu

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$$

mit ν, λ als Frequenz, Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung.

Experimentell lässt sich die Quantisierung des Lichts über Versuche zum

- Photoeffekt
- Compton- Effekt

nachweisen.

Materiewellen

Es soll untersucht werden, ob auch Teilchen (insbesondere Elektronen) Welleneigenschaften besitzen.

Vorstellung: Anschaulich könnte man sich Teilchen als ein einigermaßen lokalisiertes Wellenpaket vorstellen, welches sich so bewegt, dass sich sein Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit des Teilchens bewegt.
$\Rightarrow$ Dem Teilchen wird eine Materiewelle zugeodnet. Seine Bewegung wird dann durch eine Art Wellengleichung für Materiewellen analog zur Wellengleichung für Lichtausbreitung beschrieben.

Vermutungen über die Wellenlänge und Frequenz:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{W}{h} \\ \lambda &= \frac{h}{p} \end{aligned}$$

wobei p der Impuls des Teilchens $p = m \cdot v$ ist. Dann gilt für die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Man nehme an, dass das (geladene) Teilchen durch eine Spannung U beschleunigt worden ist. Die kinetische Energie ist anschließend $W = \frac{1}{2}mv^2$.

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}v^2 &= eU \\ v &= \left(\frac{2eU}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Definition 13.1: De- Broglie- Wellenlänge

Die Wellenlänge λ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}$$

heißt de Broglie- *Wellenlänge.*

Ein Beispiel:

$$100eV \quad \hat{=} \quad \lambda \approx 1\mathring{A} \quad \hat{=} 10^{-10}m$$

Diese Wellenlänge ist vergleichbar mit Röntgenlicht- Wellenlängen.

Auflösung der Widersprüche des Bohr'schen Atommodells

Unklar ist noch, warum Elektronen auf stationären Bahnen (r_n) nicht abstrahlen.

Nach de Broglie wird das Elektron als eine 1D- Welle behandelt, welche eine Wellenlänge λ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \cdot v}$$

besitzt. Damit sich eine stationäre Ladungsverteilung ausbildet, muss es sich um eine stehende Welle handeln.
Dazu muß eine ganze Zahl von Wellenlängen auf den Bahnumfang $2\pi r_n$ entfallen:

$$\begin{aligned} 2\pi r_n &\stackrel{!}{=} n \cdot \lambda \\ &= n \cdot \frac{h}{m_e v_n} \end{aligned}$$

Somit folgt auch für den Drehimpuls:

$$L_n = m_e \cdot v_n \cdot r_n = \frac{h}{2\pi} \qquad \text{2. Bohr‘ sches Postulat}$$

Daraus schließt man:
Eine stehende Welle stellt keinen Strom, das heißt keine beschleunigte Ladung dar. Also muss auf den stationären Bahnen keine elektromagnetische Energie abgestrahlt werden.
Diese Überlegungen waren Ausgangspunkt für die Quantenmechanik in der Form der Schrödinger ‘schen Wellenmechanik.

13.2 Experimente zur Wellennatur der Materie

Elektronenbeugung und Interferenz

Die Effekte der Wellennatur der Materie sind mit der der Röntgenbeugung vergleichbar, da die Wellenlänge vergleichbar ist.
Röntgenbeugung tritt auf, wenn die Gitterstruktur Abstände (Gitterkonstante) hat, die in etwa der Wellenlänge λ der Röntgen- Strahlung entsprechen:

$$\begin{aligned} \lambda &\sim 10^{-8}cm \\ g &\sim 10^{-8}cm \end{aligned}$$

Röntgenbeugung erfolgt bei der Bestrahlung von Kristallgittern mit Röntgenlicht. (Vergleich: Kohärente Überlagerung der Beiträge für Beugung an vielen Lochblenden.)

Versuch: *Beugung von elektromagnetischen Wellen*

Es wird die Beugung von elektromagnetischen Wellen an einer regelmäßigen Anordnung von Lochblenden untersucht:

1. 1D: Gitter mit N- Öffnungen
2. 2D: Kreuzgitter

Zu 1. Es ergibt sich eine regelmäßige Folge scharfer Interferenz- Maxima, wobei die Abstände umgekehrt proportional zur Gitterkonstante sind.

Zu 2. Es liegt ein 2D- Interferenzmuster vor. Auch hier ist die Gitterkonstante umgekehrt proportional zur Periodizität des Musters.

Elektronenbeugung

Elektronenbeugung erfolgt bei dem Beschuss von Kristallgittern mit langsamen ($W = 30...300eV$) Elektronen. Dazu wird in einem LEED[1]- Aufbau ein Ni-Einkristall mit Elektronen beschossen und die Streuung beobachtet. Der Nachweis der gestreuten Elektronen erfolgt über einen Leuchtschirm.

Das Ergebnis ist ein Beugungsbild durch Interferenz von gestreuten Wellen.

Versuch: *Beugung an einer unregelmäßigen, amorphen Oberfläche (Bärlapp-Samen)*

Interpretation:
Es kommt nur darauf an, dass aus der einfallenden, ebenen Welle ein Teilbereich herausgeschnitten wird. Dies erfolgt durch

- eine kreisförmige Öffnung
- ein kreisförmiges Hindernis

in gleicher Weise.
Die Beugungsbilder sind identisch (Babinet- Prinzip). Im Experiment sieht man die Überlagerung der Intensitäten vieler kreisförmiger Hindernisse (Samen).

[1] low energy electron diffraction

Elektronenbeugung

Beugung an dünnen Schichten (Transmission ($W_{el} = 100keV$))

Die Beugungsstruktur nach der Durchstrahlung ist genau wie nach dem Durchgang von Licht durch ein Beugungsgitter:

- Ein Einkristall liefert Beugungs- Reflexe, weil eine 2D- Gitterstruktur vorliegt.
- Ein Poly- Kristall liefert ein Ringsystem, da alle Kristallorientierungen gleichwahrscheinlich sind.
  Zur Demonstration kann man die Beugung von elektromagnetischer Strahlung an einer Kreisblende zeigen; das Ergebnis sieht gleich dem eines Poly-Kristalls aus.

Beugung am Spalt (Laser)

Auch hier: Die Beugungsstruktur ist gleich der einer Lichtbeugung am Einzelspalt.

Merke: Das Materiewellen- Kozept gilt nicht nur für Elektronen, sondern für alle Teilchen. Die Wellenlänge wird *immer* nach $\lambda = \frac{h}{p}$ berechnet.

13.3 Materiewellen in der Anwendung: Elektronen-Mikroskopie

Motivation

- Das Auflösungsvermögen von Lichtmikroskopen ist von der Größenordnung der Lichtwellenlänge. Punkte werden immer auf Beugungsscheibchen dieser Größe abgebildet.
- Röntgen- Mikroskope lassen sich nicht bauen, da kein Material für Linsen existiert. Im Bereich $\lambda \sim 10^{-8} cm$ ist $n \simeq 1$.

Ein besseres Auflösungsvermögen als mit elektromagnetischen Wellen kann mit Materiewellen erreicht werden: Durch Mikroskopie mit Teilchenwellen mit der de-Broglie- Wellenlänge $\lambda < 10^{-8} cm$.

Die erforderlichen Elektronenlinsen lassen sich aus einer Kombination von elektrischen und magentischen Feldern bauen (siehe Kap. 12.3). Geladene Teilchen können damit abgelenkt und somit auch fokussiert werden.
Hierzu werden meistens rotationssymmetrische Anordnungen verwendet.

Das Prinzip der optischen Abbildung:
Ein ebener Gegenstand wird auf ein ebenes Bild abgebildet.
$\Rightarrow$ Elektronen, die von einem Punkt G ausgehen, werden auf einen Bildpunkt B fokussiert.

Rasterelektronen- Mikroskop (REM)

Zum Verständnis des Rasterelektronen- Mikroskops[2] wird die Wellenvorstellung der Materie noch gar nicht benötigt.

Das Prinzip:

- Die Oberfläche wird mit einem möglichst gut fokussierten e^- Strahl *beleuchtet.*
  Genauer: Das Objekt wird mit einem auf $1 nm ø$ fokussierten Strahl abgerastert.
- Dabei werden Elektronen gestreut beziehungsweise aus dem Objekt ausgelöst.
- Das Signal der registrierten Elektronen wird zur Helligkeitssteuerung eines Bildschirms verwendet: Ein Kontrastmechanismus ist möglich.

Die Auflösung eines Rasterelektronen- Mikroskops ist nicht so gut wie die eines Transmissions- Elektronen- Mikroskops. Es können aber dicke Proben verwendet werden. Die mit einem Rasterelektronen- Mikroskop erzeugten Bilder haben jedoch eine hohe Tiefenschärfe.

[2] Nobelpreis 1986: Ruska mit Binnig/Rohrer

Modifikationen: Bei der Bestrahlung entstehen Elektronen (oder Röntgenstrahlung), deren Energie charakteristisch für das emittierende Element ist. So liefert die Analyse dieser Strahlung die chemische Zusammensetzung der untersuchten Oberfläche.

Transmissions- Elektronen- Mikroskop (TEM)

Das Prinzip:
Strahlen aus einer möglichst punktförmigen Elektronenquelle werden parallel gebracht durch eine geeignete Linse auf ein dünnes Objekt gebracht. Dieses wird durchstrahlt. Das Objekt erzeugt ein vergrößertes Zwischenbild, welches dann nur noch geeignet abgebildet wird (Fotoplatte). Das Auflösungsvermögen solcher Anlagen ist durch die de-Broglie-Wellenlänge begrenzt.

Beachte: Der Strahlengang kann mit Hilfe der Bewegung klassischer Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern berechnet werden.

Beispiel: *TEM mit* $500keV$ *und* $1,4\mathring{A}$ *Auflösung*

TEM am Hexadekachlor-Kupfer-Phthalocyanin- Molekül: Schön zu sehen ist das zentrale Kupferatom mit 16 äußeren Chloratomen.

Rastertunnel- Mikroskop (RTM)

Das Rastertunnel- Mikroskop[3] basiert auf den Welleneigenschaften des Elektrons:

Elektronen können aus einem Metall in ein anderes übertreten, wenn die beiden Metalle nahe beinander sind ($\sim \mathring{A}$). Die Elektronen *tunneln* vom einen ins andere Metall (Tunnel-Effekt).
Legt man nun eine Spannung an, so fließt ein Tunnelstrom, dessen Größe vom Abstand der Metalle abhängt. Somit ist der Tunnelstrom ein Maß für das Oberflächen- Profil.

Die Technische Umsetzung:

Eine Metallspitze, die in einem einzelnen Atom endet, wird über eine Metalloberfläche bewegt. Der Tunnelstrom wird durch Nachregeln des Abstandes konstant gehalten. Somit ist die Regelspannung ein Maß für die Struktur der zu analysierenden Oberfläche.

Beispiel: *RTM am Benzol- Molekül auf einer Rhenium(111)- Oberfläche*

Erkennbar ist ein Gebilde mit dreizähliger Symmetrie. Dies ist das Abbild der Ladungsverteilung der Elektronen in C_6H_6- Molekül, wenn es auf der Rhenium-Oberfläche sitzt.

Beachte: Man sieht nicht einzelne Atome (oder Kerne), sondern die Ladungsverteilung innerhalb der Moleküle. Diese geben jedoch Hinweise auf das zugehörige Kerngerüst.

[3] Nobelpreis 1986: Binnig/Rohrer