Skriptum zur Vorlesung

Physik I

von Prof. Kempter

für Physiker und Chemiker

Wintersemester

Clausthal-Zellerfeld, April 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Physikalische Größen und Einheiten

1.1 Einführung

Die Physik versucht die Gesetze, nach denen Vorgänge in der Natur ablaufen, durch Einführung von Begriffen und Beziehungen zwischen diesen Begriffen zu beschreiben. Diese Beziehungen werden mit Hilfe der Mathematik hergestellt. Da alle Organismen physikalischen Gesetzen unterworfen sind, ist die Physik auch eine Grundlage der Biologie und Medizin (→Biophysik).
Folgende Schritte sind für die Naturbeschreibung notwendig:

1. Beschreibung der Natur durch Begriffe:

   Ein Begriff ist ein physikalische Größe, die man objektiv messen kann. Die menschlichen Sinnesorgane reichen i.a. nicht aus, um eine objektive Naturbeschreibung vorzunehmen. Es treten folgende Probleme auf :

   - Die Beobachtung kann in ihrem Ergebnis von den Sinnesorganen abhängen. Beispiele für optische Täuschungen sind die Spiraltäuschung und mehrdeutige Bilder. Die zum Beobachter gelangende Information reicht nicht aus, um eine eindeutige Identifikation des Bildes vorzunehmen Es kann beispielsweise je nach Beobachtung ein zweidimensionales Muster oder aber ein dreidimensionales Bild wahrgenommen werden.

   - Elektrische und magnetische Vorgänge werden von den menschlichen Sinnesorganen nicht - oder nur sehr unzureichend - erfasst. Daher sind Messgeräte nötig, die den Wahrnehmungsbereich über jenen der menschlichen Sinnesorgane hinaus erweitern. (Nachweis von elektromagnetischer , UV-, Röntgen- oder γ-Strahlung.) Der Nobelpreis für Physik 1994 wurde z.B. für die Aufklärung von Festkörperstrukturen durch Neutronen-Streuung (Materialanalyse, etc.) vergeben.

2. Verknüpfung der Begriffe zur Beschreibung von Gesetzmäßigkeiten in der Natur:

   Diese Gesetzmäßigkeiten werden durch mathematische Funktionen hergestellt (z.B. Verknüpfung von Masse, Beschleunigung und Kraft zur Grundgleichung der Dynamik). Zum Glück ist die mathematische Beschreibung der uns interessierenden grundlegenden Zusammenhänge recht einfach. Notwendig sind:

   - Grundrechenarten
   - spezielle Funktionen:
     - $\sin x$
     - $\cos x$
     - $\exp x$
     - $\ln x$
   - Vektorrechnung: Addition/Subtraktion, sowie Skalar- und Vektorprodukt
   - Differential- und Integralrechnung
   - zwei gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung und Katastrophengleichung

Zusammenfassung:

Der Erkenntnisgewinnung liegt folgendes Vorgehen zugrunde:

1. Aus Einzelbeobachtungen wird auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten geschlossen
2. Aufstellung einer Hypothese zur vorläufigen Erklärung einer Klasse von Beobachtungen
3. Hypothese wird verworfen, wenn sie im Widerspruch zur Beobachtung steht (klassisches Beispiel: Aufklärung des Atombaus)

$\rightarrow$ Die Physik ist eine induktiv arbeitende Wissenschaft (induktiv: vom Einzelnen auf das Allgemeine schließen).

Es gilt: „Es gibt keine physikalische Theorie, die nicht zu experimentell überprüfbaren Konsequenzen führt.“
Das Experiment ist deshalb ein wesentlicher Bestandteil der Überprüfung einer jeden physikalischen Theorie.
Die induktive Methode wird durch eine deduktive Vorgehensweise ergänzt: Aus gültigen Sätzen (Beziehungen zwischen physikalischen Größen) werden neue Erscheinungen/Erkenntnisse vorhergesagt und diese wieder an Hand von Experimenten überprüft.

1.2 Größen und Einheiten

Physikalische Größen dienen der Naturbeschreibung durch Begriffe, die objektiv gemessen werden können. Man unterteilt in skalare und vektorielle Größen.

- Skalare Größen:

  Definition 1.1: SKALARE PHYSIKALISCHE GRÖSSEN

  Eine skalare physikalische Größe ist ein Produkt aus einer Maßzahl (Zahlenwert) und einer Einheit

  $$\textit{Phys. Größe} = \textit{Maßzahl} \cdot \textit{Einheit}$$

  Beispiel: Zeitmessung in Sekunden

  Die Einheit ist 1 Sekunde =: 1 s. Als Maßzahl gibt man die Anzahl von Einheiten (hier Sekunden) an, die zwischen zwei Zeitmarken verflossen sind. Bezeichnet man die Maßzahl mit n, so ist die Zeit t (engl. time):

  $$t = n \cdot \mathrm{s}$$

- Vektorielle Größen:

  Definition 1.2: VEKTORIELLE PHYSIKALISCHE GRÖSSEN

  Bei einer vektoriellen Größe muss neben Maßzahl und Einheit noch eine Richtung angeben werden. Solche Größen sind Vektoren.

  Beispiel: Geschwindigkeit:

  Man muss angeben, in welche Richtung und wie schnell man sich bewegt.

Basisgrößen und -einheiten:

Die Festlegung einer Einheit ist reine Willkür. Eine vernünftige Wahl der Einheiten erfordert jedoch, dass jedermann sie kennen und verwenden muss. Weiter müssen die Einheiten reproduzierbar festgelegt werden können. Man hat sich 1960 international auf das SI-Einheiten-System (SI : Système International d' Unités) geeinigt. Es verwendet die Basisgrößen und Basiseinheiten aus der folgenden Tabelle.

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Stoffmenge	Mol	mol
Temperatur	Kelvin	K
El. Stromstärke	Ampère	A
Lichstärke	Candela	cd

Im Folgenden werden die Definitionen der Basiseinheiten, die bereits in Kapitel 2 benötigt werden, angegeben. Die übrigen werden später - wenn sie benötigt werden - eingeführt.

- Basisgröße Zeit:

  Definition 1.3: SEKUNDE

  > *1 Sekunde (1s) ist das 9 192 631 770-fache der Schwingungsdauer, die zum Strahlungsübergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur (HFS)- Niveaus des Cs^{133}-Isotops gehört.*

  Die Unsicherheit in der Realisierung beträgt 10^{-14} (d.h. ein Fehler von einer Sekunde in 3 Millionen Jahren). Welche physikalischen Vorgänge laufen hier ab? Ein Atom (Cs) ändert seinen energetischen Zustand. Dabei wird elektromagnetische Strahlung einer bestimmten Frequenz ausgesandt. Ihre Frequenz sei ν. Dann ist die Schwingungsdauer $\mathrm{T} = \frac{1}{\nu}$. In Formeln ausgedrückt:

  $1\,\mathrm{s} = 9\ 192\ 631\ 770 \cdot \mathrm{T}(\mathrm{Cs}^{133}) \approx 9{,}192 \cdot 10^9$-fache Schwingungsdauer des HFS-Übergangs

  Die Zeitmessung erfolgt mittels Uhren. Ihnen liegen folgende Vorgänge zugrunde:

  - Periodisch verlaufende Prozesse:
    z.B. Schwingung eines Atoms/Moleküls, Schwingung einer Feder, Drehschwingung, elektrische Schwingung, etc.
  - Nach bekannten Gesetzen ablaufende Prozesse:
    z.B. Kernzerfall (C^{14})

- Basisgröße Länge:

  1983 wurde die Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum als Naturkonstante auf den Wert $c_0 = 299\ 792\ 458$ m/s festgelegt. Damit ist die Längeneinheit Meter messtechnisch von der Zeitmessung abhängig geworden.

  Definition 1.4: METER

  > *1 Meter (1 m) ist jene Strecke, die das Licht im Vakuum während des Zeitintervalls von (1/299 792 458) Sekunden zurücklegt.*

- Basisgröße Masse:

  Definition 1.5: KILOGRAMM

  > *1 Kilogramm (1 kg) ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.*

  Dabei handelt es sich um einen Normkörper aus Pt-Ir, einem Zylinder mit 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser. Dieser wird in Paris aufbewahrt und sollte eigentlich dieselbe Masse wie 1 dm^3 Wasser bei 4°C besitzen. Ursprünglich wurden 42 Prototypen hergestellt (Massenunterschied < 1 mg). Vergleichsmessungen zeigen jedoch, dass die Massenwerte mit einer Rate von ca. $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ kg/Jahr auseinanderlaufen. Es ist also notwendig, die SI-Einheit der Masse auf atomare Größen zurückzuführen.

Möglichkeiten der Neudefinierung der Masseneinheit:

Man bestimmt die Anzahl der Atome in einem Normkörper (Si-Einkristall) bekannter Abmessungen. Die Masse der Einzelatome sowie die Gitterabstände können genau gemessen werden. Probleme ergeben sich allerdings aus der unbekannten Dicke der Oxidationsschicht des Kristalls und der Unkenntnis der Anzahl der Gitterdefekte.

Unterteilung der Einheiten:

Die Maßzahlen werden durch international vereinbarte „Vorsätze“ unterteilt. Tabelle der Abkürzungen zur Unterteilung bzw. zu Vielfachen (Zehnerpotenzen) der Einheiten siehe z.B. Tab. 1.3 aus dem Lehrbuch von Niedrig.

Abgeleitete physikalische Größen:

Alle weiteren physikalischen Größen sind abgeleitete physikalische Größen.

Definition 1.6: DIMENSION

> *Das die physikalische Größe kennzeichnende Potenzprodukt aus Basisgrößen heißt ihre Dimension.*

Beispiel: Geschwindigkeit
Die Dimension der Geschwindigkeit ist Länge/Zeit. Die Einheiten der abgeleiteten physikalischen Größen sind aus jenen der Basisgrößen zusammengesetzt. Sie folgen aus den sie definierenden Beziehungen zwischen den Basisgrößen. Z.B.: Einheit der Geschwindigkeit ist 1 Meter/1 Sekunde = 1 m/s

Kapitel 2

Teilchen und Teilchensysteme I: Massenpunktmechanik

2.1 Kinematik

Wir wollen nun die Bewegung einzelner Massenpunkte (MP) behandeln.

Definition 2.1: MASSENPUNKT

> *Ein Massenpunkt ist ein idealisierter Körper, dessen gesamte Masse in einem (math.) Punkt vereinigt ist.*

Die Lage (der Ort) eines MP's zu einer bestimmten Zeit t kann durch einen zeitabhängigen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ angegeben werden. Dabei kann $\vec{r}(t)$ durch seine Komponenten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden.
Im Folgenden interessieren wir uns für die Größen, welche die Bewegung eines MP's beschreiben. Diese sind:

- der Weg $\vec{s}(t)$
- die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$
- die Beschleunigung $\vec{a}(t)$

2.1.1 Kurze Einführung in die Vektorrechnung

Um ein möglichst gutes Verständnis der in diesem Kapitel dargestellten Sachverhalte zu gewährleisten, sollte man die folgenden Grundlagen der Vektorrechnung ausreichend beherrschen.

Definition 2.2: VEKTOR

> *Ein Vektor lässt sich durch eine gerichtete Strecke, d.h. durch einen Pfeil darstellen. Seine Länge ist durch die Maßzahl der zugehörigen physikalischen Größe gegeben.*

Vektorpfeile, die dieselbe Richtung und Länge haben, stellen denselben Vektor dar. Vektoren dürfen i.a. im Raum verschoben werden. Physikalisch ändert sich nichts.

- **Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl:**

  Eine Multiplikation von $\vec{r}$ mit der reellen Zahl a ergibt den Vektor a$\vec{r}$. Die Richtung bleibt (bis auf das Vorzeichen!) immer erhalten.

  - Die Länge wird mit dem Betrag von a multipliziert.
  - Zur Richtung: Ist a < 0, so kehrt sich die Pfeilrichtung um.

- **Addition von Vektoren:**

  Vektoren addiert man durch Aneinanderreihung der Pfeile. Für Addition und Subtraktion ergibt sich damit die in Abbildung 2.1 dargestellte Situation.

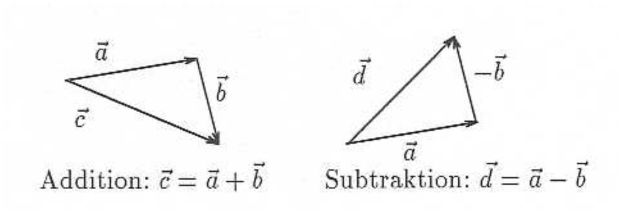

Abbildung 2.1: Addition und Subtraktion von Vektoren

  Man erhält den Vektor -$\vec{b}$ aus $\vec{b}$ durch Multiplikation mit der Zahl a = -1.

- **Linearkombination von Vektoren:**

  Sind die Größen $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ Vektoren und $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, so ist die Linearkombination $a_1\vec{r}_1 + a_2\vec{r}_2 + \ldots + a_n\vec{r}_n$ wieder ein Vektor.

- **Zerlegung von Vektoren in Komponenten:**

Wir geben Achsenrichtungen $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ vor. Wir beschränken uns zunächst auf eine Ebene, in der $\vec{x}$ und $\vec{y}$ liegen. Normalerweise haben wir es mit kartesischen Koordinaten zu tun.

Definition 2.3: KARTESISCHES KOORDINATENSYSTEM

> *Bei einem kartesischen Koordinaten-System stehen die 3 Achsenrichtungen $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ senkrecht zueinander.*

Es stellt sich nun die Frage, wie wir $\vec{r}(t)$ in seine Komponenten in Richtung von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zerlegen können. (siehe schiefer Wurf Seite 18) Wir führen Basisvektoren ein:

- $\hat{e}_x$ hat Richtung von $\vec{x}$
- $\hat{e}_y$ hat Richtung von $\vec{y}$

Beide Vektoren haben die Länge (den Betrag) 1. Es gilt dann offenbar:

$$\vec{r} = x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In Worten heißt dies, x bzw. y gibt an, mit welcher dimensionsbehafteten Zahl der Basisvektor $\hat{e}_x$ bzw. $\hat{e}_y$ zu multiplizieren ist, damit der Vektor $\vec{r}$ aufgespannt wird. Der Satz von Pythagoras liefert die Länge $|\vec{r}(t)|$ von $\vec{r}(t)$:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir wollen nun die zuvor eingeführten Begriffe für den 3-dimensionalen Fall verallgemeinern. Die Zusammensetzung erfolgt als Linearkombination der 3 Vektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ längs der 3 Koordinatenrichtungen x, y und z.
Beispiel: Geschwindigkeit
Längs der x-Achse brauchen wir $v_x \cdot \hat{e}_x$, längs der y-Achse $v_y \cdot \hat{e}_y$ und längs der z-Achse $v_z \cdot \hat{e}_3$. Daher ergibt sich:

$$\vec{v}(t) = v_x \cdot \hat{e}_x + v_y \cdot \hat{e}_y + v_z \cdot \hat{e}_z$$

Für den Betrag $|\vec{v}(t)|$ gilt daher:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

In der Kurzschreibweise bei der sich die Komponenten v_x, v_y und v_z auf die Achsen x, y und z eines vorgegebenen Koordinatensystems beziehen, lautet der Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Definition 2.4: KOMPONENTENDARSTELLUNG

Die Darstellung $\vec{v}(t) = v_x \cdot \hat{e}_x + \ldots$ heißt Komponentendarstellung von $\vec{v}(t)$.

Bei vorgegebener Beschleunigung $\vec{a}(t)$ erhält man durch komponentenweise Integration die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Es gilt für den Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit in der Komponente i ($i = x, y, z$):

$$a_i = \frac{dv_i}{dt}$$

Durch Integration erhält man beispielsweise für die x-Komponente

$$v_x(t) = v_x(t = 0) + \int_0^t a_x(t')dt'$$

Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg lautet für jede Komponente i:

$$v_i = \frac{ds_i}{dt}$$

Analog ergibt sich durch Integration der Weg in dieser Kmponente zu

$$s_i(t) = s_i(t = 0) + \int_0^t v_i(t')dt'$$

- **Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes:**

  Wir wollen nun den Begriff des Skalarproduktes diskutieren. Es erlangt wesentliche Bedeutung bei der Definition und der Berechnung vieler physikalischen Größen, z.B. Arbeit, Spannung, ...

  Definition 2.5: SKALARPRODUKT

  Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\vec{a}, \vec{b})$$

  Wie der Name schon andeutet, ist das Ergebnis des Skalarproduktes ein Skalar, also eine Zahl und kein Vektor. In dieser und auch anderer Hinsicht unterscheidet es sich wesentlich vom später eingeführten Vektorprodukt.

  - **Rechenregeln:**
    * $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
    * $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ d.h. das Skalarprodukt zweier zueinander sekrechter Vektoren ist Null. Diese Vektoren werden auch orthogonale Vektoren genannt.

– **Komponenten-Schreibweise:** Es seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. eines Koordinatensystems mit den Basisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Die Basisvektoren (Einheitsvektoren) stehen paarweise zueinander normal, d.h. $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$ $(i = x, y, z)$ und

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y &= 0 \\ \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z &= 0 \\ \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z &= 0 \end{aligned}$$

Verwendet man nun die oben näher beschriebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so ergibt sich für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

- **Definition und Eigenschaften des Vektorproduktes:**

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$.

Definition 2.6: VEKTORPRODUKT

Das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird geschrieben als $\vec{a} \times \vec{b}$. Der Vektor $\vec{c}$ ist das Ergebnis dieses Vektorproduktes:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Der Betrag des so festgelegten Vektors ist

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\vec{a}, \vec{b})$$

d.h. gleich der Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierten Parallelogramms.

Die Richtung von $\vec{c}$ ist senkrecht zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Pfeilrichtung ist die Daumenrichtung, wenn die Finger der rechten Hand den kürzesten Weg von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ (im Gegenuhrzeigersinn) zeigen.

Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften:

– $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

– $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
- Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wieder wie beim Skalarprodukt in kartesischen Koordinaten gegeben. Dann gilt für den Vektor $\vec{c}$ in der abgekürzten Komponentenschreibweise:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

2.1.2 Geradlinige Bewegung

In der (x,y)-Ebene sieht die Bewegung, gekennzeichnet durch Weg $\vec{s}$ des Massenpunktes und seine Geschwindigkeit $\vec{v}$, aus wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

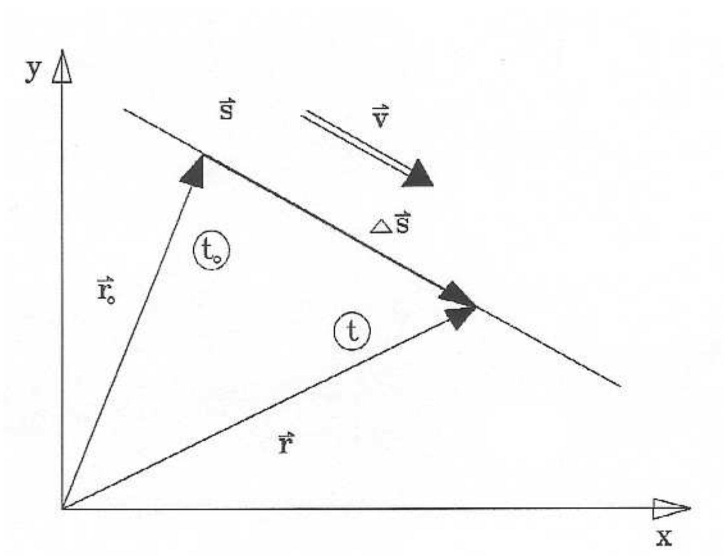

Abbildung 2.2: Skizze zur Verdeutlichung der geradlinigen Bewegung

Die mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}_m$ zwischen dem Zeitpunkt t_0 und t ist mit $\Delta t = t - t_0$ definiert als:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

Die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ ist definiert durch:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\vec{v}(t)$ heißt „Ableitung des Ortes nach der Zeit“. Laut Abbildung 2.2 ergibt sich, wenn der Ort zur Zeit t_0 gerade $\vec{s}_0$ war, der Ort $s(t)$ zu einem späteren Zeitpunkt t durch Integration.

$$
\begin{aligned}
\vec{s} &= \vec{s}_0 + \sum_{t=t_0}^{t} \Delta\vec{s} \\
&\rightarrow \vec{s}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt
\end{aligned}
$$

Ist z.B. $\vec{v}$ konstant im Zeitintervall (t_0, t), so ergibt sich

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

Ändert sich im Zeitintervall $\Delta t = (t - t_0)$ die Geschwindigkeit, so ist die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$ gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\vec{a}$ kann positiv oder negativ gerichtet sein:

- Ist $a > 0$, so liegt eine Beschleunigung vor.
- Ist $a < 0$, so wird die Bewegung des Massenpunktes verzögert (Bremsen).

Die SI-Einheit der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ist offenbar $1\,\mathrm{ms}^{-2}$. Bei gegebener Beschleunigung $\vec{a}$ erhält man $\vec{v}(t)$ nach Integration zu :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

Für eine geradlinige Bewegung ist eigentlich eine skalare Beschreibung ausreichend. In Vektorschreibweise sind alle Definitionen auch für eine krummlinige Bewegung gültig. Dann sind i.a. $\vec{v}$ und $\vec{a}$ nicht mehr parallel zueinander .

Beispiele und Anwendungen

Zur Vertiefung betrachten wir gleichmäßig beschleunigte Bewegungen, d.h. $\vec{a}$ ist nach Betrag und Richtung im Schwerefeld der Erde konstant.

- Freier Fall (senkrechter Wurf):

  Jeder Massenpunkt unterliegt der Erdbeschleunigung $\vec{g}$, wobei $|\vec{g}| \simeq 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$. Dann ergibt sich die Fallgeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zu:

  $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

  Dabei ist $\vec{v}_0$ die Fallgeschwindigkeit zur Zeit $\mathrm{t} = 0$. Für die Fallhöhe ergibt sich, wenn $h = 0$ für $t = 0$:

  $$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

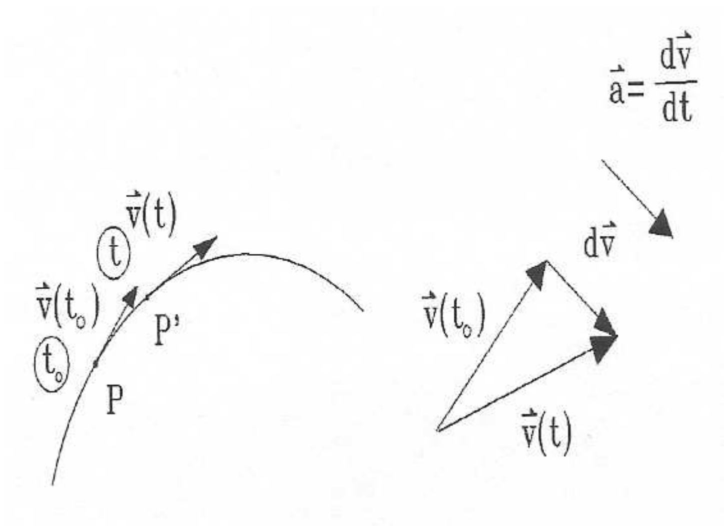

Abbildung 2.3: Skizze zur krummlinigen Bewegung

- Schiefer Wurf:

  Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ lässt sich berechnen als Zusammensetzung von zwei geradlinigen Bewegungen in x- bzw. y-Richtung:

  1. Gleichförmige Bewegung in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v_0 \cos\alpha$.
  2. Freier Fall in z-Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin\alpha$.

  Damit folgt für die Koordinaten des Massenpunktes x(t) und z(t):

  $$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha & \quad x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \\ v_z(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t & \quad z(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \tfrac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

  Die Bahnkurve $z(x)$ ergibt sich nach Elimination von t zu:

  $$z = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

  Die Wurfparabel ist in Abbildung 2.4 skizziert.

  Die Wurfweite folgt aus der Lage des zweiten Schnittpunktes mit der x-Achse:

  $$x_{Wurfweite} = v_0^2 \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{g}$$

  Die maximale Wurfweite x_{max} ergibt sich für $\sin(2\alpha) = 1$, d.h. $\alpha = 45^\circ$, zu $\frac{v_0^2}{g}$.

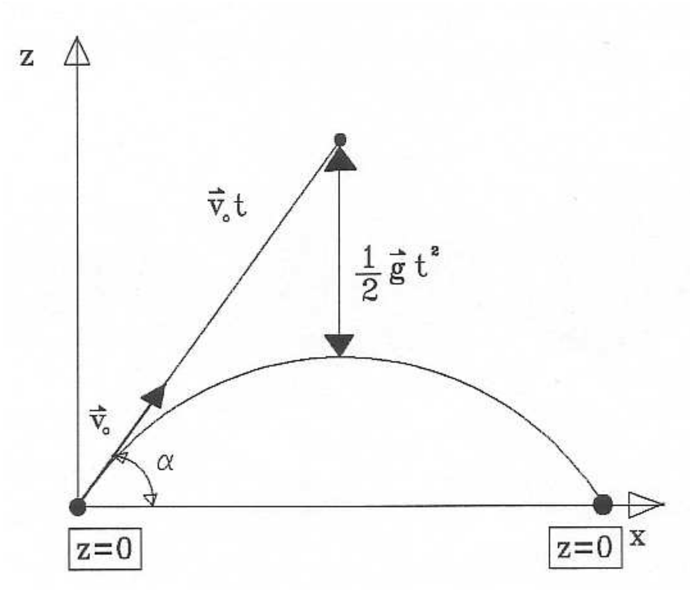

Abbildung 2.4: Schiefer Wurf

Beachte!

Bei allen bisher gemachten Überlegungen wurde die Luftreibung vernachlässigt.

2.1.3 Kreisbewegung

Um die Bewegung eines MP auf einer Kreisbahn beschreiben zu können, benötigt man folgende Größen:

- Drehwinkel $\alpha(t)$
- Zeit t
- Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$
- Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t)$
- Bahngeschwindigkeit $\vec{v}(t)$
- Beschleunigung $\vec{a}(t)$

Der Drehwinkel $\alpha(t)$ kann in Grad (°) angegeben werden. Wir arbeiten im Folgenden mit dem Winkel φ im Bogenmaß.

Definition 2.7: BOGENMASS

> *Der Winkel im Bogenmaß (siehe Abbildung 2.5) ist definiert als die Länge des von den Winkelschenkeln eingeschlossenen Kreisbogens eines Einheitskreises (Kreis mit Radius 1). Es gilt:*

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\textit{Länge des Kreisbogens, den der Winkel } \varphi \textit{ herausschneidet}}{\textit{Radius des gewählten Kreises}}$$

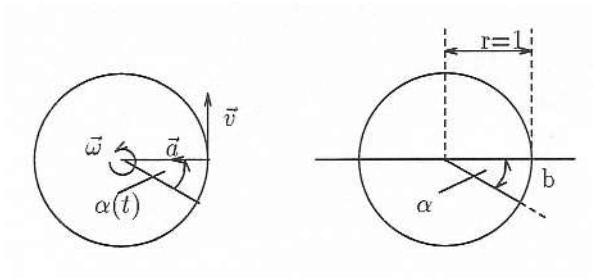

Abbildung 2.5: Kreisbewegung und Einheitskreis

In der folgenden Tabelle sind einige wichtigen Entsprechungen zusammengestellt.

Bogenmaß in rad	Winkel in °
2π	360
π	180
$\frac{\pi}{2}$	90
1	57,6
0,01745	1

Der Wert Eins im Bogenmaß erhält meist die Einheit Radiant (rad), obwohl es eine dimensionslose Größe ist. Der Winkel φ in rad wird wie folgt aus jenem in Grad (α) erhalten:

$$\varphi\,[\mathrm{rad}] = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha\,[°]$$

Definition 2.8: Betrag der Winkelgeschwindigkeit

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist definiert als

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Definition 2.9: Betrag der Winkelbeschleunigung

Der Betrag der Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist definiert als

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \dot{\varphi}$$

Im wichtigen Fall der gleichförmigen Kreisbewegung gilt $\omega =$ konstant und daher mit $\varphi(t_0) = \varphi_0$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

Definition 2.10: Richtung der Winkelgeschwindigkeit

Um die Drehrichtung angeben zu können definiert man den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$, der den Betrag von $|\omega| = \frac{d\varphi}{dt}$ hat, und dessen Richtung senkrecht auf die Bahnebene steht.

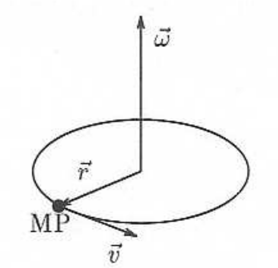

Abbildung 2.6: Skizze zur Kreisbewegung

Rechte-Hand-Regel

Der Daumen weist in Richtung von $\vec{\omega}$, wenn die Finger in Drehrichtung zeigen (siehe Abbildung 2.6.)

Den Betrag der Bahngeschwindigkeit $|\vec{v}(t)|$ erhält man analog der geradlinigen Bewegung, wobei an die Stelle des geraden Wegstückes s nun der durchlaufene Bogen b tritt:

$$|\vec{v}(t)| = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Wegen $\vec{\varphi} = \frac{b(t)}{r}$, d.h. φ ist der Bogen im Einheitskreis, ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{db}{dt} \cdot \frac{1}{r} = \frac{|\vec{v}(t)|}{r} = \omega$$

der wichtige Zusammenhang zwischen der Winkel- und der Bahngeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{2.1}$$

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist also gleich dem Betrag der Bahngeschwindigkeit auf dem Einheitskreis. Allerdings sind die Richtung und auch die Einheit beider Größen verschieden. Dies drückt sich in der vektoriellen Formulierung der Gleichung 2.1 aus. Mit Hilfe von $\vec{\omega}$ erhalten wir für $\vec{v}(t)$ durch das Vektorprodukt aus $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$:

Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.2}$$

Korrekterweise ergibt sich, dass $\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ steht.
Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$, die der Massepunkt auf seiner Kreisbahn erfährt, erhalten wir aus $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ zu

$$\vec{a}(t) = \frac{d[\vec{\omega} \times \vec{r}]}{dt}$$

In dem Spezialfall der gleichförmigen Kreisbewegung, d.h. $\vec{\omega}$ ist konstant, ergibt sich wegen $\frac{d\omega}{dt} = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r})\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\vec{a}$ parallel zu -$\vec{r}$ steht, also radial nach innen gerichtet ist.

Definition 2.11: Zentripetalbeschleunigung

Die Zentripetalbeschleunigung ist der radial nach innen gerichtete Anteil an der Gesamtbeschleunigung $\vec{a}$.

Im Spezialfall der gleichförmigen Kreisbewegung sind Zentripetalbeschleunigung und Gesamtbeschleunigung identisch. Ferner folgt für $|\vec{a}|$:

$$a = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

Polarkoordinaten

Wir wollen nun die Bahnkurve, -geschwindigkeit und -beschleunigung in Polarkoordinaten berechnen. Es sei ω konstant.

- Bahnkurve

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}$$

- Betrag von $\vec{v}$

$$\begin{array}{rclcc}\dot{x}(t) & = & v_x & = & -\omega r \cdot \sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) & = & v_y & = & \omega r \cdot \cos(\omega t) \\ |v| & = & \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & = & \omega \cdot r \cdot (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \\ & & |v| & = & \omega \cdot r\end{array}$$

- Betrag von $\vec{a}$

$$\begin{array}{rclcc}\ddot{x} & = & a_x & = & -\omega^2 \cdot r \cdot \cos(\omega t) \\ \ddot{y} & = & a_y & = & -\omega^2 \cdot r \cdot \sin(\omega t) \\ |a| & = & \sqrt{a_x^2 + a_y^2} & = & \omega^2 \cdot r\end{array}$$

2.2 Dynamik

2.2.1 Kraft und Impuls

Wir betrachten im Folgenden die Dynamik von Massenpunkten, d.h. die Folge einer beliebigen Kraft auf ihre Bewegung. Auf die spezielle Natur der Kräfte wird erst später eingegangen. Als Grundlage für die Behandlung der Dynamik von Massenpunkten betrachtet man die drei Newton'schen Axiome.

1. Newton'sches Axiom (Trägheitsgesetz)

Ein Massenpunkt der Masse m verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

$$\vec{v} = \textit{konstant, wenn} \quad \vec{F} = 0 \tag{2.3}$$

2. Newton'sches Axiom (Grundgleichung der Dynamik)

Jede Änderung des Bewegungszustandes setzt die Einwirkung einer Kraft $\vec{F}$ voraus. Das Maß für die Größe und Richtung der Kraft ist die erzielte Beschleunigung $\vec{a}$ des Körpers.

Das Axiom findet seinen Niederschlag in der bekannten Formulierung der Trägheitskraft, Gleichung (2.4).

- Die Beschleunigung $\vec{a}$ gibt die Richtung von $\vec{F}$ an, d.h. $\vec{a}$ ist zu der Richtung der Kraft $\vec{F}$ parallel.
- $|\vec{a}|$ ist zu $|\vec{F}|$ proportional.
- Das Verhältnis von wirkender Kraft $|\vec{F}|$ und erzielter Beschleunigung $|\vec{a}|$, also $\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$, ist eine Eigenschaft allein des Körpers. Diese charakterisiert seine Trägheit.

Definition 2.12: MASSE

Das Verhältnis $\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$ heißt Masse m des Körpers

Es gilt der äußerst wichtige Zusammenhang für die Trägheitskraft:

Grundgleichung der Dynamik/Trägheitskraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.4}$$

Wenn sich während der Bewegung die Masse m ändert, d.h. $m(\vec{v})$, so lautet stattdessen die allgemeine Formulierung:

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.5}$$

Definition 2.13: IMPULS

Der Vektor $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ heißt Impuls des Körpers.

Seine SI-Einheit ist $1\,kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}$.

Es gilt Aufgrund des 1. Newtonschen Axioms offenbar:

$$\vec{p} = \text{konstant solange}\, \vec{F} \equiv 0$$

Es stellt sich nun die Frage, was man sich unter der Masse eines Körpers anschaulich vorstellen kann. Die Masse m ist einfach die in dem Körper enthaltene Materiemenge.

Kraft als physikalische Größe

Die Kraft ist eine abgeleitete vektorielle Größe. Ihre SI-Einheit ist $1\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ $= 1\,$Newton (1 N).
Ein interessanter Fall ist die Überlagerung von Kräften. Greifen mehrere Kräfte $\vec{F}_i$ an einem Punkt P des Körpers an (Abbildung 2.7), so addieren sie sich vektoriell:

$$\vec{F}_{ges} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

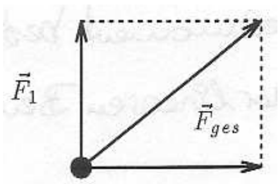

Abbildung 2.7: Überlagerung von Kräften

Beispiel: Gewichtskraft
Fast alle Kräfte, mit denen wir experimentieren, sind von der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ eines Körpers im Schwerefeld der Erde abgeleitet. Kann ein Körper der Kraft $\vec{F}_G$ folgen, so ruft sie die Beschleunigung $\vec{a} = \vec{g}$ hervor, wobei $\vec{g}$ die Richtung zum Erdmittelpunkt hat. (Kann der Körper der Gewichtskraft nicht folgen, so wird er bis zur Kompensation deformiert.) Die Gewichtskraft ist also, mit $|\vec{g}| \cong 9.81 \text{ ms}^{-2}$:

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$

Es wirft sich die Frage auf, wie Kräfte überhaupt gemessen werden. Eine Möglichkeit ist das sogenannte Federdynamometer. Dabei wird eine Feder gedehnt; die Dehnung $\vec{s}$ (Auslenkung) ist i.a. in guter Näherung der dehnenden Kraft $\vec{F}$ proportional. Es gilt für die rücktreibende Kraft das

Hooke'sches Gesetz

$$\vec{F}_D = -D \cdot \vec{s} \tag{2.6}$$

Die Proportionalitätskonstante D wird Federkonstante genannt.

3.Newton'sches Axiom (Reaktionsgesetz)

Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so reagiert Körper 2 mit einer Gegenkraft $\vec{F}_{21}$. Sie ist betragsmäßig gleich groß wie $\vec{F}_{12}$, aber entgegengesetzt gerichtet. D.h.:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{2.7}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass die Angriffspunkte der beiden Kräfte in verschiedenen Körpern liegen.

Äquivalenzprinzip

Man könnte auf die Idee kommen, dass im Ausdruck $\vec{F}_G = m_S \cdot \vec{g}$ eine „schwere Masse“ m_S für die Schwerkraft verantwortlich ist, während im 2. Newton'schen Axiom m $\vec{F} = m_t \cdot \vec{a}$ eine „träge Masse“ m_t aufritt. Es gilt aber das

Äquivalenzprinzip

Schwere und träge Masse sind im Rahmen der bisher erreichten Messgenauigkeit identisch.

$$m_s \equiv m_t$$

Ausblicke in die moderne Physik

Die Masse eines Körpers ist nicht immer eine Konstante.

1. Es gibt Prozesse, bei denen ein Massendefekt Δm auftritt.

   (a)

   $$\begin{aligned} H^1 + n &\rightarrow H^2 \\ m_H + m_n &= m_D + \Delta m \end{aligned}$$

   wobei

   $$\begin{aligned} H^1 &= \text{Wasserstoffatom} \\ n &= \text{Neutron} \\ H^2 &= \text{Deuterium} \end{aligned}$$

   Das Deuteriumaton ist leichter als die Summe von H^1 und Neutron.

   (b) Uran (U) zerfällt in zwei Kerne K_1 und K_2. Die Summe der Massen der Tochterkerne ist geringer als die Masse des Mutterkerns.

   Was passiert mit der freigesetzten Masse Δm? Nach Einstein sind Energie und Masse äquivalent. Die Masse Δm entspricht der Energie

   $$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

2. Die Masse kann von der Geschwindigkeit des Körpers abhängen. Mit größer werdender Geschwindigkeit nimmt die Masse zu:

   $$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

   m_0 = Ruhemasse bei v = 0

   Bei kleinen Geschwindigkeiten ($\frac{v}{c} \ll 1$) kann $\frac{v^2}{c^2}$ vernachlässigt werden, und $m(v) \approx m_0$.

2.2.2 Drehmoment und Drehimpuls

Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung eines Massenpunktes bleibt sein Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ erhalten. Wie sieht die Situation nun aber aus, wenn der Massenpunkt sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit $|\vec{v}|$ auf einem Kreis bewegt? Wir stellen fest, dass der Massenpunkt durch eine Kraft $\vec{F}$, deren Wirkungslinie nicht durch den Kreismittelpunkt geht, in Drehung versetzt werden kann. Eine für die Beschreibung der Wirkung dieser Kraft geeignete Größe ist der Vektor $\vec{M}$. Es gilt mit $\vec{r}$ als Ortsvektor:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Definition 2.14: DREHMOMENT

Der Vektor $\vec{M}$ (oder englisch $\vec{T}$ für „torque“) heißt Drehmoment.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Die SI-Einheit ist 1 Nm.

Für $|\vec{M}| = M$ gilt nach Definition des Vektorproduktes:

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

Es gilt wieder eine

Rechte-Hand-Regel

Wenn die Finger der rechten Hand in Drehrichtung zeigen, dann gibt der Daumen die Richtung von $\vec{M}$ an.

Für eine Drehbewegung (Rotation) übernimmt das Drehmoment $\vec{M}$ die Rolle der Kraft $\vec{F}$ bei einer geradlinigen Bewegung, d.h. $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$. Es ist aber noch offen, welche physikalische Größe die Rolle des Impulses $\vec{p}$ übernimmt. Dieses ist der Drehimpuls.

Definition 2.15: DREHIMPULS

Der (Bahn-)Drehimpuls $\vec{L}$ ist definiert durch den Ausdruck:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ hat die Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn die Finger die Drehrichtung anzeigen, mit welcher $\vec{p}$ auf dem kürzest möglichen Wege mit einer Rechtsschraube in die Richtung von $\vec{r}$ gebracht wird.

Der Betrag ergibt sich gemäß der Definition des Vektorproduktes zu:

$$|\vec{L}| = L = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p})$$

Für den Spezialfall der Kreisbahn gilt $\vec{r} \perp \vec{p}$ und damit

$$L = r \cdot m \cdot v$$

Mit $v = \omega \cdot r$ kann diese Gleichung umgeschrieben werde zu

$$L = m \cdot \omega \cdot r^2$$

oder vektoriell, da $\vec{\omega}$ die Richtung von $\vec{L}$ hat

$$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

Zeitliche Änderung von $\vec{L}$

Wir untersuchen jetzt die zeitliche Änderung $\frac{d\vec{L}}{dt}$ des Drehimpulses. Es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = [\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p}]$$

Berücksichtigt man $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ und $[\vec{v} \times \vec{v}] = 0$ sowie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, so erhält man die

Grundgleichung der Dynamik für Drehbewegungen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \tag{2.8}$$

In Worten: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses, $\frac{d\vec{L}}{dt}$, wird durch ein Drehmoment $\vec{M}$ bewirkt. Zum Vergleich: Bei einer Translation wird die Änderung des linearen Impulses durch eine Kraft $\vec{F}$ hervorgerufen. Also gilt die Entsprechung $\vec{p} \leftrightarrow \vec{L}$. Insbesondere gilt der

Drehimpulserhaltungssatz

Wenn an einem Massepunkt kein Drehmoment $\vec{M}$ angreift, so bleibt der Drehimpuls $\vec{L}$ nach Betrag und Richtung erhalten.

2.2.3 Arbeit und Energie

Wir wollen nun die physikalischen Größe Arbeit einführen. Wir stellen fest, dass sich bei einem Flaschenzug die Gleichgewichtskraft F_G auf n = 4 Teilstücke des Seiles verteilt (siehe Abbildung 2.8).

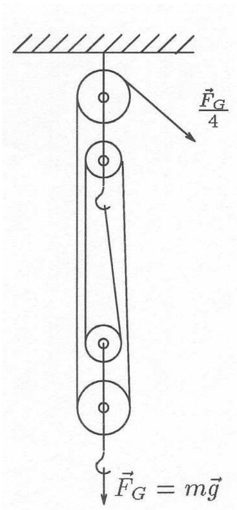

Abbildung 2.8: Flaschenzug

Zur Herstellung des Gleichgewichtes muss man nur F_4 kompensieren. Es gilt:

$$F_4 = \frac{1}{4} F_G$$

da sich die Kräfte an den übrigen Seilstücken kompensieren. Der Sinn des Flaschenzuges ist es aber, das Gewicht anzuheben, z.B. um h_1. Dazu müssen alle Seilstücke um h_1 verkürzt werden. Folglich muss das Seil um $h_2 = 4 \cdot h_1$ herausgezogen werden.
Hätten wir die Last direkt mittels einer Rolle angehoben, hätten wir das Seil um $h_2 = h_1$ herausziehen müssen; aber die notwendige Kraft wäre F_G gewesen. Der Flaschenzug „spart“ also Kraft ein. Es gilt im vorliegenden Falle:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \text{konstant}$$

Wir kommen nun zur vorläufigen Definition der physikalischen Größe Arbeit:

Definition 2.16: ARBEIT

> *Das Produkt aus zurückgelegtem Weg und längs des Weges herrschender Kraft heißt Arbeit W.*

Beispiel: Hubarbeit
Beim Anheben einer Last gegen die Gewichtskraft wird die Hubarbeit verrichtet:

$$W = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Um Kraft zu sparen, setzen wir die schiefe Ebene ein (siehe Abbildung 2.9).

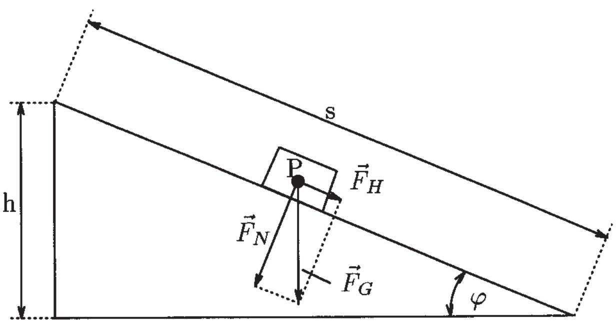

Abbildung 2.9: Schiefe Ebene

Die Komponente der zu überwindenden Gewichtskraft ist die Hangabtriebskraft $F_H = F_G \sin(\varphi)$, denn die Normalkraft $F_N = F_G \cos(\varphi)$ wird durch die Reaktionskraft der Unterlage kompensiert. Der zurückzulegende Weg s, um die Last um h anzuheben ist:

$$s = \frac{h}{\sin(\varphi)}$$

Die Arbeit W ist dann wieder

$$W = F_G \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{h}{\sin(\varphi)} = m \cdot g \cdot h$$

Die Arbeit ist also unabhängig vom Neigungswinkel φ. Wir stellen weiterhin fest, dass die Arbeit in diesen Spezialfällen offenbar unabhängig vom Weg ist. Es gilt im allgemeinen Fall:

- Die Arbeit ist ein Skalar.
- Nur die Komponente von $\vec{F}$, die in Bewegungsrichtung zeigt, kann Arbeit verrichten.

Wir führen nun die physikalische Größe der Energie ein. Es stellt sich nämlich die Frage, was mit einem Körper, an dem Arbeit verrichtet wird, passiert. Beispielsweise hat eine um h angehobene Last ihrerseits die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, z.B. eine angehobene Wassermasse ein Wasserrad anzutreiben.

Definition 2.17: Energie

> *Jede an einem Körper verrichtete Arbeit vergrößert dessen Energie und versetzt ihn in die Lage, seinerseits Arbeit zu verrichten. Unter der Energie versteht man also die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.*

Andere Formulierungen bezeichnen die Energie als Arbeitsvermögen, Arbeitsvorrat oder gespeicherte Arbeit. Die Arbeit, die verrichtet werden kann, ist dann höchstens gerade so groß wie jene, die an dem Körper selbst verrichtet wurde. Meistens ist sie kleiner, denn Energie kann auch in Wärme umgesetzt werden.
Die SI–Einheit der Arbeit bzw. der Energie ist $1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 1\,\mathrm{Joule} = 1\,\mathrm{J}$. 1 J stimmt mit der elektrischen Energieeinheit überein, d.h. $1\,\mathrm{J} =: 1\,\mathrm{Wattsekunde} = 1\,\mathrm{W}\cdot\,\mathrm{s}$.
Hinweis: Diese Beziehung vermittelt den Zusammenhang zwischen mechanischen und elektrischen Einheiten im SI–System.
Wir wollen nun der Begriff der Arbeit verallgemeinern, denn es ist ungeklärt, was passiert, wenn $\vec{F}(s)$ von s abhängt. Wir betrachten das Arbeitsdiagramm „F(s) gegen s“ für den Fall der Hubarbeit. Dabei finde zunächst eine geradlinige Bewegung statt und die Kraft wirke in Richtung der Bewegung.

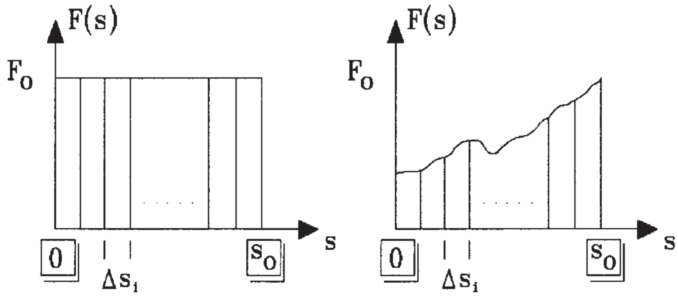

Abbildung 2.10: Arbeitsdiagramm („F(s) gegen s“)

Die gesamte Arbeit, die nötig ist, um den Körper von $s = 0$ nach s_0 unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}(s)$ zu bewegen, erhalten wir aus:

$$W = F_0 \cdot s_0$$

Offenbar lässt sich diese Gesamtarbeit verrichten, indem man den Körper schubweise um Intervalle Δs verschiebt, jedesmal die nötige Arbeit

$$\Delta W = F_0 \cdot \Delta s$$

ausrechnet und über alle Beiträge aufsummiert:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i = F_0 \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i$$

$$= \quad F_0 \cdot s_0$$

Mit dieser Überlegung lässt sich die Arbeit für den allgemeinen Fall einer nicht–konstanten Kraft $\vec{F}(s)$ berechnen. Es ist

$$W = \sum_{\Delta s_i} F(s_i)\Delta s_i$$

für genügend kleine Intervalle Δs_i, so dass sich W bei weiterer Verkleinerung von Δs praktisch nicht mehr ändert. Die mathematisch korrekte Formulierung für die Arbeit lautet somit:

$$W = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{\Delta s_i} F(s_i) \cdot \Delta s_i = \int_0^{s_0} F(s)ds$$

Anschaulich stellt das bestimmte Integral $\int_0^{s_0} F(s)ds$ die Fläche unter der Funktion $F(s)$ zwischen $s = 0$ und s_0 dar.
Es taucht nun aber das Problem auf, was passiert, wenn $\vec{F}(s)$ nicht immer in Richtung von ŝ wirkt (siehe Abbildung 2.11).

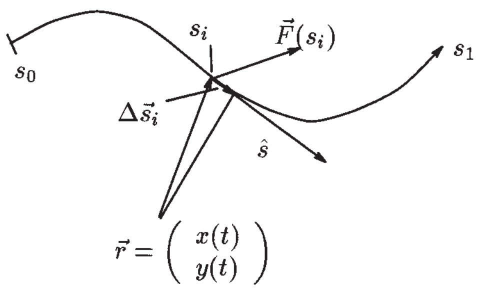

Abbildung 2.11: Gekrümmte Bahnkurven $\vec{r}(t)$

Man findet als allgemeine Formulierung der Arbeit:

$$W = \sum_{\Delta s_i} |\vec{F}(s_i)| \cos(\vec{F}, \Delta\vec{s_i}) |\Delta\vec{s_i}|$$

Diese Formulierung kann nun für beliebige, gekrümmte Bahnkurven $\vec{r}(t)$ verwendet werden, wobei $\Delta\vec{s_i}$ der Vektor der Länge Δs_i und der Richtung der Tangente an die Bahnkurve ist.

Zum Begriff des Linienintegrals:

Die obige Formulierung gilt noch für endlich lange Vektoren $\Delta\vec{s_i}$. Wir wollen nun zu einer infinitesimalen Formulierung übergehen:

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{\Delta s_i} |\vec{F}(s_i)| \cos(\vec{F}(s_i), \Delta\vec{s}_i)|\Delta\vec{s}_i| \\
&= \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{\Delta s_i} \vec{F}(s_i) \cdot \Delta\vec{s}_i \\
&\stackrel{Def.}{=} \int_{(s)} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}
\end{aligned}
$$

Definition 2.18: LINIENINTEGRAL

Als Linienintegral (Wegintegral) bezeichnen wir den Ausdruck:

$$\int_{(s)} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Im allgemeinen Fall kann in einem Linienintegral auch eine andere verktorielle Größe anstelle von $\vec{F}$ stehen. Ein später verwendetes Linienintegral ist $\int_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$, d.h. ein Linienintegral über das elektrische Feld von z.B. einer Ladung. Eine exaktere Formulierung findet sich bei Großmann (Bibliothek).

Erscheinungsformen der mechanischen Energie

- Lageenergie und Hubarbeit:

  Durch Verrichten der Hubarbeit

  $$W = mgh = F_G \cdot h$$

  im Schwerefeld wird die Masse m um die Höhe h angehoben. Sie besitzt dann die Lageenergie $W_L = m \cdot g \cdot h$ und kann selbst eine entsprechend große Arbeit verrichten (z.B.: Wasserrad antreiben).

- Spannungsenergie und Verformungsarbeit:

  Wir stellen fest: Um eine Feder gegen die rücktreibende Federkraft $F = D \cdot x$ zu verformen, d.h. dehnen oder stauchen, muss man die Verformungsarbeit

  $$W = \int_0^{x_0} F(x)dx$$

  verrichten. Dabei ist x_0 die Längenänderung der Felder bei der Verformung. Die Auswertung des Integrals ergibt:

$$W = \int_0^{x_0} F(x)dx = \int_0^{x_0} D \cdot xdx = [\frac{1}{2}Dx^2]_0^{x_0} \Rightarrow W \quad = \quad \frac{1}{2}Dx_0^2$$

Der in der gespannten Feder steckende Arbeitsvorrat liegt in Form von Spannungsenergie vor.

Definition 2.19: POTENTIELLE ENERGIE

Die Lage– und Spannungsenergie sind in einem ruhenden Körper gespeichert und laufen unter dem Oberbegriff potentielle Energie.

Feststellung:

Wenn Arbeit an einem Körper verrichtet wird, so ändert sich seine potentielle Energie. Wesentlich ist die Änderung, nicht der Absolutwert!

Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie

Zum Beschleunigen eines Körpers muss Arbeit gegen seine Trägheit verrichtet werden. Sie ist dann als Bewegungsenergie (kinetische Energie) W_{kin} vorhanden. Wir berechnen die Beschleunigungsarbeit

$$W = \int_0^{s_0} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

für die Beschleunigung eines Massepunktes der Masse m längs des Weges $s = 0$ bis s_0. Für die Kraft gilt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Setzt man diese nun ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{s_0} m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_0^{s_0} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_{t=0}^{t_0} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\
\Rightarrow W &= m \cdot \int_0^{\vec{v_0}} \vec{v} \cdot d\vec{v} \\
&= [\frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2]_0^{\vec{v}_0}
\end{aligned}$$

Als kinetische Energie ergibt sich somit für die Beschleunigung von $V = 0$ auf v_0:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m\vec{v}_0^2$$

Dabei ist $\vec{v}_0$ die Geschwindigkeit, die bei $\vec{s}_0$ zur Zeit t_0 erreicht wird.
Allgemein muss bei der Beschleunigung von $\vec{v}_0$ auf $\vec{v}_1$ die Arbeit

$$\Delta W = \frac{m}{2} \cdot (\vec{v}_1^2 - \vec{v}_0^2)$$

verrichtet werden.

Kinetische oder Bewegungsenergie:

Die zur Beschleunigungsarbeit gleich große kinetische Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m\vec{v}_0^2$$

steht nach der Beschleunigung von $v = 0$ auf $v = v_0$ zur Verfügung.

Äquivalenz von Energie und Masse

Eine wichtige Beziehung zwischen Energie und Masse ergibt sich aus der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse, $m(v)$, nach:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit c^2

$$m(v)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und entwickelt die Wurzel unter der Annahme, dass $\frac{v}{c} \ll 1$ ist, unter Verwendung von

$$(1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$$

allgemein

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$$

erhält man

$$mc^2 \approx m_0 c^2 (1 + \frac{v^2}{2c^2})$$

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{2.9}$$

Der zweite Summand stellt offensichtlich die kinetische Energie der Masse m_0 dar. Auch der erste Summand muss die Form einer Energie haben. Aus Gleichung (2.9) lässt sich folgendes schließen:

1. $E = mc^2$ ist die relativistische Gesamtenergie des Teilchens mit der Ruhemasse m_0.
2. Ein unbewegtes Teilchen ($v = 0$) der Masse m_0 hat die Energie $E = m_0c^2$ (Ruheenergie).
3. Jeder Energie E kann eine Masse $m = \frac{E}{c^2}$ zugeordnet werden und umgekehrt.
4. Die Trägheit ist eine wesentliche Eigenschaft der Masse. Demnach besitzt auch jede Energie diese Eigenschaft.

Kraft als Gradient der potentiellen Energie

Die potentielle Energie kann als V(x,y,z) geschrieben werden. Gesucht sei nun die Kraft $\vec{F}$, welche benötigt wird, um einem Körper die potentielle Energie V(x,y,z) zuzuführen. Die Komponenten dieser Kraft längs der drei Raumrichtungen knnen berechnet werden, indem man die Änderung der potentiellen Energie betrachtet. Z.B. in x-Richtung:

$$\Delta V_x = V(x, y, z) - V(x + \Delta x, y, z)$$

Dieser Änderung entspricht die geleistete Arbeit

$$\Delta W = -\Delta V = F_x \cdot \Delta x$$

Betrachtet man den Grenzübergang von $\Delta x \to 0$, so erhält man:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -F_x = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}$$

Die partielle Ableitung des Potentials V nach x im Punkt (x,y,z) liefert $-F_x$.

Definition 2.20: PARTIELLE ABLEITUNG

Bei der partiellen Ableitung werden beim Differenzieren alle anderen Variablen konstant gehalten.

Man kann also die Kraft $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$ umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (-\frac{\partial V}{\partial x}; -\frac{\partial V}{\partial y}; -\frac{\partial V}{\partial z}) \\ &= -(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}) \end{aligned}$$

Man schreibt dann:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, V(x, y, z) \tag{2.10}$$

Definition 2.21: GRADIENT

Der Vektor ($\frac{\partial V}{\partial x}$; $\frac{\partial V}{\partial y}$; $\frac{\partial V}{\partial z}$) heißt Gradient der Funktion V. Das Symbol für den Gradienten ist grad oder ∇ (sprich: Nabla).

Leistung:

Oft kommt es darauf an, wieviel Zeit zum Verrichten einer bestimmten Arbeit benötigt wird.

Definition 2.22: Leistung

Die Leistung P ist definiert als

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Die SI–Einheit der Leistung ist 1 $J{\cdot}s^{-1} = 1\ \frac{Ws}{s} = 1$ Watt $= 1$ W.

2.2.4 Einführung in die Energieerhaltung

Arbeit kann als Energie gespeichert werden. Diese kann wieder dazu verwendet werden, Arbeit zu verrichten. Wichtig ist, dass Energie nie verloren geht, sondern nur in eine andere Form überführt wird. Z.B.

- chemische Energie in Bewegungsenergie
- Bewegungsenergie in Verformungsenergie
- elektrische Energie in Bewegungsenergie

und auch immer in die andere Richtung.
Später (Kapitel 6) werden wir sehen, dass auch Wärme, die bei solchen Transformationen entsteht, ebenfalls eine Energieform darstellt.
Um den Energiesatz der Mechanik zu erhalten, untersuchen wir nun einen Spezialfall: Die wechselseitige Umsetzung von kinetischer und potentieller Energie am Beispiel eines schwingenden Fadenpendels.

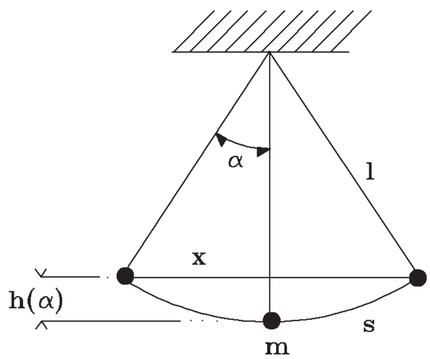

Abbildung 2.12: Skizze zum Fadenpendel

Beim ersten Auslenken aus der Ruhelage wird die Masse gegen die Schwerkraft angehoben. Dabei wird Hubarbeit verrichtet. Die Energie ist in Form von potentieller Energie (Lageenergie) gespeichert.

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h(\alpha)$$

Nach dem Loslassen wird die potentielle Energie in kinetische Energie (Bewegungsenergie) umgesetzt. Diese ist am Nulldurchgang am größten.

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}(t)^2$$

Diese Vorgänge wiederholen sich periodisch.
In den Umkehrpunkten der Bewegung ist jeweils $\dot{s} = |\vec{v}| = 0$. Dort ist die potentielle Energie maximal. Im tiefsten Punkt ist dagegen die potentielle Energie $W_{pot} = 0$. Dabei wurde dieser tiefste Punkt ein wenig willkürlich als Nullpunkt für die potentielle Energie festgelegt. Aber wir wissen ja bereits, dass es nur auf die Änderung der potentiellen Energie ankommt. In diesem tiefsten Punkt ist W_{kin} maximal. Der Energiesatz besagt für einen beliebigen Zeitpunkt t:

Energiesatz

$$W_{pot}(t) + W_{kin}(t) = W_{ges} = konstant$$

für einen beliebigen Zeitpunkt t.

Dieser Satz kann auch gleichwertig formuliert werden als

$$\frac{d}{dt}(W_{kin} + W_{pot}) = 0$$

In Worten:
Die Gesamtenergie ändert sich als Funktion der Zeit nicht.
Man kann nun zeigen, dass für kleine Auslenkungen $s(t)$ in guter Näherung gilt

$$W_{pot}(t) \cong \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \frac{s(t)^2}{l}$$

also eine quadratische Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Auslenkung $s(t)$. Damit lautet der Energiesatz

$$W_{ges} \cong \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot g}{l} \cdot s(t)^2 \qquad (2.11)$$

wobei W_{ges} = konstant.

In der Realität kommt das Pendel nach einiger Zeit zum Stillstand. Grund dafür ist eine Dämpfung (z.B. Luftwiderstand, Reibung etc.). Dabei wird die mechanische Energie in Wärme umgesetzt. $W_{ges}(mech)$ ist nicht mehr konstant, sondern nimmt als Funktion von t ab.
Bilden wir die zeitliche Ableitung von Gleichung (2.11), erhalten wir die Schwingungsgleichung.

$$\frac{dW_{ges}}{dt} = \frac{1}{2}m \cdot 2 \cdot \ddot{s}(t) \cdot \dot{s}(t) + \frac{1}{2}\frac{m \cdot g}{l} \cdot 2 \cdot s(t) \cdot \dot{s}(t) = 0$$

$$\ddot{s}(t) + \frac{g}{l} \cdot s(t) = 0 \tag{2.12}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung beschreibt das zeitliche Verhalten von $s(t)$, als die periodische Bewegung der Masse m um ihre Ruhelage. Offenbar ist

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \tag{2.13}$$

Wobei $\omega^2 = g/l$, s_0 die Amplitude und φ die Phasenlage der Schwingung angibt. Genaueres siehe Kapitel Schwingungen.

2.3 Grundzüge der Relativitätstheorie

2.3.1 Relativitätstheorie: Kinematik

Einführung

1. Alle kinematischen Angaben gelten für ein vorgegebenes Bezugssystem.
2. Bei der Beschreibung durch ein anderes Koordinatensystem müssen die kinematischen Größen umgerechnet werden.

   z.B.: Wenn zwei Koordinatensysteme relativ zueinander ruhen, müssen nur die Ortskoordinaten transformiert werden. Bei gegeneinander bewegten Systemen müssen auch andere Größen beachtet werden.
3. Bei kleinen Relativgeschwindigkeiten (klein gegen c) kann die Galilei-Transformation verwendet werden.
4. Bei großen Geschwindigkeiten (groß gegen c) muss die Lorentz-Transformation verwendet werden.

Galilei-Transformation

$\vec{v}$ ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Koordinatensysteme. Offenbar ist:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v} \cdot t; \quad t' = t$$

Die Koordinaten transformieren sich also folgendermaßen:

Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x - v \cdot t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2.14}$$

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung gilt:

$$\begin{aligned} \vec{u'} &= \vec{u} - \vec{v} \\ \vec{a'} &= \vec{a} \end{aligned}$$

Das Michselson-Morley-Experiment

Von zwei gleich guten Schwimmern soll :

A quer über den Fluss mit Breite L schwimmen und wieder zurück.

B eine gleich lange Strecke L flussabwärts und wieder hinauf schwimmen.

Die Frage ist, wer zuerst wieder am Ausgangspunkt ist.
A gewinnt mit einem Zeitvorsprung von

$$\Delta t = \frac{L}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

wobei v die Strömungsgeschwindigkeit und c die Geschwindigkeit des Schwimmers ist. Drehen wir nun die Richtungen der Schwimmer um 90°, vertauschen A und B ihre Rollen und B gewinnt. Dieses Experiment wurde auch mit Lichtwellen durchgeführt.

Anwendung der Galilei-Transformation auf die Bewegung des Lichts

Bewegt sich das System S' mit v gegen das System S, so erwartet man unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten.

- $c - v$ wenn $c \parallel v$
- $c + v$ wenn $c \parallel -v$
- $\sqrt{c^2 - v^2}$ wenn $v \perp c$

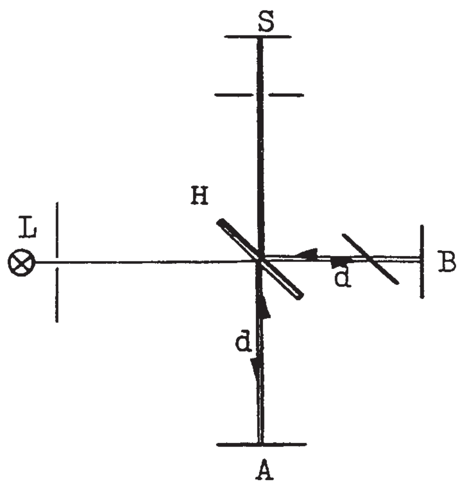

Abbildung 2.13: Interferometer von Michelson und Morley

Der bedeutendste Versuch diesen Unterschied optisch festzustellen, ist das Experiment von Michelson und Morley.
Monochromatisches Licht wird in zwei Teilstrahlen A und B aufgespalten. Diese werden wieder zusammengeführt und interferieren im Detektor S. Je nach Phasenunterschied, bedingt durch die Wegdifferenz A - B, verstärken oder schwächen sich die interferierenden Teilstrahlen.
Eine zusätzliche Phasendifferenz würde auftreten, wenn sich das Licht längs A und B unterschiedlich schnell bewegen würde. Die Geschwindigkeit längs B wäre $c-v$ in die eine Richtung und $c+v$ in die andere. Für A gilt immer $u = \sqrt{c^2 - v^2}$. Als bewegtes System wurde die Erde benutzt ($v \approx 30\,\mathrm{km/s}$ bezüglich der Sonne). Dreht man nun die Apparatur um 90°, so bewegt sich A mit der Erde und B quer dazu. Analog zu den Schwimmern müsste dies das Ergebnis verändern. Eine solche Veränderung konnte aber nicht beobachtet werden.
Das Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments war somit:

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Der Betrag der Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig von der Bewegung des Bezugssystems

Offenbar erscheinen auch dem mit v bewegten Beobachter die Wellenfronten als Kugeln:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \end{aligned}$$

Die Konsequenz der Invarianz von c ist, dass die Zuordnung der Koordinaten des Raumes und der Zeit statt durch die Galilei-, durch die Lorentz-Transformation erfolgt.

Lorentz-Transformation

Für eine Bewegung in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v gilt:

Lorentz-Transformation

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Ist v klein gegenüber c, geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.
Wesentliche Folgerungen aus der Lorentz-Transformation sind:

- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist die obere Grenze aller Geschwindigkeiten für die Ausbreitung eines beliebigen Signals.
- Zeitdilatation: Im System S' verlangsamt sich, aus Sicht eines Beobachters in S, der Zeitablauf von Vorgängen.
- Längenkontraktion: Die Längen in S' wirken für den Beobachter in S verkürzt.

Qualitative Diskussion des Michselson-Morley-Experiments

Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Systemen die Grenzgeschwindigkeit. Um diese Bedingung zu erfüllen, können bewegte Körper für den Beobachter verkürzt wirken (Längenkontraktion) oder die Zeit scheint langsamer zu vergehen (Zeitdilatation).
Um diese Phänomene berücksichtigen zu können, muss der Ansatz für die Transformation verallgemeinert werden:

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma(x' + vt') \qquad \text{bei Bewegung in x-Richtung bzw.} \\
x' &= \gamma(x - vt)
\end{aligned}
$$

γ und der Zusammenhang zwischen t und t' muss so gewählt werden, dass $c = c'$ gilt.
Setzt man die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
x &= c \cdot t \\
x' &= c \cdot t'
\end{aligned}
$$

in die obrigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + vt') &&= \gamma(c+v)t' \\ ct' &= \gamma(ct - vt) &&= \gamma(c-v)t \end{aligned}$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen

$$c^2 tt' = \gamma^2(c^2 - v^2)tt'$$

ergibt sich für γ:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.16}$$

2.3.2 Relativistische Dynamik

Es ist vernünftig zu fordern, dass die Grundgleichung der Dynamik auch bei großen Geschwindigkeiten ihre Form behält.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} \qquad \text{mit} \quad \vec{p} = m(v)\vec{v}$$

Diese Forderung ist erfüllt, wenn

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens.
Mit dem folgenden Gedankenexperiment kann man sich das Verhalten von m(v) vorstellen:
Zwei Raketen R_1 und R_2 werden von einem Startturm S aus auf die Endgeschwindigkeiten v beziehungsweise $-v$ gebracht. Der Schwerpunkt des Systems R_1-R_2 bleibt der Startturm.
Von R_1 aus entfernt sich S mit der Geschwindigkeit v. Die Rakete R_2 entfernt sich jedoch nicht mit $2v$, sondern mit der kleineren Geschwindigkeit

$$w = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{(relativistische Addition von Geschwindigkeiten)}$$

Der Beobachter in R_1 stellt also fest, dass S immer näher bei R_2 als bei R_1 liegt (obwohl S der Schwerpunkt ist).
Dies ist ist nur dadurch zu erklären, dass R_2 eine größere Masse als R_1 hat.

Diskussion

Ein Teilchen mit $m_0 \neq 0$ kann nie Lichtgeschwindigkeit erreichen, da die Arbeit zu seiner Beschleunigung gegen Unendlich geht.

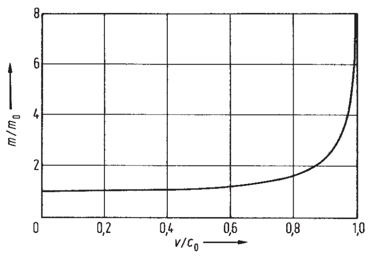

Abbildung 2.14: Relativistische Massezunahme

Ein Photon besitzt keine Ruhemasse. Es muss sich daher mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Kapitel 3

Wechselwirkungen und Felder

3.1 Übersicht

Alle bekannten Kraftwirkungen lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückführen.

- Allgemeine Massenanziehung (Gravitationswechselwirkung):

  Sie wirkt zwischen je zwei beliebigen Massen z.B. Planetenbewegung im Kraftfeld der Sonne, Gravitationskraft an Erdoberfläche. Das geltende Kraftgesetz hat eine unendliche Reichweite:

  $$|\vec{F}_G| \propto \frac{1}{r^2}$$

- Coulomb–Wechselwirkung:

  Sie wirkt zwischen je zwei Ladungen. Chemische Prozesse, der Zusammenhalt der Materie u.v.a. beruhen auf ihr. Das Kraftgesetz hat zwischen zwei ruhenden Ladungen wiederum eine unendliche Reichweite.

  $$|\vec{F}_C| \propto \frac{1}{r^2}$$

- Starke Wechselwirkung (Kernkraft):

  Sie bewirkt die Kräfte zwischen den Elementarteilchen im Atomkern, d.h. Protonen, Neutronen („Nukleonen“). Sie sind die Ursache für die Strahlungsenergie der Sonne. Ihre Reichweite ist von der Größenordnung des Kernradius.

- Schwache Wechselwirkung:

  Sie ist maßgebend bei der Umwandlung von Elementarteilchen. Ein Beispiel ist der β-Zerfall, wo sich ein Neutron in ein Proton umwandelt und dabei ein Elektron und ein (Anti-)Neutrino emittiert. Elektronen und Neutrinos (und einige weitere Teilchen) fasst man unter dem Oberbegriff „Leptonen“ zusammen. Ein weiteres Beispiel ist der Brennprozess der Sonne. Er wird durch die Verschmelzung von zwei Protonen zu einem Deuterium-Kern (^2D) gesteuert. Dabei entstehen als Leptonen ein Positron (e^+) und ein Neutrino. Die Reichweite der schwachen Wechselwirkung ist noch kürzer als jene der Kernkräfte.

Zusammenfassung:
Nur bei der Gravitation und der elektromagnetischen Kraft können sich die Kräfte vieler Teilchen zu einer makroskopisch messbaren Kraft überlagern. Deshalb spielen auch nur diese beiden Wechselwirkungen in dieser Vorlesung eine Rolle.

3.2 Gravitationswechselwirkung

Die Beobachtung der Planetenbahnen um die Sonne lieferte die Kepler'schen Gesetze:

Kepler'sche Gesetze

- *1. Kepler'sches Gesetz (1609):*

  Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
- *2. Kepler'sches Gesetz (1609):*

  Der Radiusvektor Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- *3. Kepler'sches Gesetz (1619):*

  Die Quadrate der Umlaufzeiten T_i der Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen ihrer großen Bahnhalbachse a_i:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Diskussion:
Das 2. Kepler'sche Gesetz zeigt an, dass es sich bei der Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet um eine Zentralkraft handelt. Es ist eine Umschreibung des Drehimpulserhaltungssatzes.

Beweis:
Stellt man die Fläche ΔA als Vektorprodukt dar

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times \Delta\vec{s}]$$

und verwendet $\Delta\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$ so folgt

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times \vec{v}] \cdot \Delta t$$

Über die Formulierung des Drehimpulses $m[\vec{r} \times \vec{v}] = \vec{L}$ erhält man

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \vec{L} \cdot \Delta t$$

Die Richtung der aufgespannten Fläche ΔA ist durch ihren Normalenvektor gegeben. Wenn $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ also konstant ist, so ist auch $\vec{L}$ konstant. Das 1. Keplersche Gesetz besagt, dass die Bahnen eben sind. Damit ist auch die Richtung des Drehimpulses konstant.
Offenbar folgt aus

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

dass $\vec{M}$ verschwinden muss, wenn $\vec{L}$ konstant ist. Mit $\vec{r}$ als Radiusvektor Planet–Sonne und der zwischen den Körpern wirkenden Kraft $\vec{F}$ gilt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Damit das Drehmoment verschwindet, muss $\vec{F} \parallel \vec{r}$ sein. Das bedeutet, dass $\vec{F}$ eine Zentralkraft ist, also immer in Richtung des Kraftzentrums (hier der Sonne) zeigt.

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \hat{r}$$

Die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ hält den Planeten (Masse m_p) also gegen seine Trägheit auf der Ellipsenbahn. Für den Spezialfall einer Kreisbahn gilt dann

$$|\vec{F}| = m_p \cdot \omega_p^2 \cdot r_p = \frac{4\pi^2}{T_p^2} \cdot m_p \cdot r_p$$

denn es gilt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

Mit dem 3. Kepler'schen Gesetz folgt

$$|\vec{F}_G| = \frac{4\pi^2}{T_p^2} \cdot m_p \cdot r_p = \frac{4\pi^2 \cdot m_p}{\text{konst.}} \cdot \frac{r_p}{r_p^3} \propto \frac{m_p}{r_p^2}$$

oder allgemeiner in vektorieller Schreibeweise

$$\vec{F}_G(\vec{r}) \propto \frac{m}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Nach dem 3. Newton'schen Axiom muss $|\vec{F}_G|$ auch proportional zu M_s (Masse der Sonne) sein. Daher gilt das

Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r^2} \cdot \hat{r} \tag{3.1}$$

Gravitationskonstante G:

Sie muss durch direkte Messung der Gravitationskraft $|\vec{F}_G|$ zwischen zwei bekannten Massen bestimmt werden. Im Prinzip wird dabei die Beschleunigung der kleinen Masse m durch die Massenanziehung der großen Masse M gemessen (Gravitationswaage nach Cavendish).

Gravitationswaage:

Die Masse m_i erfährt während der Messzeit t eine praktisch konstante Beschleunigung $\vec{a}$, die durch die Gravitation hervorgerufen wird. $|\vec{a}|$ ist zu berechnen aus

$$\begin{aligned} F_i &= m_i \cdot a = |\vec{F}_G| \\ &= G \cdot M \cdot \frac{m_i}{R^2} \\ &\approx G \cdot M \cdot \frac{m_i}{d^2} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Man misst über die Verdrillung um α den Weg Δx eines Lichtzeigers. Dieser führt offenbar eine beschleunigte Bewegung aus

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Der derzeitiger Bestwert der Gravitationskonstante ist

$$G = 6.673(\pm 0.003) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

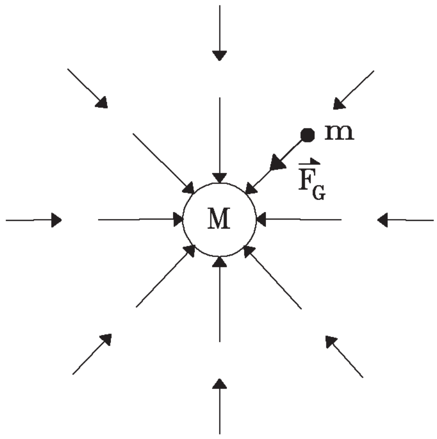

Abbildung 3.1: Skizze zur Gravitationskraft

Gravitationsfeld und Gravitationsfeldstärke:

Eine Masse M verändert den sie umgebenden Raum, indem sie ein Gravitationsfeld $\vec{g}$ erzeugt. Eine Probenmasse m erfährt eine Kraft $\vec{F}_G$, die sich aus der am Ort von m herrschenden Feldstärke $\vec{g}$ ergibt.

Definition 3.1: GRAVITATIONSFELDSTÄRKE

Die Gravitationsfeldstärke $\vec{g}$ ist gegeben durch

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

als Quotient aus Kraft $\vec{F}_G$ (auf die Probenmasse m) und Masse m des Probekörpers.

Es stellt sich nun die Frage, wie man das Gravitationsfeld $\vec{g}$ ausmisst. Man „tastet" dazu das $\vec{g}$-Feld um eine Massenverteilung ab, indem man für alle Orte $\vec{r}$ in ihrer Nachbarschaft die Kraft $\vec{F}_G(\vec{r})$ misst. Dann erhält man $\vec{g}$ nach Division durch m zu:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

Aufgrund der Grundgleichung der Dynamik ist im Falle der Gravitation die durch $\vec{F}_G$ bewirkte Beschleunigung $\vec{a}$ gerade gleich der Gravitationsfeldstärke $\vec{g}$. An der Erdoberfläche gilt dann

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{G \cdot M_E}{R_E^2} \cdot \hat{r} = \vec{g}$$

Der Betrag von $|\vec{g}|$ ist etwa 9.81 ms^{-2}.

Berechnung von Feldverteilungen um Massen mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes

Ausgehend von der Definition von $\vec{g}$ berechnet man das Integral

$$\int_{(Kugel)} \vec{g} \cdot d\vec{A}$$

über die Oberfläche einer Kugel mit Radius R$_p$. Aus Symmetriegründen und unter Verwendung von $\vec{g}(\vec{R}_p) = -\frac{GM}{R_p^3} \cdot \hat{R}_p$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{(Kugel)} \vec{g} \cdot d\vec{A} &= |g(\vec{R}_p)| \cdot 4\pi R_p^2 \\
&= -\frac{GM}{R_p^2} \cdot \int_{(Kugel)} \hat{R} \cdot d\vec{A} \\
&= -\frac{GM}{R_p^2} \cdot 4\pi R_p^2 \\
\Rightarrow \int_{(Kugel)} \vec{g} \cdot d\vec{A} &= -4\pi \cdot G \cdot M \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis stellt einen Zusammenhang zwischen einem Feld und der es erzeugenden „Quelle“ dar. Offenbar hängt das Ergebnis nicht von der Form der Hüllenfläche oder der Form der eingeschlossenen Massenverteilung ab. Nimmt man eine allgemeine Massenverteilung $M = \int_{(\text{Körpervolumen})} \rho(\vec{R}) \cdot dV$ an, so lässt sich Gleichung (3.2) folgendermaßen verallgemeinern:

Gauss'sches Theorem

$$\int_{(\textit{Hüllfläche})} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi \cdot G \cdot M \qquad (3.3)$$

wobei

$$M = \int \rho(\vec{R}) \cdot dV$$

Mit diesen Erkenntnissen kann die Berechnung von $\vec{g}$ erfolgen:

Vollkugel mit homogener Masseverteilung

D.h. $\rho =$ konstant. Der Kugelradius sei R_K.

1. Außenraum:

   Im Aufpunkt R_p wirkt $\vec{g}(\vec{R_p})$. Integriert man über eine Hohlkugel mit Radius R_p welche die Vollkugel umschließt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |\vec{g}(\vec{R_p})| \cdot 4\pi R_p^2 &= -4\pi \cdot G \cdot M \\ g(R_p) &= -\frac{GM}{R_p^2} \end{aligned}$$

   Das Feld im Außenraum ist also identisch mit jenem, dass entstehen würde, wenn die gesamte Masse im Punkt $R_p = 0$ konzentriert wäre.

2. Innenraum ($R_i < R_K$):

   Die Hüllenfläche umschließt in diesem Fall nur die Masse $M \cdot \frac{R_i^3}{R_K^3}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |\vec{g}(\vec{R_p})| \cdot 4\pi R_i^2 &= -4\pi \cdot G \cdot M \cdot \frac{R_i^3}{R_K^3} \\ g(R_i) &= -G \cdot M \cdot \frac{R_i}{R_K^3} \end{aligned}$$

Hohlkugel mit homogener Masseverteilung an der Oberfläche

1. Innenraum:

   Im Innenraum verschwindet $\vec{g}$, da die eingeschlossene Masse 0 ist.

$$g(\vec{\vec{R_i}}) \equiv 0 \quad \text{für} \quad |\vec{R_i}| < R_K$$

2. Außenraum:

   Das Feld ist identisch mit jenem einer bei $R = 0$ konzentrierten Punktmasse mit der Gesamtmasse der Hohlkugel.

Zusammenhang von Arbeit und Gravitationsfeld

Die Arbeit W lässt sich aus der Differenz der potentiellen Energie eines Körpers an zwei verschiedenen Orten berechnen.

$$W = E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2)$$

Der Nullpunkt kann willkürlich im Unendlichen festgelegt werden.

$$E_{pot}(|\vec{r}_2| \to \infty) = 0$$

Damit ergibt sich aus

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = GmM(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

für die potentielle Energie in $\vec{r}_1 = \vec{r}$ $(r_2 = \infty)$

$$E_{pot} = -\frac{GmM}{r}$$

E$_{pot}$ ist überall negativ. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung vom Kraftzentrum ab. Das bedeutet, dass die Bindung an das Kraftzentrum mit wachsendem Abstand abnimmt.

Definition 3.2: GRAVITATIONSPOTENTIAL

Das Potential ist die auf die Einheitsmasse bezogene potentielle Energie.

$$V(\vec{r}) = \frac{E_{pot}}{m} = -\int_{\infty}^{r} \vec{g}(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Bemerkungen:

- Flächen gleichen Potentials heißen Äquipotentialflächen (z.B. Kugeln um eine felderzeugende Masse).
- $\vec{g}(\vec{r})$ durchsetzt die Äquipotentialflächen senkrecht.
- Bei der Bewegung auf einer Äquipotentialfläche wird keine Arbeit verrichtet.
- Wegen $\vec{F} = -\text{grad}\, E_{pot}$ gilt auch $\vec{g} = -\text{grad}\, V$.

3.3 Coulomb-Wechselwirkung

3.3.1 Coulomb-Kraftgesetz

Es gibt Kräfte, welche sich nicht auf die Gravitationswechselwirkung zwischen Massen zurückführen lassen, z.B. Reibungselektrizität. Es stellt sich die Frage, warum elektrische Kräfte bei der Wechselwirkung makroskopischer Körper keine Rolle spielen. Die Erklärung ist darin zu finden, dass diese Körper im allgemeinen neutral sind, weil sich die elektrischen Ladungen unterschiedlicher Vorzeichen kompensieren.

Interpretation zur Reibungselektrizität:

Die Aufladung zweier Stäbe z.B. Hartgummi– und Glasstab, durch Reiben erfolgt durch die Trennung der Ladungen. Die Berührung von Körpern kann zur Übertragung von Ladung führen. Sie enthalten anschließend einen Überschuss an Ladungen gleichen Vorzeichens. Diese stoßen sich ab und sammeln sich an der Oberfläche des Körpers.

Ladungen aus der Steckdose:

An den Polen einer Steckdose kann Ladung abgenommen werden. Handelt es sich um eine Gleichstromquelle, so hat die Ladung immer dasselbe Vorzeichen. Bei einem Wechselstromnetz dagegen nimmt man abwechselnd positive und negative Ladung auf, denn an den Polen ändert sich das Vorzeichen der bereitgestellten Ladung periodisch. In Deutschland beträgt die Wechselfrequenz 50 Hz.

Eigenschaften elektrischer Ladung:

- Es gibt zwei Arten von Ladungen: positive und negative Ladungen
- Ladung ist an Materie gebunden.
- Ladungen verschiedenen Vorzeichens können sich kompensieren, wenn sie gleich groß sind.
- Ladung tritt nur in ganzzahligen Vielfachen einer Elementarladung auf, d.h. Ladung ist gequantelt.
- Der Wert der Elementarladung ist nicht vom Bewegungszustand des Ladungsträgers abhängig.

Elektrisches Feld :

Die elektrische Kraft ist eine Folge der felderzeugenden Ladung Q. Mit Hilfe einer Probeladung q kann in der Umgebung der felderzeugenden Ladung die Kraft $\vec{F}_{el}$ gemessen werden. Alle Kraftvektoren $\vec{F}_{el}(\vec{r})$ ergeben zusammen das Kraftfeld in der Umgebung der Ladung.

Definition 3.3: Elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist definiert als der Quotient aus der Kraft $\vec{F}_{el}$ (auf eine Probeladung q) und der Ladung q dieser Probeladung:

$$\vec{E} = \frac{\textit{Kraft auf die Probeladung}}{\textit{Ladung der Probeladung}} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

$\vec{E}$ ist immer von der positiven Ladung weggerichtet.

Bemerkung:
Als Folge der Definition 3.3 gilt, dass bei einer positiven Probeladung q die Kraft $\vec{F}_{el}$ und das Feld $\vec{E}$ die gleiche Richtung haben.

Coulomb–Gesetz:

Die Vermessung von $\vec{E}$ liefert für die Kraft zwischen der Probeladung und der felderzeugenden Ladung, soweit beide Ladungen als punktförmig aufgefasst werden können:

- Sie ist proportional zum Produkt aus q (Probeladung) und Q (felderzeugende Ladung).
- Sie ist proportional zum Kehrwert des Quadrats des Abstandes der Ladungsschwerpunkte.
- Sie ist radial gerichtet.

Aus diese Eigenschaften formuliert man das

Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \hat{r} \tag{3.4}$$

Der Einheitsvektor $\hat{r}$ ist von Q nach q gerichtet. Haben also die Ladungen Q und q das gleiche Vorzeichen, so wird q von Q abgestoßen. Die Proportionalitätskonstante zwischen $|\vec{F}_{el}|$ und $\frac{q \cdot Q}{r^2}$ wird im SI–System in der Form $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}$ geschrieben.

Definition 3.4: Elektrische Feldkonstante

Die Konstante ε_0 heißt elektrische Feldkonstante oder auch Influenzkonstante.

Die Größe von ε_0 wird experimentell bestimmt, nachdem man die Einheit der Ladung festgelegt hat. Dies erfolgt im SI–System aus messtechnischen Gründen über die elektrische Stromstärke I, deren SI–Einheit 1 Ampère ist. Die Stromstärke I ist die Ladung dQ, die pro Zeit dt durch eine Fläche transportiert wird: $I = \frac{dQ}{dt}$.

Definition 3.5: COULOMB

Die Einheit der Ladung 1 A·s erhält die Abkürzung 1 Coulomb = 1 C

Aufgrund dieser Definition ergibt sich experimentell für die elektrische Feldkonstante:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

Bemerkungen:
Die Ladungsmenge von 1 C ist eine gigantische Ladung.
Beispiel:
Für $q = Q = 1\,\mathrm{C}$ und den Abstand $r = 1\,\mathrm{m}$ ergibt sich aus dem Coulomb-Gesetz:

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{1\,\mathrm{C} \cdot 1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{m}^2} \approx 10^{10}\mathrm{N}$$

Besonders im atomaren Bereich hat man es mit Vielfachen der Elementarladung $\mathrm{e}_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ und damit mit viel kleineren Kräften zu tun. Allerdings sind auch die Abstände zwischen den wechselwirkenden Teilchen viel kleiner ($\approx 10^{-10}\,\mathrm{m}$).

Richtung der Coulomb–Kraft

Die Coulomb-Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungsschwerpunkte. Sie ist anziehend für ungleichnamige Ladungen:

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Der Vektor $\hat{r}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Verbindung der Ladungsschwerpunkte von Q_1 und Q_2.

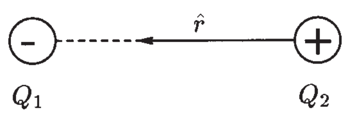

Abbildung 3.2: Richtung der Coulomb–Kraft.

3.3.2 Gauß'sches Gesetz

Das von Q erzeugte Feld $\vec{F}$ ist ein Maß für die Größe der Ladung. Die Anzahl der Feldlinien durch eine Fläche $\vec{A}$ wächst mit der Größe von Q.

Definition 3.6: Elektrischer Fluss

> *Der elektrische Fluss ψ durch eine beliebige Fläche $\vec{A}$ ist gegeben durch:*
> $$\psi = \varepsilon_0 \int \vec{E} d\vec{A}$$

Man erhält den gesamten, von einer Ladung Q ausgehenden Fluss, indem man über eine Q umgebende Hüllfläche integriert.

Spezialfall einer Punktladung Q

Die Hüllfläche sei eine Kugel mit Radius R in deren Mittelpunkt sich die Punktladung befindet.
Auf der Kugeloberfläche ist

$$|\vec{E}(\vec{R})| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

Einsetzen in Gleichung (3.6) ergibt:

$$\varepsilon_0 \int_{(K)} \vec{E} d\vec{A} = \frac{\varepsilon_0 \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{R^2}$$

Das Ergebnis

$$\varepsilon_0 \int_{(K)} \vec{E} d\vec{A} = Q$$

nennt man das Gauß'sche Gesetz.
In dieser Beziehung tritt weder die Form der Hülle noch die Zusammensetzung von Q auf. Sie lässt sich also auf beliebige Hüllflächen und Ladungsanordnungen verallgemeinern:

Gauß'sches Gesetz

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \varepsilon_0 \int_{(Hüllfläche)} \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{3.5}$$

Diese Beziehung ist völlig analog zu jener für eine Massenverteilung (siehe Gleichung (3.3), Seite 52).
Die dort durchgeführten Berechnungen können ebenfalls übernommen werden:

Homogen geladene Vollkugel:

Im Außenraum ist das Feld gleich jenem von einer gleichstark geladenen Punktladung. Im Innenraum geht $\vec{E}$ linear gegen 0.

Homogen geladene Hohlkugel:

Im Außenraum ist das Feld gleich jenem von einer gleichstark geladenen Punktladung. Im Innenraum verschwindet $\vec{E}$.

Verallgemeinerung:

Man kann für die Ladung Q schreiben:

$$dQ = \rho_e(\vec{r}) \cdot dV$$

Definition 3.7: LADUNGSDICHTE

> $\rho_e(\vec{r})$ *heißt Ladungsdichte im Ort* $\vec{r}$*.*

Die Gesamtladung ist dann:

$$Q = \int_{(V)} \rho_e(\vec{r}) \cdot dV$$

V ist das Volumen der Hüllfläche, welche die Ladungsverteilung umschließt. Man schreibt dann das Gauß'sche Gesetz in folgender Form:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{(V)} \rho_e(\vec{r}) \cdot dV = \int_{(H)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \tag{3.6}$$

Definition 3.8: 1. MAXWELL GLEICHUNG

> *In der Form von Gleichung (3.6) heißt das Gauß'sche Gesetz 1. Maxwell Gleichung.*

3.3.3 Elektrische Felder von Ladungsverteilungen

Für eine Punktladung Q erhält man das elektrische Feld, indem man im Coulomb–Gesetz durch die Probeladung q dividiert:

$$\vec{E}_{el} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Die Feldlinien sind überall radial gerichtet. Dabei zeigt das Feld immer von der positiven Ladung weg.

Abbildung 3.3: Richtung der Feldlinien

3.3.4 Elektrischer Dipol

Definition 3.9: Elektrischer Dipol

Eine Anordnung aus positiver Ladung q und gleich großer negativer Ladung -q im Abstand d heißt elektrischer Dipol.

Definition 3.10: Elektrisches Dipolmoment

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{d}$$

heißt elektrisches Diplomoment

$\vec{d}$ ist dabei der Vektor von -q nach +q.

Das elektrische Feld eines Dipols erhält man durch vektorielle Addition der von den Einzelladungen erzeugten Feldern. Für Entfernungen $r \gg d$ ergibt sich dabei für den Betrag $|\vec{E}_{Dp}|$

$$E_{Dp} = f \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{p_e}{r^3}$$

Der Faktor f steht dabei für einen Zahlenwert, der vom Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{d}$ abhängt.

Elektrische Dipole sind für viele Wechselwirkungen von Bedeutung. Zwar sind makroskopische Stoffe meist elektrisch neutral, doch können bei mikroskopischer Betrachtung die Ladungsschwerpunkte von positiver und negativer Ladung an verschiedenen Stellen liegen. Das entstehende Feld ist somit ein Dipolfeld.

Verallgemeinerung auf N Punktladungen

Bei einer Anordnung von N Punktladungen ergibt sich das Feld $\vec{E}(\vec{r}_p)$ durch vektorielle Überlagerung der Einzelfelder.

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = \sum_{i=1}^{N} E_i(\vec{r}_p)$$

$$= \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|^3}$$

Bei Vorliegen einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ gilt

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\int \rho(\vec{r}') \cdot dV}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}')$$

3.3.5 Elektrische Spannung

Wir berechnen die Arbeit W_{12} die verrichtet werden muss, um eine Ladung gegen die elektrische Kraft $\vec{F}_{el} = +q \cdot \vec{E}$ vom Ort $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu verschieben.

$$W_{12} = -\int_1^2 \vec{F}_{el} d\vec{r} = -q \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}$$

Man kann noch zeigen, dass W_{12} unabhängig vom Weg zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist (konservatives Kraftfeld).

Definition 3.11: ELEKTRISCHE SPANNUNG

Die Größe U gemäß der folgenden Definition heißt elektrische Spannung zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ im Feld $\vec{E}$.

$$U = \frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r}$$

Die Dimension der Spannung ist Arbeit/Ladung. Die SI–Einheit der Spannung ist 1 Nm/C = 1 Volt = 1 V.

Sie ist der Quotient aus der entlang der Strecke von $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ (siehe Abbildung 3.4) verrichteten Arbeit W_{12} und der Ladung q.

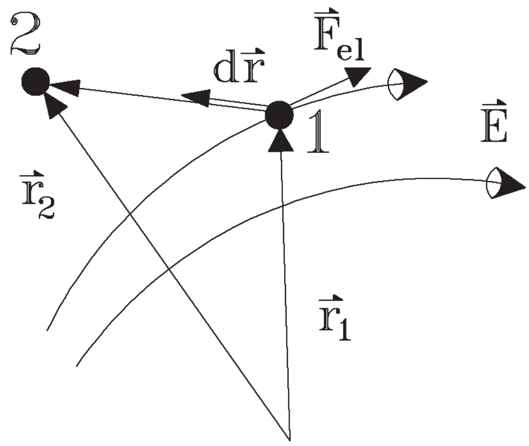

Abbildung 3.4: Darstellung zur Spannung U.

Um eine Probeladung q in sehr große Entfernung zu einer sie beeinflussenden Ladungsverteilung zu bringen, ist i.a. keine unendlich große Arbeit nötig. Umgekehrt hat eine Ladung, die aus dem Unendlichen zu einem Punkt P gebracht wird, eine potentielle Energie:

$$E_{pot} = -W_{P\to\infty}$$

Dabei ist $W_{P\to\infty}$ die Arbeit, die verrichtet werden muss, um q vom Punkt P ins Unendliche zu bringen. Man definiert nun den Begriff des elektrischen Potentials eines Punkte P bezüglich eines Punktes im Unendlichen:

Definition 3.12: ELEKTRISCHES POTENTIAL

$$\varphi_{el}(P) = \frac{W_{pot}}{q} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} d\vec{r}$$

φ_{el} heißt elektrisches Potential.

Wichtige Konsequenz:
Offenbar ist die Potentialdifferenz $\varphi_{el}(B) - \varphi_{el}(A)$ gleich der Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B.

Zusammenhang zwischen elektrischem Potential und der Feldstärke

In der Mechanik haben wir bereits gesehen, dass bei vorgegebener potentieller Energie, d.h. bei vorgegebenem Gravitationspotential, die Feldstärke und damit auch die Kraft durch Gradientenbildung erhalten wird. Analog erhält man bei vorgegebenem elektrischen Potential als Funktion des Ortes, $\varphi_{el}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ als den negativen Gradienten von φ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi_{el}(\vec{r})$$

3.3.6 Kapazität

Wir betrachten zwei Leiter, zwischen denen ein elektrisches Feld besteht.

Definition 3.13: KONDENSATOR

Die oben beschriebene Anordnung heißt Kondensator.

Die Voraussetzung für das elektrische Feld ist dabei, dass die Ladungen zuvor getrennt wurden, also z.B. Ladungen von dem einen zum anderen Leiter transportiert wurden.
Uns interessiert nun der Zusammenhang zwischen den Ladungen auf den Leitern und dem zwischen ihnen bestehenden elektrischen Feld oder genauer zu der zwischen Leitern herrschenden Spannung. Wir verwenden das Gauß'sche Gesetz (siehe Gleichung (3.5)):

$$\int_{(A)} \vec{D} d\vec{A} = \sum Q_i$$

Dabei ist (A) eine Hüllfläche, die die Ladungen Q_i umschließt. Offenbar ist $|\vec{D}| = \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|$ proportional zu $Q = \sum Q_i$. Wir verwenden nun die Definitionsgleichung der Spannung U (siehe Gleichung (3.11)):

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$$

Die Spannung U ist offenbar proportional zu Q, da Q proportional zu $|\vec{E}|$ ist. Es ergibt sich, dass bei einem Kondensator Spannung und Ladung zueinander immer proportional sind.

Konsensator-Gleichung

$$Q = C \cdot U \tag{3.7}$$

Definition 3.14: KAPAZITÄT

> *Die Größe C heißt Kapazität des Kondensators und ist eine für die Leiteranordnung charakteristische Größe. C gibt an, wieviel Spannung zwischen den Leitern anliegt, wenn eine bestimmte Ladungsmenge aufgebracht wurde.*

Die SI–Einheit ist gemäß der Dimension Ladung/Spannung gleich $1\,\mathrm{C/V} = 1\,\mathrm{F}$, wobei F für Farad (von Faraday) steht. Technisch realisierbare Kapazitäten liegen meist im Bereich 10^{-9} bis 10^{-12} F d.h. nF (Nanofarad) bis pF (Picofarad).
Beispiel: Plattenkondensator
Er ist aus zwei parallele Metallplatten aufgebaut, die sich in geringem Abstand d befinden. Die Feldstärke $|\vec{E}|$ ist überall konstant, da $\vec{E}$ ein homogenes Feld ist. Die Definition der Spannung liefert :

$$U = E \cdot d$$

Das Gauß'sche Gesetz liefert bei der Wahl der Hüllfläche gemäß Abbildung 3.5

$$Q = \varepsilon_0 \int \vec{E} d\vec{A} = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A$$

Wenn A die innere Oberfläche der Kondensator–Platten ist und nur innen ein Feld existiert, so gilt:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

Für die Kapazität C des Plattenkondensators ergibt sich somit:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{E \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$$

Technische Bedeutung von Kondensatoren:
Kondensatoren haben technische Bedeutung erlangt

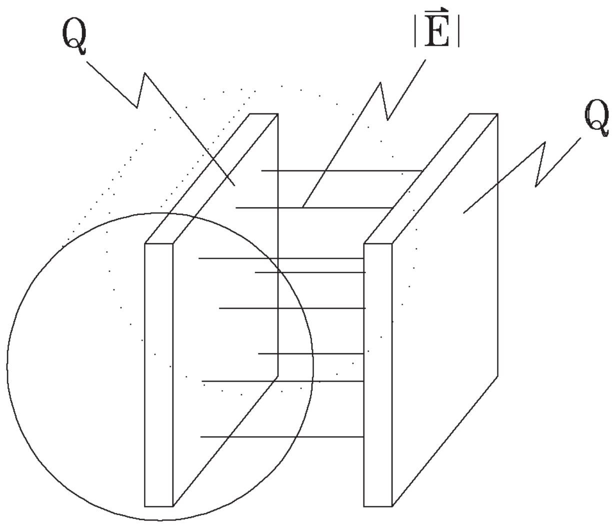

Abbildung 3.5: Skizze zur Wahl der Hüllfläche.

- als Ladungsspeicher.
- zur Speicherung elektrischer Energie in Form des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten.

3.3.7 Energiegehalt elektrischer Felder

Wenn ein Kondensator zur Speicherung elektrischer Energie eingesetzt wird, stellt sich natürlich die Frage, wie groß der Energieinhalt eines geladenen Kondensators ist. Wir überlegen, welche Arbeit wir verrichten müssen, um den Kondensator auf die gewünschte Spannung U_0 aufzuladen.
Der Konsensator sei durch das Aufbringen der Ladung Q bereits auf die Spannung U aufgeladen. Wir wollen nun die zusätzliche Ladung dQ aufbringen. Dafür muss die Arbeit

$$dW = dQ \cdot U$$

verrichtet werden. Wir ersetzen die Spannung U gemäß der Kondensatorgleichung durch Q/C. Dies führt zu

$$dW = \frac{Q}{C} \cdot dQ$$

Die gesamte Arbeit zur Aufladung auf die Spannung U_0 erhält man durch Integration zu

$$\begin{aligned} W_{ges} &= \int_0^{W_{ges}} dW \\ &= \frac{1}{C}\int_0^{Q_0} Q \cdot dQ \\ &= \frac{1}{2C} \cdot Q_0^2 \\ \Longrightarrow W &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \end{aligned}$$

Die gespeicherte Energie nach Verrichtung der Aufladearbeit liegt als Energie des elektrischen Feldes zwischen den Platten des Kondensators vor. Als Beweis dafür, dass elektrische Energie gespeichert ist, kann man die Beschleunigung einer elektrischen Ladung in dem herrschenden elektrischen Feld betrachten.

3.3.8 Bewegung von Ladungen in elektrischen Feldern

Messung der Elementarladung: Millikan–Versuch

Zwischen die horizontalen Platten eines geladenen Kondensators werden geladene Partikel gebracht (vgl. Abbildung 3.6). Jedes Öltröpfchen trägt eine mehr oder weniger große Ladungsmenge.

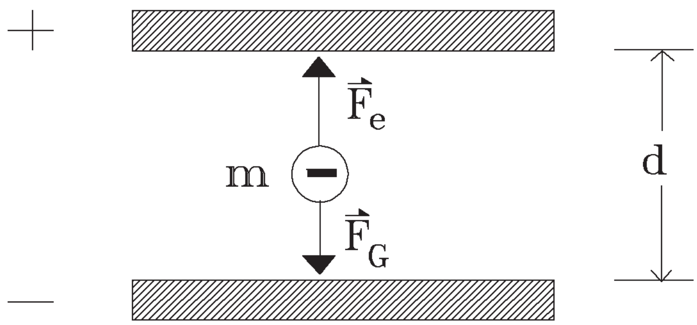

Abbildung 3.6: Skizze zum Millikan–Versuch

Wir betrachten die Kräftebilanz, die am Tröpfchen vorliegt. Am Tröpfchen greifen an:

- Schwerkraft $m \cdot g = \vec{F}_G$

  (Streng genommen muss hier eine Auftriebskorrektur vorgenommen werden.)

- Elektrische Kraft $q \cdot \vec{E} = \vec{F}_e$ mit $|\vec{E}| = \frac{U}{d}$

Durch geeignete Wahl von Größe und Vorzeichen der Spannung U kann die Gesamtkraft

$$F_{ges} = q \cdot \frac{U}{d} - m \cdot g$$

zum Verschwinden gebracht werden. Damit ergibt sich für die Ladung

$$q = m \cdot g \cdot \frac{d}{U}$$

Die Masse m des Teilchens kann aus seiner Größe bestimmt werden. Man erhält stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\, C$$

Die Ladung ist somit gequaltelt. (Millikan, 1910)

Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes

Wir betrachten wieder unseren Plattenkondensator.

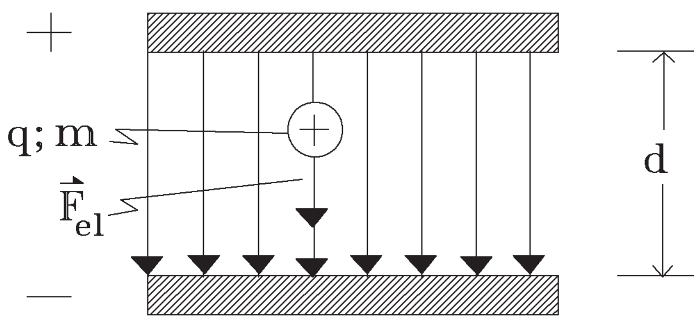

Abbildung 3.7: Skizze zur Bewegung in einem Plattenkondensator.

Eine Ladung q in einem elektrischen Feld erfährt die elektrische Kraft

$$|\vec{F}_{el}| = q \cdot |\vec{E}| = q \cdot \frac{U}{d}$$

Kann sie sich frei bewegen, so wird sie durch $\vec{F}_{el}$ gegen ihre Trägheit beschleunigt. Nach der Beschleunigung muss die kinetische Energie E_{kin} der Ladung genauso groß sein, wie die Arbeit W_{el}, die $\vec{E}$ an der Ladung q verrichtet hat.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= W_{el} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= q \cdot U \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeit der Ladung q die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} \tag{3.8}$$

Die kinetische Energie E_{kin}, die ein Elektron beim Durchlaufen der Spannung $U = 1\,\mathrm{V}$ aufnimmt, beträgt mit e = q = 1,6·10^{-19} C gerade

$$\begin{aligned} E_{kin} &= q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 1\,\mathrm{V} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Ws} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Definition 3.15: ELEKTRONENVOLT

> *Die beim Durchlaufen einer Spannungsdiffernz von U = 1 V von einem Elektron aufgenommene Energie beträgt 1 Elektronenvolt = 1 eV. Es gilt dabei:*

$$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}\,Ws = 1,6 \cdot 10^{-19}\,J$$

Aufgrund der geringen Masse wird bei Elektronen die Geschwindigkeit schon beim Durchlaufen kleiner Spannungen sehr gross, z.B. bei U = 1 V erreichen die Elektronen eine Geschwindigkeit von 593 km/s!
Gleichung (3.8) ist nur gültig, solange $v \ll c$ bleibt. Für $v \sim c$ muss

$$E_{kin} = m(v) \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \quad \text{mit} \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

verwendet werden. Man erhält:

$$v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_0c^2}}}{1 + \frac{eU}{m_0c^2}}$$

Geht U gegen Unendlich, so geht v gegen die Grenzgeschwindigkeit c.

Bewegung quer zum elektrischen Feld:

Wir nehmen jetzt an, dass das Elektron mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ quer zum $\vec{E}$–Feld in den Kondensator eintritt. Wie ändert sich seine Geschwindigkeit $\vec{v}$? In x–Richtung herrscht keine Kraft, die die Ladung beschleunigen könnte. Damit ist $\vec{v}_x = \vec{v}_0$.

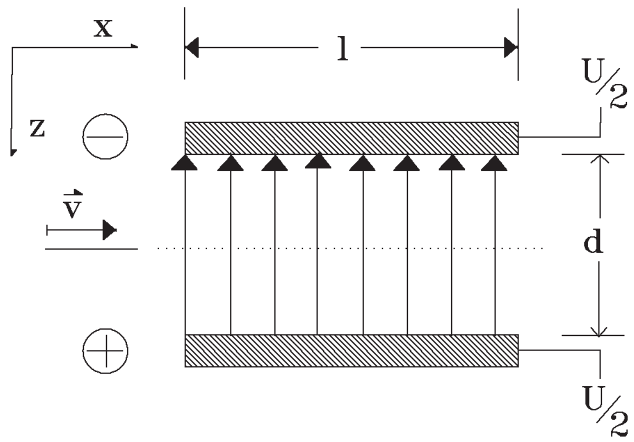

Abbildung 3.8: Skizze zur Bewegung quer zum $\vec{E}$–Feld.

In z–Richtung dagegen erfährt die Ladung durch $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$ die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{el}}{m} = \vec{E} \cdot \frac{q}{m}$$

Mit $|\vec{a}| = \frac{U \cdot q}{d \cdot m}$ folgt für die in x– bzw. z–Richtung in der Zeit t zurück gelegten Wege:

$$\begin{aligned} s_x &= v_0 \cdot t \\ s_z &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{U \cdot q}{d \cdot m} \end{aligned}$$

Dies ist die gleiche Situation wie beim schiefen Wurf. Die Ladung q durchquert in einer Parabel das elektrische Feld. Die Bahnkurve $s_y(s_x)$ erhält man durch Eliminieren der Zeit.
Durchläuft ein Teilchen die Strecke l, so beträgt die Ablenkung in Richtung des elektrischen Feldes

$$s_z = \frac{U}{2d} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{l^2}{v_0^2}$$

Magnetische Kräfte:

Es gibt magnetische Kräfte, die zuerst zwischen magnetischen Dipolen beobachtet wurden. Dazu gibt es auch magnetische Felder. Die magnetischen Phänomene werden später besprochen, weil ihr Zusammenhang mit den elektrischen Strömen grundlegend ist. Eine magnetische Beeinflussung der geladenen Teilchen findet nur statt, wenn sich diese bewegen.

Kapitel 4

Grundlagen der Struktur der Materie

Die Eigenschaften makroskopischer Körper werden verständlich, wenn man die Kenntnis ihrer atomistischen Struktur besitzt. Historisch gesehen war die Bestimmung bzw. das Erkennen der atomaren Struktur ein langwieriger Prozess. Wir stellen hier nur die wichtigsten Ergebnisse zusammen, denn das meiste davon ist heute bereits Allgemeinbildung.

4.1 Aufbau und Eigenschaften von Atomen

Die „kleinsten“ Bausteine

Wir beginnen mit den Atomkernen. Sie setzen sich zusammen aus:

- Protonen
- Neutronen

Es soll uns nicht kümmern, wie diese aufgebaut und angeordnet sind.

Definition 4.1: NUKLEONEN

> *Die Kernbausteine, d.h. Protonen und Neutronen, werden unter dem Begriff Nukleonen zusammengefasst.*

Die Nukleonen werden in den Atomkernen durch die Kernkräfte zusammengehalten. Diese besitzen eine sehr kurze Reichweite ($\approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$). Die Protonen besitzen die elektrische Ladung $+1\,e$, d.h. eine positive Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Die Neutronen tragen keine elektrische Ladung.
Hieraus folgt also, dass Atomkerne immer positiv geladen sind. Die Kernladungszahl ist die Anzahl der im Kern enthaltenen Protonen.

Definition 4.2: Kernladungszahl, Nukleonenzahl

> *Man bezeichnet die Kernladungszahl mit Z und die Gesamtanzahl der Nukleonen (Nukleonenzahl) mit N*

Ein Atomkern besitzt ein elektrische Feld, welches durch seine Ladung $Z \cdot e$ hervorgerufen wird. Für dieses Feld gilt, wenn r der Abstand vom Kern ist:

$$\vec{E}_{Kern} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Atome

Im elektrischen Feld des Kerns sind Elektronen durch die Coulomb–Wechselwirkung gebunden. Die Elektronen tragen eine negative Ladung -e. Die Masse eines Elektrons m_e ist $1/1836 \cdot m_p$, wenn m_p die Masse des Protons ist.

Teilchen	Masse
Elektron	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Proton	$m_p = 1.6735 \cdot 10^{-27}$ kg
Neutron	$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}$ kg

Definition 4.3: Neutrale Atome

> *Neutrale Atome enthalten ebensoviele Elektronen wie Protonen. Dadurch entsteht ein neutrales Gebilde, das Z Elektronen und Z Protonen enthält.*

Definition 4.4: Ion

> *Sind in der Umgebung eines Kerns mehr bzw. weniger Elektronen lokalisiert als der Protonenzahl entspricht, so liegt ein negatives bzw. positives Ion vor.*

Bestimmung der Masse von Elementarteilchen

Wir verwenden die Ergebnisse von Kapitel 3.3.8. Es ergab sich für die Ablenkung eines Teilchens im elektrischen Feld:

$$s_z = \frac{U}{2d} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{l^2}{v_0^2}$$

Mit Hilfe eines Massenspektrometers kann durch Messung der Ablenkung s_z die spezifische Ladung $\frac{q}{m}$ bestimmt werden. Die Ladung q kann direkt aus dem Millikan–Versuch gewonnen werden. Somit lässt sich die Masse berechnen.

Massenspektrometer

Massenspektrometer dienen zur Bestimmung der Masse von Atomen und Ionen. Sie enthalten immer eine Kombination aus elektrischen und magnetischen Sektorfeldern.
Alle Teilchen werden auf den Austrittsspalt fokussiert. Durch Einstellung einer bestimmten elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke können nur Teilchen eines engen $\frac{q}{m}$-Bereichs den Spalt erreichen. Alle anderen Teilchen werden zu stark oder zu schwach abgelenkt und erreichen den angeschlossenen Detektor nicht.

Atommassen

Die Atommassen sind praktisch gleich der Gesamtmasse der im Kern enthaltenen Nukleonen. Man bezieht dabei die Atommasse auf jene des ^{12}C–Atoms.

Definition 4.5: ATOMARE MASSENEINHEIT

> *Unter der atomaren Masseneinheit m_u versteht man per definitionem:*

$$m_u = \frac{1}{12} \cdot m(^{12}C) = 1.6605525 \cdot 10^{-27}\, kg$$

Die relative, weil auf das Kohlenstoffatom bezogene, Atommasse A_r ist damit:

$$A_r = \frac{\text{Masse des Atoms}}{\frac{1}{12} \cdot \text{Masse}(^{12}C)} = \frac{m_a}{m_u}$$

Beispiele:
Kohlenstoff ^{12}C: $\mathrm{A}_r = 12.00$
Natrium ^{23}Na: $\mathrm{A}_r = 22.989771$

Atombau

Wir behandeln jetzt die Verteilung der Elektronen im Atom. Die Elektronen halten sich in der Umgebung des Kerns auf, d.h. in etwa in einem Raum der Ausdehnung einiger 10^{-8} cm. Je nach Symmetrie–Zustand kann der von einem Elektron ausgefüllte Raumbereich folgende Formen haben (siehe z.B. Niedrig):

- kugelförmig (s–Zustand)
- keulenförmig (p–Zustand)
- .... (z.B. d–Zustand)

Das Elektron hat die Form einer „Wolke“, die aber eine innere Struktur besitzt.

Molekülbau

Die Moleküle enthalten die Atome als Bestandteile. Die Kräfte zwischen den Bestandteilen, d.h. Elektronen und Atomkernen, sind elektrische Kräfte. Über den Molekülbau entscheiden die Ladungen der Bestandteile, nicht deren Massen. Wir betrachten als einfachstes Molekül das $H_2{}^+$–Molekülion.

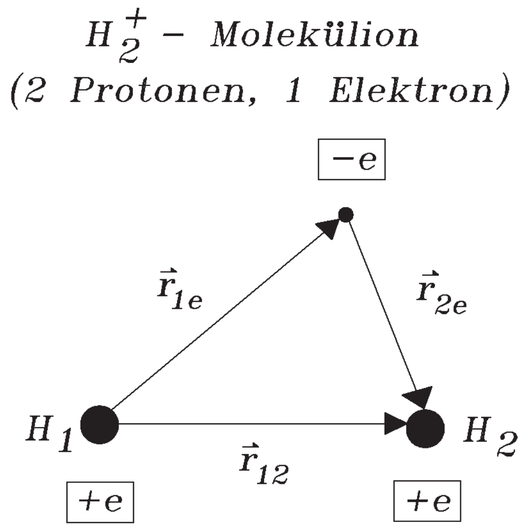

Abbildung 4.1: H_2^+–Molekülion

Es gilt für die Anziehung zwischen jedem der beiden Kerne und dem Elektron:

$$\vec{F}_{1e} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{1e}^2} \cdot \hat{r}_{1e}$$

Die Abstoßung zwischen den zwei Kernen (Protonen) ergibt sich zu:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

Der intramolekulare Abstand $|\vec{r}_{12}|$ stellt sich so ein, dass die Wechselwirkung der Elektronenladungswolke mit den Kernen deren Coulomb–Abstoßung möglichst überkompensiert.

Mehratomige Moleküle

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen in Atom weist oft bevorzugte Richtungen auf. Die Kräfte längs dieser Richtungen sind besonders ausgeprägt. Folglich lagern sich die Atomkerne längs dieser Richtungen aneinander.

Kräfte/Bindung zwischen Atomen und Molekülen in Gasen

Für die Bindung zwischen Atomen und Molekülen in Gasen sind elektrische Kräfte verantwortlich. Auch wenn es sich im allgemeinen um neutrale Moleküle handelt, kann sich der Schwerpunkt von positiven Kernen und negativer Elektronenwolke verschieben. Es entstehen elektrische Dipole, die sich gegenseitig anziehen.

Definition 4.6: VAN-DER-WAALS'SCHE KRAFT

> *Die anziehenden elektrischen Kräfte zwischen induzierten Dipolen, welche für die Wechselwirkung zwischen Molekülen verantwortlich sind, heißen Van-der-Waals-Kräfte. Sie hängen vom Abstand R der Moleküle wie $\frac{1}{R^7}$ ab.*

Wechselwirkung zwischen Atomen/Molekülen bei kleinen Abständen

Bei kleinen Abständen der Moleküle überlappen sich die Elektronenhüllen so weit, dass die positive Ladung der Kerne nicht mehr vollständig abgeschirmt wird und diese sich abstoßen.
Allen Bindungsarten zwischen Molekülen ist gemeinsam, dass sie ihren gegenseitigen Abstand durch ein Minimum der potentiellen Energie des Verbandes aus zwei Partnern stabilisieren.
Für viele Anwendungen genügt es, dieses Potential aus einem

- anziehendem Term $\propto \frac{1}{R^6}$ und einem
- abstoßendem Term $\propto \frac{1}{R^{12}}$

aufzubauen.

$$V(R) = D_e \cdot R_e^6 (\frac{R_e^6}{R^{12}} - \frac{2}{R^6})$$

oder

Lenard-Jones-Potential

$$V(R) = D_e((\frac{R_e}{R})^{12} - 2 \cdot (\frac{R_e}{R})^6) \tag{4.1}$$

wobei D_e die Potentialtopf-Tiefe und R_e die Lage des Minimums ist.
Aus

$$\begin{aligned} F(R) &= -\mathrm{grad}_R V(R) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial R} \end{aligned}$$

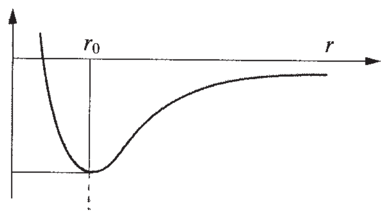

Abbildung 4.2: Lenard-Jones-Potential

ergibt sich, dass sich die Moleküle bei $R < R_e$ abstoßen und sich bei $R > R_e$ anziehen.

Wechselwirkung zwischen Atomen kondensierter Materie

Für die Bindung von Atomen im Festkörper sind ebenfalls elektrische Kräfte verantwortlich.
Zum Beispiel können die Ionenrümpfe der Atome ein Ionengitter bilden. Dabei sind alle Rümpfe regelmäßig angeordnet. Die Elektronen sind nicht einem bestimmten Zentrum zugeordnet, sondern können sich frei im Kristall bewegen. Die Ladungsneutralität ist aber gewährleistet.
Auch für den Festkörper wird das Wechselwirkungspotential aus einem anziehenden Teil

$$-B \cdot R^{-m}$$

und einem abstoßenden Teil

$$+A \cdot R^{-m}$$

aufgebaut.

$$V(R) = A \cdot R^{-m} - B \cdot R^{-m}$$

Der Gleichgewichtsabstand der Festkörperbestandteile ist wieder durch $V_{min}(R_0)$ gegeben. I.a. nimmt m nicht den Wert 6 an wie bei der Wechselwirkung von Molekülen in Gasen.

4.2 Erscheinungsformen von Materie

Die Atome/Moleküle können in Stoffen in verschiedenen Ordnungszuständen vorliegen.

- Festkörper: regelmäßige Fernordnung
- Gase: kein definierter Atomabstand vorhanden. Daher existiert keine Ordnung
- Flüssigkeiten: gut definierter mittlerer Abstand der Atome/Moleküle. Es tritt Nahordnung auf.

Definition 4.7: AGGREGATZUSTAND

Die verschiedenen Erscheinungsformen (Ordnungszustände) heißen Aggregatszustände oder auch Phasen. Sie unterscheiden sich darin, dass die Bindungsenergie der Moleküle entweder größer, vergleichbar oder kleiner als die thermische Energie der einzelnen Atome ist.

Definition 4.8: THERMISCHE ENERGIE

Unter der thermischen Energie versteht man die kinetischen Energie der Teilchen. Sie ist proportional zur absoluten Temperatur T der betrachteten Materiemenge (siehe Wärmelehre).

Bei Gasen äußert sich die thermische Energie durch die Translation der frei beweglichen Moleküle. Diese ist nur von der Temperatur abhängig. Je höher die Temperatur ist, desto schneller bewegen sich die Teilchen.
Bei Festkörpern führt Temperaturerhöhung, und damit Erhöhung der thermischen Energie, zu periodischen Bewegungen (Schwingungen) der Gitterbestandteile (Atome/Ionen) um die Gleichgewichtslage.
Flüssigkeiten liegen in ihrem Verhalten zwischen den beiden Extremfällen.

4.3 Stoffmenge

Ein Maß für die Menge eines Stoffes ist die Teilchenzahl N. Wird sie auf das Volumen V, welches der Stoff einnimmt, bezogen, so erhält man die Anzahldichte n.

Definition 4.9: ANZAHLDICHTE

Die Anzahldichte n ist definiert als der Quotient aus Teilchenzahl und Volumen, in dem sich die Teilchen befinden. Die Anzahldichte kann auch infinitesimal werden. Es ist

$$n = \frac{N}{V}$$

Die Teilchenzahl ist makroskopisch schlecht messbar. Deshalb hat man als Basisgröße im SI–System die dazu proportionale Größe der Stoffmenge ν eingeführt.

Definition 4.10: STOFFMENGE

> *Die Stoffmenge ν=1 mol ist diejenige Stoffmenge eines Systems, welches genau so viele Teilchen enthält, wie 12 g reinen Kohlenstoffes ^{12}C. Daher entspricht die Stoffmenge $\nu = 1\,mol\,^{12}C$ genau der Masse von 12 g ^{12}C.*

Die Anzahl N_A der Teilchen in 1 mol ist die Avogadro–Konstante. Ihr derzeit bester Messwert ist $N_A = 6,0220921 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Messverfahren für Stoffmenge

Durch Wiegung erhält man 1 mol eines beliebigen Stoffes, wenn man soviel Gramm eines Stoffes abwägt, wie der relative Atommasse entspricht.
Beispiel:
Die relative Atommasse von $^{12}\mathrm{C}$ ist 12. Wiegt man also 12 g Kohlenstoff ab, so hat man genau 1 mol dieses Stoffes.

Messverfahren für N_A

Die Avogadro–Konstante lässt sich aus einer Vielzahl physikalischer Vorgänge und Theorien erhalten:

- Kinetische Gastheorie
- Brown'sche Molekularbewegung
- Oberflächenspannung von Lösungen
- Schwarzkörper–Strahlung
- Streuung von Licht durch die Atmosphäre
- Elektrische Ladung von Öltröpfchen
- Größe von Gitterbausteinen
- Radioaktive Prozesse
- Feinstruktur von Spektrallinien

Kapitel 5

Teilchen und Teilchensysteme II: Teilchensysteme

5.1 Einführung

Wir haben gelernt, dass man reale Materie stets als eine Ansammlung von Massenpunkten (M.P.) auffassen kann, zwischen denen Kräfte wirken. Viele Eigenschaften der realen Systeme lassen sich durch idealisierende Modelle beschreiben:

- Festkörper: Modell des starren Körpers

  Die Abstände aller Massenpunkte bleiben konstant, auch wenn äußere Kräfte und/oder Drehmomente angreifen.

- Flüssigkeiten: Modell der idealen Flüssigkeit

  Die Flüssigkeit besitzt keine Kompressibilität und keine innere Reibung.

- Gase: Modell des idealen Gases

  Es handelt sich bei den Gasatomen bzw. -molekülen um Massenpunkte die keine Wechselwirkung untereinander, sondern nur mit den Gefäßwänden haben.

In mancher Beziehung kann das gesamte Teilchensystem als ein Massenpunkt aufgefasst werden, in welchem die Gesamtmasse des Systems vereinigt zu denken ist. Dies wird im Folgenden begründet.

5.2 Schwerpunkt eines Teilchensystems

Es sei ein System von Massenpunkten mit der jeweiligen Masse m_i gegeben. Die Gesamtmasse M des System ergibt sich durch Summation der Einzelmassen, d.h. die Gesamtmasse beträgt $M = \sum m_i$. Ein einzelnes Massenelement m_i an einem Ort $\vec{r}_i$ erfährt im Schwerefeld $\vec{a} = \vec{g}$ die Kraft $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}$. Die Drehmomente der einzelnen Massenpunkte bzgl. eines willkürlich gewählten Bezugspunktes sind

$$M_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{a})$$

Wir zeigen nun, dass sich das Gesamt–Drehmoment $\vec{M}$ als ein Vektorprodukt aus der Gesamtkraft $\vec{F}$ und einem Schwerpunktsvektro $\vec{r}_s$ darstellen lässt. Es ist nämlich:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{a}) = \vec{r}_s \times \sum_i m_i \cdot \vec{a}$$

Wir wollen nun beide Seiten so umformen, dass wir das Vektorprodukt mit der Beschleunigung ausklammern können. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{M} = (\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i) \times \vec{a} &= \vec{r}_s \sum_i m_i \times \vec{a} \\ \Longrightarrow \vec{r}_s \sum_i m_i &= \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \\ \Longrightarrow \vec{r}_s &= \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \end{aligned}$$

Definition 5.1: SCHWERPUNKTSVEKTOR

Der Vektor $\vec{r}_s$ heißt Schwerpunktsvektor unseres Teilchensystems.

Beispiel: 2 Teilchen
Der Schwerpunktsvektor zweier Teilchen ergibt sich als arithmetisches Mittel unter Berücksichtigung der Vektoraddition:

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Schwerpunktsbestimmung

Der Schwerpunkt eines Körpers lässt sich auf recht einfache Weise bestimmen. Ein Körper erfährt im Schwerefeld $\vec{g}$ ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{r}_s \times \vec{F}_G$ solange der Schwerpunktsvektor $\vec{r}_s$ und die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ noch nicht parallel sind. Der Schwerpunkt S wird versuchen, unter den Aufhängepunkt (Drehpunkt) zu kommen, da dann die beiden erwähnten Vektoren parallel sind. Man hängt den Körper nacheinander an zwei verschiedenen Punkten drehbar auf und bestimmt die Senkrechten, nachdem der Körper sich nicht mehr dreht. Der Schnitt dieser Senkrechten liefert den Schwerpunkt S.

Wahl des Koordinaten–Ursprungs

Häufig wird man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt S legen. Dann ist der Schwerpunktsvektor der Nullvektor:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{\rho}_i}{\sum_i m_i} = 0$$

Dabei ist $\vec{\rho}_i$ der Ortsvektor des Massenpunktes i der Massenverteilung bzgl. S als Koordinatenursprung.

5.3 Impuls eines Teilchensystems

Der Gesamtimpuls eines Teilchensystems ergibt sich aus der vektoriellen Addition der Einzelimpulse der Massenelemente m_i:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \cdot \vec{r}_i) \end{aligned}$$

Verwendet man den Schwerpunktvektor $\vec{r}_s$ bzw. die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_s = \frac{d}{dt}\vec{r}_s$, so lässt sich die rechte Seite umformen und man erhält als Gesamtimpuls des Teilchensystems

$$\vec{p} = M \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}_s = M \cdot \vec{v}_s$$

Fasst man diese Gleichung in Worte, so kann man sagen: hinsichtlich seines Impulses verhält sich das Teilchensystem so, als wäre die gesamte Masse M in S vereinigt.

Schwerpunktsbewegung

Es mögen an den i Massenpunkten die Kräfte $\vec{F}_i$ angreifen. Diese verursachen nach der Grundgleichung der Dynamik die folgende Änderung der Impulse $\vec{p}_i$:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_i \vec{p}_i) \\ &= \frac{d}{dt}(\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{d}{dt}(M \cdot \vec{v}_s) \\ \Longrightarrow \sum_i \vec{F}_i &= \frac{d}{dt}\vec{p}_s \end{aligned}$$

In der Kräftebilanz brauchen nur äußere Kräfte berücksichtigt werden. Der Grund dafür ist, dass sich die Wechselwirkungskräfte zwischen Paaren von Massenpunkten wegen des Newtonschen Axioms „actio = reactio“ gegenseitig aufheben. Man kann also auch schreiben:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{p}_s$$

Nur äußere Kräfte $\vec{F}_{ext}$ beeinflussen die Bewegung von S und können allein eine Änderung des Gesamtimpulses verursachen. Ohne äußere Kräfte, d.h. $\vec{F}_{ext} \equiv 0$, beschreibt S eine geradlinige gleichförmige Bahn oder bleibt in Ruhe.

Zurückführung des Zwei-Körper- auf ein Ein-Körper-Problem

Zwei Teilchen m_1 und m_2 wirken mit $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ aufeinander. Die Grundgleichung der Dynamik lautet in diesen Fällen:

$$m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \qquad m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert unter Verwendung von $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{F}_{12} \cdot (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})$$

$\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ist die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_r$ von m_1 und m_2.

Definition 5.2: Reduzierte Masse

Wir bezeichnen mit

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

die reduzierte Masse des Zwei-Teilchen-Systems.

Wir können also schreiben:

$$\vec{F}_{12} = \mu \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

Das bedeutet, dass für die Relativbewegung von m_1 und m_2 eine Grundgleichung der Dynamik gilt, wie jene für die Bewegung einer reduzierten Massse μ unter dem Einfluss von $\vec{F}_{12}$.

5.4 Drehimpuls eines Teilchensystems

Um die Rotation eines Festkörpers zu beschreiben, muss der Drehimpuls des Systems betrachtet werden. Er setzt sich aus jenen der einzelnen Massenpunkte zusammen.

Beispiele für rotierende Systeme mit Drehimpuls $\vec{L}$

Definition 5.3: STARRER ROTATOR

> *Bei einem starren Rotator ändert sich die Lage der Drehachse nicht.*

Definition 5.4: KREISEL

> *Bei der Drehbewegung eines Kreisels bewegt sich die Drehachse im Raum. Es gibt nur einen Fixpunkt, sofern die Lage des Schwerpunktes im Raum festliegt.*

Für den Drehimpuls eines einzelnen Massenpunktes i haben wir früher bereits erhalten:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i)$$

Dabei wurde ein willkürlicher Bezugspunkt 0 gewählt. Die zeitliche Änderung von $\vec{L}_i$ wird immer durch die Einwirkung eines Moments $\vec{M}_i$ verursacht, d.h. $d\vec{L}_i/dt = \vec{M}_i$. Für unser Teilchensystem gilt entsprechend

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$$

Für $d\vec{L}/dt$ sind nur die äußeren Momente verantwortlich, denn innere Momente, die durch Wechselwirkungskräfte bedingt sind, heben sich wegen des 3. Newtonschen Axioms immer paarweise auf:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$$

Eine Änderung des Gesamtdrehimpulses erfordert ein äußeres Drehmoment. Ohne äußere Momente bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten. Wir stellen fest, dass der Drehimpuls $|\vec{L}|$ von der Winkelgeschwindigkeit ω und der Verteilung der trägen Massen im Körper abhängt. Ändern wir die Massenverteilung, dann ändert sich auch ω, so dass $|\vec{L}|$ erhalten bleibt.

5.5 Energie eines Vielteilchensystems

Die Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ eines Massenpunktes kann zusammengesetzt werden aus zwei Anteilen:

- Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_s$ von S
- Geschwindigkeit des i–ten Massenpunktes $\vec{u}_i$ bzgl. S

  Die Geschwindigkeit $\vec{u}_i$ ist die Geschwindigkeit, die in einem mit S mitbewegten Koordinatensystem gemessen wird.

Die Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich also durch die Addition der beiden Anteile, d.h. $\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{u}_i$. Das Quadrat dieser Geschwindigkeit ist dann

$$v_i^2 = v_s^2 + u_i^2 + 2 \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i)$$

Als kinetische Energie des Massenpunktes W_{kin} erhält man daher:

$$\begin{aligned}
W_{kin} &= \sum \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_i^2 \\
&= \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_s^2 + \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot u_i^2 + \sum m_i \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i) \\
&= \frac{M}{2} \cdot v_s^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} \cdot u_i^2 + \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_i) \\
&= W_{kin,S} + W_{kin,int} + \vec{v}_s \cdot \sum_i (m_i \cdot \vec{u}_i)
\end{aligned}$$

Da aber der Schwerpunkt Koordinatenursprung ist, ist $\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{\rho}}{M} = \vec{0}$. Damit ist aber

$$\sum_i m_i \cdot \vec{u}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{\rho}_i = 0$$

Somit gilt für die kinetische Energie des Vielteilchensystems, dass sie sich aus der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung und der kinetischen Energie des Massenpunktes bzgl. des Schwerpunktes zusammensetzt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_s^2 + W_{kin,int}$$

Die potentielle Energie aufgrund innerer Kräfte ist unabhängig vom Bezugssystem. Wird am Teilchensystem keine Arbeit durch äußere Kräfte verrichtet, so bleibt die innere Energie U konstant:

$$U = W_{kin,int} + U_{pot,int} = \text{konstant}$$

Rotationsenergie eines starren Körpers

Wir betrachten jetzt einen starren Körper, d.h. die Massenpunkte mit der Masse m_i behalten ihre gegenseitigen Abstände immer bei. Wir berechnen nun die kinetische Energie des starren Körpers, die in seiner Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch S enthalten ist (siehe Abbildung 5.1). Für ein Massenelement Δm_i gilt mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_i$:

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot \vec{v}_i^2$$

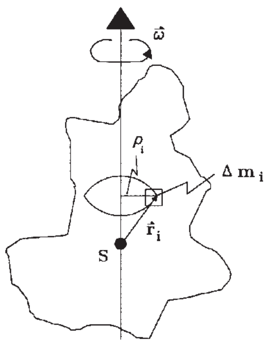

Abbildung 5.1: Schematische Darstellung zum starren Körper

Dazu kommt noch $W_{kin,S} = \frac{1}{2} M \cdot v_s^2$, wenn sich der Schwerpunkt S bewegt. Aus der obigen Gleichung ergibt sich unter Verwendung von $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$:

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot \rho_i^2$$

Hier ist ρ_i der Abstand von Δm_i zur Drehachse. Als Gesamtenergie erhält man dann durch Summation über alle Massenelemente und weil ω für alle Werte von ρ_i gleich groß ist:

$$W = \sum_i \Delta W_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \tag{5.1}$$

Definition 5.5: TRÄGHEITSMOMENT

Die Größe J gemäß der folgenden Definitionsgleichung wird als Trägheitsmoment bezeichnet:

$$J = \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2$$

Wählt man die Massenverteilung hinreichend fein, so integriert man über alle infinitesimalen Massenelemente:

$$J = \int dm \cdot r^2 \tag{5.2}$$

Bei Rotation um eine beliebige, zur Achse durch S parallele Achse, gilt (vgl. Literatur) mit s dem Abstand der beiden Drehachsen der

Satz von Steiner

$$J_A = J_S + M \cdot s^2 \tag{5.3}$$

Man erhält ferner durch die Einführung des Trägheitmoments

Drehimpuls eines starren Körpers

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \tag{5.4}$$

5.6 Stoßprobleme

5.6.1 Einführung

Wir wollen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls auf den Zusammenstoß zwischen zwei Massen m_1 und m_2 anwenden. Nähern sich nun m_1 und m_2 mit $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ auf geradlinigen Bahnen. Bei kleinen Abständen erfahren sie eine Ablenkung wegen des Zusammenstoßes. Bei großen Abständen entfernen sich m_1 und m_2 wieder auf geradlinigen Bahnen, aber mit geänderten Geschwindigkeiten $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$. Wenn in einem kurzen Zeitintervall Δt eine merkliche Ablenkung $\Delta\vec{p}$ auftritt, so müssen in Δt große Kräfte $\vec{F}$ am Werk sein. Ihnen gegenüber kann man Reibung, Schwerkraft u.s.w. vernachlässigen. Stoßprozesse spielen eine große Rolle:

- Wärmelehre: Stöße zwischen Gasatomen und auf Wände erzeugen den Druck in einem Gas.
- Chemische Reaktionen: Bei Stoffwechselvorgängen, in der Industrie und der Umwelt. Sie sind meistens mit der Übertragung von kinetischer Energie in andere Energieformen verbunden.
- Billard–Kugeln: Hier findet praktisch keine Umsetzung von kinetischer Energie in andere Energieformen statt. Es handelt sich um elastische Stöße.
- Stoßprozesse zwischen radioaktiver Strahlung und Gewebe
- Kernphysik: Stoßende Teilchen können sogar ihre Identität ändern.

Klassifizierung möglicher Stoßprozesse

Wir werden uns ein wenig spezialisieren. Die Kräfte sollen in Richtung der Verbindung der Massenmittelpunkte von m_1 und m_2 zeigen. Daher brauchen wir nur Energie– und Impulssatz. Sonst könnten wir auch Drehimpuls übertragen. Unser Handwerkszeug sind, weil nur innere Kräfte beim Stoß wirken, die Erhaltungssätze für den Impuls

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$$

und für die Energie

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot \vec{v'}_2^2 + \Delta W$$

Definition 5.6: ELASTISCHER STOSS

> *Bei einem elastischen Stoß bleibt die kinetische Energie des Systems erhalten, d.h. sie wird nicht in andere Energieformen umgesetzt.*

Definition 5.7: Inelastischer Stoss

Bei einem inelastischen Stoß wird die kinetische Energie in andere Energieformen umgesetzt oder umgekehrt. Die kinetische Energie kann sowohl größer als auch kleiner werden.

Die kinetische Energie wird kleiner, wenn beim Stoß Reibung auftritt. Sie kann aber auch größer werden, wenn beispielsweise eine chemische Reaktion o.a. ausgelöst wird.

Definition 5.8: Zentraler Stoss

Der Stoß verläuft immer auf der Verbindungslinie der Massen–Mittelpunkte. Im Fall des zentralen Stoßes können die Vektorpfeile weggelassen werden.

Bemerkung:
Der allgemeine Fall $m_i' \neq m_i$ soll hier nicht betrachtet werden.

5.6.2 Elastischer Stoß

Seien zunächst $m_1 = m_2 = m$ und $\vec{v}_2 = 0$, d.h. der zweite Körper ruht. Der Stoß muss nicht zentral sein. Der Energiesatz gibt:

$$\frac{m}{2}\vec{v}_1^2 = \frac{m}{2}\vec{v'}_1^2 + \frac{m}{2}\vec{v'}_2^2$$

Aus dem Impulssatz folgt zusätzlich $\vec{v}_1 = \vec{v'}_1 + \vec{v'}_2$. Quadrieren wir den Impulssatz, so erhalten wir:

$$\vec{v}_1^2 = (\vec{v'}_1 + \vec{v'}_2)^2 = \vec{v'}_1^2 + \vec{v'}_2^2 + 2 \cdot (\vec{v'}_1 \cdot \vec{v'}_2)$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis des Energiesatzes zeigt, dass für das Skalarprodukt gelten muss:

$$(\vec{v'}_1 \cdot \vec{v'}_2) = 0$$

Des Weiteren sollen nun drei Fälle gesondert betrachtet werden:

- $\vec{v'}_1 = 0$ d.h. $\vec{v'}_2 = \vec{v}_1$ Ein Beispiel für diesen Fall ist das Stoßpendel. Teilchen m_2 fliegt mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_1$ weiter.
- $\vec{v'}_2 = 0$ Das Teilchen m_1 hat nicht getroffen.
- Nicht zentraler Stoß: Das Skalarprodukt $\vec{v'}_1 \cdot \vec{v'}_2$ ist Null. Folglich stehen die beiden Geschwindigkeitsvektoren senkrecht aufeinander und die beiden Massen fliegen unter 90°voneinander weg.

Im Folgenden handle es sich um einen zentralen Stoß mit ungleichen Massen d.h. $m_1 \neq m_2$. Die Vektorpfeile können nun weggelassen werden. Es gilt wieder der Impulssatz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

und der Energiesatz

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v'^2_2$$

Durch geeignetes Umformen erhält man (siehe Literatur):

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot m_1 \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot m_2 \cdot v_2 \\ m_2 \cdot v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \cdot m_2 \cdot v_2 + \frac{2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot m_1 \cdot v_1 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot v_2 \tag{5.5}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \cdot v_2 + \frac{2 \cdot m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot v_1 \tag{5.6}$$

Für den Spezialfall $v_2 = 0$ und $m_1 = m_2$ erhalten wir wieder wie früher:

$$v_2' = v_1 \quad \text{und} \quad v_1' = 0$$

Im Fall eines Stoßes senkrecht auf eine Wand ist wegen $m_2 \gg m_1$ die Geschwindigkeit $v_2 = 0$, d.h. die Wand bewegt sich nicht. Außerdem ist in diesem Fall $v_1' = -v_1$ und

$$\Delta p = m_1(v_1 - v_1') = 2 \cdot m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot p_1$$

Die Wand nimmt den Impulsübertrag $\Delta p = 2 \cdot p_1$ auf. Die Energie W_1 bleibt dabei erhalten.

Energieübertrag beim zentralen elastischen Stoß zwischen ungleichen Massen

Es gelten die Gleichungen (5.5) und (5.6). Wir wählen unser Bezugssystem so, dass es sich mit der Masse m_2 mitbewegt, d.h. mit v_2 gegenüber dem bisherigen System gleichförmig bewegt wird. Dabei ändert sich physikalisch offenbar nichts, aber die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot v_1 \\ v_2' &= \frac{2 \cdot m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot v_1 \end{aligned}$$

Dann ist die Energieübertragung ΔE einfach

$$\Delta E = \frac{m_2}{2} \cdot {v'}_2^2 = \frac{2 \cdot m_2 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Bezieht man ΔE auf die Energie $E_1 = \frac{m_1}{2} \cdot v_1^2$, so erhält man:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Anwendung:
Abbremsung schneller Neutronen in Kern–Reaktor. Man braucht Teilchen mit möglichst ähnlicher Masse. Man wählt z.B. schweren Wasserstoff, also Wasserstoff mit der Kerladungszahl Z=1, der aber neben einem Proton noch ein Neutron im Kern hat, oder Graphit ^{12}C. Eine Nebenbedingung ist, dass die Neutronen durch den Stoßpartner nicht absorbiert werden sollen. Dies schließt offenbar H–Atome für die Moderierung aus.

Raketengleichung

Veranschaulichung von Stosserscheinungen: Betrachtet wird eine Rakete.

Sei...

dm_T: die Masse an Treibstoff, die in dt ausgestoßen wird.

$\vec{v}_T$: die Geschwindigkeit der Treibstoffmoleküle (relativ zur Raketengeschwindigkeit).

d$\vec{v}$: die Änderung der Raketengeschwindigkeit, hervorgerufen durch den abgegebenen Impuls $dm_T \cdot \vec{v}_T$.

Mit Hilfe des Impulssatzes kann die Endgeschwindigkeit der Rakete ausgerechnet werden. Der Impuls des in dt ausgestoßenen Treibstoffes ist $dm_T \cdot |\vec{v}_T| = |\vec{dp}_T|$. Aufgrund der Impulserhatung muss die Rakete eine Impulsänderung um den selben Betrag erfahren.

$$m_R \cdot |d\vec{v}| = dm_T \cdot |\vec{v}_T|$$

Nun ist aber $dm_T = dm_R$.

$$\begin{aligned} m_R \cdot d\vec{v} &= dm_R \cdot \vec{v}_T \\ d\vec{v} &= \frac{dm_R}{m_R} \cdot \vec{v}_T \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt die Raketengleichung:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_T \cdot \ln(\frac{m(t)}{m_0}) + \vec{v}_0$$

Mit einer einstufigen Rakete ($v_0 = 0$) kann man etwa die Geschwindigkeit der Treibgase erreichen. Dies reicht nicht, um den Anziehungsbereich der Erde zu verlassen!

Anwendung der Stoßgesetze in der Elementarteilchenphysik

Steuprozesse zwischen Teilchen, die an einem elastischen/inelastischen Prozess beteiligt sind, gehören zu den wichtigsten Informationsquellen. Die Zeit ist zu kurz, um den unmittelbaren Ablauf des Stossprozesses zu verfolgen. Die Bahnen der beteiligten Teilchen werden anhand der Ionisierung, die sie längs ihrer Bahnen bewirken, bestimmt.

- Wilson‘sche Nebelkammer: In übersättigtem Dampf wirken Ionen als Kondesationskeime, an denen sich Nebeltröpfchen bilden. Sie können photographiert werden.
- Blasenkammer: In überhitzer Flüssigkeit liegt Siedeverzug vor. Er wird längs der Spur aufgelöst; die Flüssigkeit verdampft dort. Die entstehenden Dampfblasen werden photographiert.

Nebel-/Blasenkammer liefern die Richtung des Impulses. Um den Betrag des Impulses zu erhalten, wird das Spurnachweisgerät mit einem Magnetfeld überlagert. Dadurch werden die Ionen abgelenkt. Der Bahnradius ist proportional zum Betrag des Impulses.

Elastischer Stoß, allgemeiner Fall:

Wir stellen fest, Kräfte werden nur in Richtung der Verbindung der beiden Schwerpunkte übertragen: $\vec{f}_{12}$ und $\vec{f}_{21}$. Hierbei handelt es sich um eine Idealisierung! Wenn dies nicht mehr der Fall ist, brauchen wir noch den Drehimpulssatz. Dann ist

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} \neq 0$$

und es kann Drehimpuls ausgetauscht werden. Wenn nur Kräfte in Richtung der Verbindungsachse $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ wirken, dann kann nur Impuls längs dieser Richtung ausgetauscht werden. Wir zerlegen die Impulse $\vec{p}_i$ und $\vec{p}_i'$ in ihre Komponenten senkrecht (s) und parallel (p) zur Verbindungsachse der Schwerpunkte. Die Komponenten (s) werden beim Stoß nicht geändert, d.h. es gilt $p_{1s}' = p_{1s}$ bzw. $p_{2s}' = p_{2s}$. Für die Komponenten (p) können wir die für den zentralen Stoß erhaltenen Formeln verwenden.

5.6.3 Inelastischer Stoß

Wir behandeln den inelastischen Stoß zwischen zwei Massen. Es gelten wieder der Impuls– und der Energiesatz, doch ist ΔW nun nicht mehr Null. Wir betrachten den Spezialfall, dass sich beide Massen nach dem Stoß miteinander verkoppeln, d.h. $v_1' = v_2' = v'$. Es stellt sich die Frage, wie groß in diesem Falle ΔW ist. Ein realistischer Fall ist der inelastische Stoß mit zwei Sandsäcken. Es gilt der Energiesatz:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v'^2 + \Delta W$$

sowie der Impulssatz in der Form

$$m_2 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v'}$$

Hieraus erhält man durch einfaches Umformen eine Gleichung für $\vec{v'}$:

$$\vec{v'} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

Setzt man dieses Ergebnis in den Energieerhaltungssatz ein, so erhalten wir für ΔW:

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

Wir hatten gelernt, dass man die gesamte kinetische Energie zerlegen kann:

$$W_{kin} = W_{kin,Relativ} + W_{kin,Schwerpunkt}$$

Die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung bleibt erhalten, da ein abgeschlossenes System vorliegt.
Anwendung: Ballistisches Pendel
Ein schnelles Geschoss wird in einen Klotz geschossen. Wir wissen, dass die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung beim Stoß als mechanische Energie erhalten bleibt. Nur sie kann Hubarbeit verrichten, d.h. den Klotz auslenken. Aus obigen Formeln kann man dann die Geschossgeschwindigkeit ermitteln.

$$\vec{v'} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

wegen $m_2 \ll m_1$:

$$\vec{v'} \simeq \frac{m_1}{m_2} \cdot v_1$$

D.h. die Geschossgeschwindigkeit v_1 verringert sich nach dem Stoß um $\frac{m_1}{m_2}$.
Wegen

$$m_2 \cdot g \cdot h = \frac{m_2 \cdot {v'}^2}{2}$$

gilt

$$v' = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

h lässt sich über den maximalen Auslenkungswinkel bestimmen. Für kleine Auslenkungswinkel gilt:

$$h \simeq \frac{s_{max} \cdot \alpha_{max}}{l}$$

5.7 Dynamik starrer Körper

5.7.1 Starrer Rotator

Ein starrer Rotator rotiert um eine raumfeste Drehachse. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gibt die Richtung dieser Achse an. Offenbar gilt:

$$J = \sum_i m_i \cdot R_i^2$$

wobei $\vec{r_i} = \vec{d_i} + \vec{R_i}$. Die Bahngeschwindigkeit $\vec{v_i}$ von m_i ist

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{R_i}$$

Der Drehimpuls des Rotators bezüglich des Ursprungs kann dargestellt werden als:

$$\begin{aligned}
\vec{L_i} &= m_i \cdot (\vec{r_i} \times \vec{v_i}) \\
&= m_i \cdot ((\vec{d_i} + \vec{R_i}) \times \vec{v_i}) \\
&= m_i \cdot (\vec{d_i} \times \vec{v_i}) + m_i \cdot (\vec{R_i} \times \vec{v_i}) \\
\vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel
\end{aligned}$$

$\vec{L}_\parallel$ ist parallel zu $\vec{\omega}$ und damit zeitlich konstant in Betrag und Richtung. Offenbar ist

$$\vec{L}_\parallel = J \cdot \vec{\omega}$$

$\vec{L}_\perp$ steht normal auf $\vec{L}_\parallel$ und rotiert um die Drehachse. $\vec{L}_\perp$ ist im allgemeinen nicht 0. Nur wenn die Drehachse gleich der Symmetrieachse des Körpers ist, verschwindet sein Beitrag. Denn wenn die Rotation um eine Symmetrieachse erfolgt, so gibt es zu jedem m_i ein dazu symmetrisches Massenelement, für das $\vec{v_i}$ durch $-\vec{v_i}$ ersetzt ist. D.h. diese Beiträge zu $\vec{L}_\perp$ kompensieren sich und $\vec{L}_\perp \equiv 0$.
Wir betrachten die Fälle

- Fall 1:
  $\vec{L}_\perp = 0$
  $\vec{L}_\parallel = J \cdot \omega$
- Fall 2:
  $\vec{L}_\perp \neq 0$

In beiden Fällen benötigen wir die Grundgleichung der Dynamik für Drehbewegungen:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Fall 1:
Die Rotation um $|\vec{\omega}|$ muss nicht zeitlich konstant bleiben! Aus der allgemeinen Grundgleichung erhalten wir:

$$\frac{d\vec{L}_{\|}}{dt} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}$$

In einem abgeschlossenen System gibt es keine äußeren Momente, d.h. $\vec{M} = 0$. Daraus folgt, dass $\vec{L}_{\|} = J \cdot \vec{\omega} = \text{konstant}$.
Dieser Fall tritt zum Beispiel bei Elementarteilchen auf: Die meisten Elementarteilchen besitzen einen „Eigendrehimpuls“ („Spin“). Dieser bleibt zeitlich konstant, solange kein Drehmoment in Richtung des Spins am Teilchen angreift. Der Spin ist zur Charakterisierung von Elementarteilchen genauso wichtig wie Masse, Ladung oder Radius.
Fall 2:
Die Rotation sei gleichförmig, d.h. $\vec{\omega}$ ist konstant. Wieder folgt, dass $\vec{L}_{\|}$ konstant ist.

Statische Unwucht im Fall 1

Die Drehachse soll nicht durch den Schwerpunkt gehen. Das Lager muss eine Zentripetalkraft aufbringen, um die in S vereinigt gedachte Gesamtmasse auf ihrer Kreisbahn zu halten. Diese beträgt:

$$\vec{F}_{ZP} = M \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_S$$

Dynamische Unwucht im Fall 2

Die Richtung von $\hat{\omega}$ fällt nicht mit der Symmetrieachse zusammen, sie geht aber durch den Schwerpunkt. $\Rightarrow \vec{L}_{\perp} \neq 0$. $\vec{L}_{\perp}$ dreht sich um $\hat{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

$$\begin{aligned}
|\Delta\vec{L}_{\perp}| &= \vec{L}_{\perp} \cdot \Delta\varphi \\
\frac{\Delta\vec{L}_{\perp}}{\Delta t} &= \vec{L}_{\perp} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \\
\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} &= \vec{L}_{\perp} \cdot \dot{\varphi} = \vec{L}_{\perp} \cdot \omega
\end{aligned}$$

Richtung und Betrag von $\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$ stimmen mit dem Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{L}_{\perp}$ überein. Daraus folgt:

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$$

Wegen

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}$$

wird (wenn $\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \neq 0$) auf die Achse ein Drehmoment senkrecht zur Drehachse ausgeübt ($\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$). $\vec{M}$ versucht, die Drehachse zu kippen!
Dynamisches Auswuchten beinhaltet, dass die Drehachse mit der Symmetrieachse des Körpers zusammenfällt oder anders ausgedrückt: Dynamisches Auswuchten bedeutet, dass $\vec{L}_\perp$ zum Verschwinden gebracht wird.

Rotation um freie Achsen

Erfolge anfangs die Rotation nicht um eine Symmetrieachse, sondern um eine beliebig orientierte Schwerpunktsachse. Die Rotationsachse wird durch die Änderung von $\vec{L}_\perp$ gekippt, bis sie mit der Symmetrieachse übereinstimmt.
Die Zentrifugalkräfte in den beiden Hälften des rotierenden Körpers bilden ein Kräftepaar, das Zentrifugalmoment. Es verschwindet nur, wenn der Körper um eine Symmetrieachse durch den Schwerpunkt S rotiert.
Jeder Körper hat zwei, aufeinander senkrecht stehende, durch S gehende Achsen, die zum größten bzw. kleinsten Trägheitsmoment gehören. Es gibt aber drei Freiheitsgrade der Rotation im Raum. Die dritte Achse ist jene, die auf die beiden anderen Achsen senkrecht steht.

Definition 5.9: FREIE ACHSEN

> *Bei diesen drei Drechachsen wird auf den rotierenden Körper keine Kraft/ kein Moment ausgeübt. Sie heißen deshalb freie Achsen.*

Offenbar fallen dann bei Rotation um die freien Achsen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehvektor in ihrer Richtung zusammen. Nennen wir diese drei Achsen a, b und c, dann bedeutet obige Aussage offenbar, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ für die Rotation um eine beliebige Achse geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_a + \vec{L}_b + \vec{L}_c \\ &= J_a \cdot \vec{\omega}_a + J_b \cdot \vec{\omega}_b + J_c \cdot \vec{\omega}_c\end{aligned}$$

Offenbar liefert diese Beziehung korrekt, dass bei Rotation um eine freie Achse, z.B. a, $\vec{L}_a$ und $\vec{\omega}_a$ gleiche Richtung haben ($\vec{L}_a = J_a \cdot \vec{\omega}_a$).

5.7.2 Kreisel

Definition 5.10: KREISEL

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung im Raum so erfolgt, dass lediglich ein Punkt seine Lage im Raum beibehält (Fixpunkt). $\vec{\omega}(t)$ ist zeitabhängig!

Definition 5.11: SYMMETRISCHER KREISEL

Symmetrische Kreisel sind um eine Figurenachse, die durch S geht, rotationssymmetrisch.

Wir betrachten im Folgenden nur symmetrische Kreisel.
Einige wichtigen Größen:

- Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$:

$$\vec{v}_i(z) = \vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_i(t)$$

wobei $\vec{\omega}(t)$ seine Lage im Raum verändern kann.

Bei der kräftefreien Bewegung gelten folgende Erhaltungssätze:

- $\vec{L}$ ist konstant in Betrag und Richtung.
- Die Rotationsenergie W_{rot} ist konstant.

$$\begin{aligned} W_{rot} &= \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} (J \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} \\ W_{rot} &= \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \text{konstant} \end{aligned}$$

Kräftefreier Kreisel

Von einem kräftefreien Kreisel spricht man, wenn am Schwerpunkt S kein Drehmoment $\vec{M}$ bezüglich des Fixpunktes O angreift, d.h. dass der Schwerpunkt der Fixpunkt sein muss. Es gelten der Drehimpuls- und der Energieerhaltungssatz.
Einfacher Fall
Dreht sich der Kreisel um seine Figurenachse F, so fällt diese mit $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ zusammen. Die Rotation erfolgt dann, wie bei dem starren Rotator, um eine raumfeste Achse.
Allgemeiner Fall
$\vec{\omega}$ liegt in einer beliebigen Richtung. $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und die Richtung der Figurenachse fallen nicht zusammen.
Qualitative Betrachtungen

Bewegung von $\vec{\omega}$:
Der Energiesatz liefert

$$\begin{aligned} W_{rot} &= \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega} = \text{konstant} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{L}|\cdot\omega_L = \text{konstant} \end{aligned}$$

wobei $\vec{\omega}_L$ die Komponente in Richtung von $\vec{L}$ ist. Wegen $|\vec{L}| = \text{konstant}$, folgt, dass $|\vec{\omega}_L|$ konstant ist. $\vec{\omega}$ durchläuft einen Kegel um $\vec{L}$ (Rastpolkegel).
Bewegung der Figurenachse F:
Lassen wir den Kreisel zunächst um F rotieren:

$$W_{rot} = \frac{1}{2}J_F\cdot\omega_F^2$$

Möge jetzt ein Drehmoment $\vec{M}$ senkrecht zu F einwirken. Offenbar bleibt die Richtung von F nicht mehr erhalten, da die Drehimpulsbilanz geändert wird. Allerdings ändert sich W_{rot} nicht (die Rotationsgeschwindigkeit ist unverändert). Daraus folgt, dass $|\vec{\omega}_F|$ erhalten bleibt. $\vec{\omega}_F$ beschreibt einen Kegel um $\vec{L}$ (Nutationskegel).
Man kann sich die gemeinsame Bewegung von F und $\vec{\omega}$ auf zwei Kegeln um $\vec{L}$ mit Hilfe eines dritten Kegels (Gangpolkegel) verdeutlichen. Er ist starr mit der Achse F verbunden, berührt den raumfesten Rastpolkegel entlang von $\vec{\omega}$ und rollt auf ihm ab. Die Berührungslinie von Rastpol- und Gangpolkegel liefert $\vec{\omega}$.

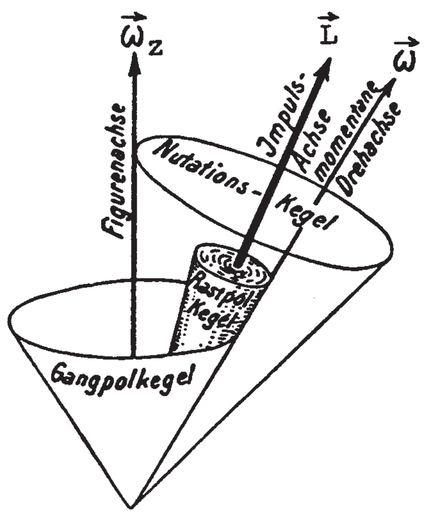

Abbildung 5.2: Rastpol-, Nutations- und Gangpolkegel

Wir hatten

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}\\ \vec{L} &= J_F \cdot \vec{\omega}_F + J_{\perp} \cdot \vec{\omega}_{\perp}\\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}_F + \vec{\omega}_{\perp}\end{aligned}$$

Offenbar fallen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ deswegen nicht zusammen, weil die Anteile aus denen sie sich zusammensetzen, nicht zueinander proportional sind ($J_F \neq J_{\perp}$). Jedoch bleiben die Längen von $\vec{\omega}$ und $\vec{\omega}_F$ erhalten; sie laufen auf Kegeln um $\vec{L}$. Offenbar liegen $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_F$ und $\vec{L}$ immer in einer Ebene.

Bewegung von symmetrischen Kreiseln unter dem Einfluss äußerer Kräfte, Präzession

Am Kreisel greife ein äußeres Moment $\vec{M}$ an. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ liefert, dass dann die Richtung von $\vec{L}$ nicht erhalten bleibt.
Beispiel:
Wenn der Kreisel nicht S als Fixpunkt hat, so greift auf Grund der Schwerkraft das Moment

$$\vec{M} = \vec{r}_{OS} \times m \cdot \vec{g}$$

an. $\vec{M}$ steht normal auf $\vec{L}$. Daraus folgt, dass $|\vec{L}|$ erhalten bleibt und $|d\vec{L}| = L \cdot d\varphi$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| &= |\vec{M}|\\ L \cdot \frac{d\varphi}{dt} &= |\vec{M}| = m \cdot g \cdot r_{OS}\\ \omega_P &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\vec{M}|}{L}\\ \omega_P &= \frac{m \cdot g \cdot r_{OS}}{J \cdot \omega}\end{aligned}$$

Es bilde jetzt $\vec{L}$ den Winkel α mit der Vertikalen:

$$\omega_P = \frac{M}{L} = \frac{r_{OS} \cdot \sin\alpha \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega \cdot \sin\alpha}$$

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r_{OS}}{J \cdot \omega}$$

Allgemeiner Fall
$\vec{\omega}$ hat nicht die Richtung der Figurenachse. Die Figurenachse umläuft die $\vec{L}$-Achse, welche um die Kraftrichtung präzediert. Die genaue Bahn hängt von ω_P und der Nutationsfrequenz Ω ab.

Präzession unter dem Einfluss eines konstanten Drehmoments

Bei der Präzession des Kreisels im Schwerefeld dreht sich die Richtung von $\vec{M} = \vec{r}_{OD} \times \vec{F}_G$ mit der Präzession mit. Wir betrachten noch den Fall, dass auf den Kreisel ein konstantes $\vec{M}$ (also konstante Richtung) ausgeübt wird. Wegen

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$$

richtet sich der Kreisel in Richtung von $\vec{M}$ aus.
Beispiel
Einstellung eines Kreiselkompasses in die Nordrichtung
Der Kreisel befindet sich am Äquator. Er ist horizontal drehbar gelagert. Seine Achse wird durch $\vec{M}$ gekippt, bis sie parallel zur Erdachse steht. Der Kreisel zeigt dann die N-S-Richtung an.

5.7.3 Rotatorische Relativbewegung

Wir betrachten die durch die Bewegung des Koordinatensystems bedingte Beschleunigung:
Fall 1: Der Körper ruhe im bewegten (rotierenden) System.
Er erfährt eine Radialbeschleunigung

$$a_r = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

die ihn auf der Kreisbahn hält. Im rotierenden System registriert der Beobachter also $\vec{a}_r' = -\vec{a}_r$ (Zentrifugalbeschleunigung).
Fall 2: Der Körper bewegt sich mit $\vec{v}$ im rotierenden System.
Wir lassen einen Massenpunkt aus dem Zentrum (Drehachse) mit $\vec{v}$ starten. Der Beobachter im rotierenden System stellt eine Abweichung von der geraden Bahn fest, da sich das Koordinatensystem unter dem Massenpunkt wegdreht. Radial hätte sich der Massenpunkt in t um $r = v \cdot t$ bewegt. Andererseits hat ein Punkt auf r den Weg $s = \omega \cdot r \cdot t$ zurückgelgt. Einsetzen für r liefert

$$s = \omega \cdot v \cdot t^2$$

Aus dem Vergleich mit

$$s = \frac{1}{2} a_c \cdot t^2$$

folgt $a_c = 2 \cdot v \cdot \omega$ oder verktoriell

$$\vec{a}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Die Beschleunigung a_c heißt Coriolis-Beschleunigung.

5.7.4 Deformierbare Festkörper: Auswirkungen äußerer Kräfte und Momente

Bisher haben wir uns zunächst mit einfachen Mehr-Teilchen-Systemen und dann mit dem Modell des starren Körpers beschäftigt. Nun wenden wir uns dem Verhalten deformierbarer Körper zu und benutzen dafür das Federmodell zur Beschreibung des elastischen Körpers.
Federn verhalten sich bei kleinen Belastungen elastisch. Das heißt, dass eine durch eine einwirkende Kraft hervorgerufene Längenänderung rückgängig gemacht wird, wenn die Kraft verschwindet. Es gilt das Hooksche Gesetz $\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$. In unserem Kristall-Modell stellen wir uns die Atome durch Federn verbunden vor. Eine kleine äußere Kraft führt zu einer kleinen Längenänderung der Kristall-Abmessung. Der Kristall zeigt elastisches Verhalten.

Begründung des Hookschen Gesetzes

Abbildung 5.3 zeigt qualitativ den Potentialverlauf zwischen zwei Atomen in einem Festkörper. In der Umgebung von $R = R_0$ ist der Verlauf von $V(\vec{R})$ quadratisch.

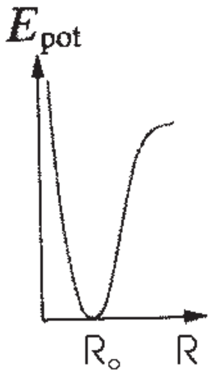

Abbildung 5.3: Potentialverlauf im Festkörper

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{R}) &= -\mathrm{grad} V(\vec{R}) \propto (\vec{R} - \vec{R}_0) \\ F(s) &= -D \cdot s \qquad \text{wobei} \quad s = |\vec{R} - \vec{R}_0| \end{aligned}$$

Große äußere Kräfte führen zu irreversiblen Änderungen der Kristallstruktur. Der Körper zeigt plastisches Verhalten.
Im Rahmen obiger Modellvorstellung (Gitter-Feder-Modell) behandeln wir jetzt die Auswirkung äußerer Kräfte $\vec{F}_s$ und/oder $\vec{F}_t$, die entweder senkrecht ($\vec{F}_s$) oder parallel ($\vec{F}_t$) zur Oberfläche angreifen. Qualitativ bewirkt $\vec{F}_s$ eine Dehnung oder Stauchung und $\vec{F}_t$ eine Scherung oder Torsion.

Druck, Dehnung, Stauchung

Die Kraft $\vec{F}_s$ steht normal auf die Oberfläche. Sie führt zur Dehnung/Stauchung aller Federn, die beansprucht werden. Die notwendige Kraft $\vec{F}_s$, die benötigt wird, um eine bestimmte Längenänderung Δl hervorzurufen, ist proportional zur Zahl der Federn, die gedehnt werden müssen, d.h. zur Größe A der belasteten Oberfläche.

$$|\vec{F}_s| \sim A$$

Eine vorgegebene Kraft $|\vec{F}_s|$ ruft bei jeder Feder eine bestimmte (dieselbe) Längenänderung hervor. Somit ist die gesamte Längenändeung Δl proportional zur Zahl der beanspruchten Federn und damit proportional zur Länge l des Körpers.

$$\Delta l \sim l$$

Anders ausgedrückt: die relative Längenänderung $\Delta l/l$ die bei vorgegebener $\vec{F}_s$ erreicht wird, hängt nur von $\vec{F}_s$ und von dem verwendeten Material ab.

$$\vec{F}_s \sim \frac{\Delta l}{l}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{F}_s &\sim A \cdot \frac{\Delta l}{l} \sim E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot A \\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} &= \frac{1}{E} \cdot \frac{\vec{F}_s}{A} = \frac{1}{E} \cdot \sigma \end{aligned}$$

Definition 5.12: DEHNUNG/STAUCHUNG

> $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ *heißt Dehnung oder Stauchung.*

Definition 5.13: ZUG/DRUCKSPANNUNG

> $\sigma = \frac{\vec{F}_s}{A}$ *heißt Zug oder Druckspannung.*

Definition 5.14: ELASTIZITÄTSMODUL

> *E heißt Elastizitätsmodul.*

Zug und Druckspannungen haben die Dimension Kraft durch (Querschnitts)-Fläche, d.h. die Einheit der Spannung ist $1\ \mathrm{Nm}^{-2} = 1\,\mathrm{Pascal}$ (Pa). Weiterhin gebräuchlich ist die Einheit $1\,\mathrm{bar} = 10^5$ Pa. Sie wird auch zur Angabe des Luftdruckes verwendet und ist dort die Gewichtskraft einer Gassäule (Atmosphäre) auf eine Fläche (der Erdoberfläche).
Das Hooksche Gesetz ($\Delta l \sim F$ bzw. $\varepsilon \sim \sigma$) gilt nur, solange die Federn nicht überdehnt werden. Zu große Spannungen führen zu plastischem Verhalten.

Scherung

Makroskopisch gesehen, werden bei der Scherung die Gitterebenen gegeneinander verschoben. Betrachtet man aber das Potentialkurvenmodell und trägt die potentielle Energie eines Gitteratoms im Kristall als Funktion der Verschiebung Δx auf, so sieht man, dass die angreifende Kraft $\vec{F}_t$ so groß sein muss, dass die Atome über die dazwischenliegenden Maxima kommen können. Da man den Abstand zwischen Atomen bei Verschiebung von Gitterebenen wenig ändert, sind die Extrema wesentlich flacher ausgebildet als das Minimum im Potential zwischen zwei Atomen.
Bei der Scherung greift ein Kräftepaar an den gegenüberliegenden Oberflächen an. Die Gitterachsen werden gekippt, die Abstände zwischen den Gitteratomen ändern sich dabei aber nicht. Wiederum gilt, dass, um eine bestimmte Scherung Δx zu erzielen, die Kraft $\vec{F}_t$ proportional zur Fläche A des auf Scherung beanspruchten Körpers sein muss.

$$|\vec{F}_t| \sim A$$

Der Scherungswinkel hängt lediglich von $\vec{F}_t$ ab. Bei kleinen Winkeln gilt

$$\vec{F}_t \sim \frac{\Delta x}{d} = \tan\varphi \approx \varphi$$

Für kleine Winkel φ ($\varphi \leq 10$ Grad im BOGENMASS!) gilt immer $\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi$.
Je dicker der Stoff ist, desto mehr Atome müssen verschoben werden. Andererseits wächst Δx mit der Zahl der Atome, bestimmt durch die Dicke d, an.
Durch Einführung einer Proportionalitätskonstanten erhält man:

$$F_t = G \cdot \frac{\Delta x}{d} \cdot A$$

oder

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{1}{G} \cdot \frac{F_t}{A} = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Definition 5.15: SCHERMODUL

G heißt Scher- oder Schubmodul.

Definition 5.16: SCHUBSPANNUNG

τ heißt Schubspannung. Ihre Einheit ist 1 Pa.

Nur bei kleinen Schubspannungen bleibt das elastische Verhalten erhalten. Die erzielte Scherung Δx bezogen auf die Dicke d, der Scherungswinkel, ist proportional zur Schubspannung τ.

Stoff	E-modul [kbar]	Schubmodul [kbar]
Al	706	265
Cu	1225	455
Edelstahl	1991	700
Ni	2060	78,5

Wir erwarten, dass Festkörper gegenüber Scherung „weicher“ sind als gegenüber Stauchung, da keine Gitterabstände geändert werden müssen. Sportverletzungen sind meist Scher- oder Torsionsbrüche.

Torsion

Die Torsion eines Stabes kann auf die Scherung zurückgeführt werden. Zerlegt man einen Stab der durch ein Drehmoment belastet wird in einzelne Hohlzylinderelemente, so werden diese auf Scherung beansprucht (Scherwinkel α). Für den Zusammenhang zwischen Verdrillungswinkel φ und dem Verdrillungsdrehmoment M ergibt sich:

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{l} \cdot \varphi$$

wobei R der Radius des Stabes ist und l seine Länge. G wird manchmal auch Torsionsmodul genannt. Die Mitte des Stabes (neutrale Faser) wird nicht beansprucht. Sie kann durch Spannungsdoppelbrechung sichtbar gemacht werden.

Kapitel 6

Wärmelehre

6.1 Einführung

Wir wollen nun unsere Modellvorstellung eines Gases präzisieren. Wir hatten als Gasmodell ein Ensemble von Massenpunkten angenommen, die miteinander nur dann wechselwirken, wenn sie zusammenstoßen. Dabei wird Impuls und Energie ausgetauscht. Dies führt zu einer Verteilung der Geschwindigkeitsbeträge um einen Mittelwert. Dieser hängt von der Temperatur ab! Wenn Gasatome auf Gefäßwände treffen, wird Impuls auf die Wand übertragen. Wegen $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ wird bei der Übertragung von Impuls auf die Wände eine Kraft ausgeübt.
Wir werden diese Vorstellungen noch etwas detaillierter fassen, um die makroskopischen Gaseigenschaften, d.h. seine Zustandsgrößen

- Druck p
- Volumen V
- Temperatur T

zu beschreiben und um diese Größen zu verknüpfen. Dies führt zur Zustandsgleichung von Gasen.

6.2 Kinetische Gastheorie I

Wir führen zunächst die Modellvorstellung des idealen Gases ein.

6.2.1 Ideales Gas

Definition 6.1: Ideales Gas

Ein ideales Gas besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Die Atome sind punktförmig.*
   D.h. der Atomdurchmesser ist gegenüber dem mittleren Abstand der Atome in der Gasphase vernachlässigbar.
2. *Bei Stößen der Moleküle untereinander oder mit Wänden wird Impuls und Energie ausgetauscht. Die Stöße sind elastisch.*
3. *Alle Geschwindigkeitsrichtungen kommen gleich häufig vor.*
4. *Die Beträge der Geschwindigkeiten haben eine Verteilung (Maxwell-Verteilung) um die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$.*
5. *Führt man dem Gas Energie zu (Erhitzen, Stempeldruck), so ändert sich die kinetische Energie der Atome. $\Rightarrow$ Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ hängt von der Temperatur des Gases ab: $\bar{v}(T)$.*

Wechselwirkungspotential für die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Atomen/Molekülen im Rahmen des idealen Gases

Eine Wechselwirkung der Teilchen tritt nur bei der direkten Berührung starrer Körper auf. Bei Abständen $d > 2r_0$ beeinflussen sich die Teilchen nicht. Das Potential wird gewählt zu

- $V(r) = 0$ für $|\vec{r}| > 2r_0$
- $V(r) = \infty$ für $|\vec{r}| \leq 2r_0$

Wenn ein Gas durch ein solches Potential beschrieben werden kann, ist es ein ideales Gas.
Die Überprüfung der Modellvorstellung des idealen Gases kann durch die Brownsche Molekularbewegung erfolgen. Betrachtet man Tusche oder Rußteilchen in Lösung unter dem Mikroskop, kann man eine Zitterbewegung der Partikel beobachten. Die Bewegung ist umso heftiger, je kleiner die betrachteten Teilchen sind, beziehungsweise je höher die Temperatur der Probe ist.
Unser Modell sagt, dass die Moleküle eines Gases Impuls auf größere Teilchen übertragen. Offenbar gilt dies auch für die Moleküle des Lösungsmittels der Probe. Also sind auch die Flüssigkeitsmoleküle nicht in Ruhe, sondern haben eine kinetische Energie, die von der Temperatur abhängt. Wegen der größeren Masse M (Trägheit) bewegen sich die größeren Partikel entsprechend langsamer. Im Mittel besitzen jedoch alle Partikel unabhängig von ihrer Masse/Größe dieselbe kinetische Energie $\overline{W_{kin}(T)}$, d.h. eine Geschwindigkeit, die die Partikelgröße wiederspiegelt.

$$\begin{aligned} \overline{W_{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot \overline{v^2} \\ \sqrt{\overline{v^2}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot \overline{W_{kin}(T)}}{M}} \end{aligned}$$

Anwendungen der Brown'schen Bewegung

- Begrenzt die Empfindlichkeit von Zeigerinstrumenten, die wie Rußteilchen zu zittern beginnen, wenn ihre Trägheit sehr klein wird.
- Elektronen in Metallen haben Brown'sche Bewegung. Dies führt zu Spannungsschwankungen an den Enden des Leiters (Widerstandsrauschen). Je heftiger die Bewegung, umso größer der elektrische Widerstand (siehe Widerstandsthermometer).

6.2.2 Herleitung des Boyle-Mariotte-Gesetzes aus dem Modell des idealen Gases

Wir setzen voraus, dass der Druck auf die Wände durch die Übertragung von Impuls zustande kommt, wenn dort Atome reflektiert werden ($d\vec{p}/dA = \vec{F} =$ Kraft auf die Wand).

Einführung der Größe Druck

Wir interessieren uns im Folgenden für die Normalkomponente F_s („Normalkraft“) bezogen auf die Fläche, auf die die Kraft F_s einwirkt.

Definition 6.2: DRUCK

Der Quotient aus Normal(Senkrecht-)komponente der Kraft auf die Fläche A heißt Druck p.

$$p = \frac{F_s}{A}$$

Seine SI-Einheit ist $1\,Nm^{-2} = 1\,Pa$.

Der Druck p ist proportional zu der Zahl $N_{Stoß}$ der Stöße der Moleküle auf den Stempel.

$$p \sim N_{\text{Stoß}}$$

Halbiert man in einem Kolben das Volumen durch Hineinschieben des Stempels (bei gleicher Teilchenzahl), so verdoppelt sich die Stoßzahl und damit auch der Druck. Daraus folgt:

Boyle-Mariotte'sches Gesetz

Bei konstanter Temperatur gilt:

$$p \cdot V = konstant \tag{6.1}$$

Im Kolben befinden sich, unabhängig vom Volumen, dieselbe Anzahl von Molekülen d.h. dieselbe Materiemenge.

Definition 6.3: MASSENDICHTE

Die Massendichte ρ eines homogenen Körpers ist gegeben durch das Verhältnis seiner Masse zu seinem Volumen.

$$\frac{M}{V} = \rho$$

Bei der Kompression wächst ρ. Ersetzt man im Boyle-Mariotte'schen Gesetz das Volumen durch $V = M/\rho$, so erhält man:

$$\frac{M}{\rho} \cdot p = \text{konstant}$$

Für ein System konstanter Materiemenge gilt bei konstanter Temperatur (keine Energiezufuhr von außen):

$$\frac{p}{\rho} = \text{konstant}$$

6.2.3 Luftdruck und barometrische Höhenformel

In einem Gas besteht, infolge seines Gewichts, ein Schweredruck.

Definition 6.4: NORMALDRUCK

Man bezeichnet den Druck von 760 Torr, den die Lufthülle bei normalen Wetterbedingungen in Meereshöhe auf die Erdoberfläche ausübt, als Normaldruck. Dabei entspricht 1 Torr = 133,3 Pa.

Die Gewichtskraft F_G der auf einer Fläche A lastenden Luftsäule nimmt mit zunehmender Höhe h ab und zwar beim Anstieg von h nach $h + dh$ um das Gewicht der im Volumen $dV = A \cdot dh$ befindlichen Luftsäule.

$$dF_G = -m \cdot g = -\rho(h) \cdot A \cdot dh \cdot g$$

oder

$$dp = \frac{dF_G}{A} = -\rho(h) \cdot g \cdot dh$$

Dabei hängt ρ von h ab. Für eine isotherme Atmosphäre (d.h. bei konstanter Temperatur) gilt (Boyle-Mariotte):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p(h)}{\rho(h)} = \text{konstant}$$

Wir schreiben für die Konstante p_0/ρ_0, wobei die Werte für $h = 0$ gelten sollen.

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot p(h) \cdot dh$$

Integration liefert

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h + c$$

wobei $c = \ln p_0$ sein muss.

Barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}} \tag{6.2}$$

Es ist $\rho_0 = 1{,}24\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $p_0 = 101{,}3\,\mathrm{kPa}$. Damit wird

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{8{,}33\,\mathrm{km}}}$$

d.h. nach 8,33 km sinkt p_0 auf $p_0 \cdot \frac{1}{e}$; bei 5,77 km ist der Luftdruck auf $\frac{p_0}{2}$ gefallen. In der realen Atmosphäre nimmt die Temperatur mit wachsendem h ab. Trotzdem ist die barometrische Höhenformel für die untere Atmosphäre eine brauchbare Näherung.

6.2.4 Berechnung des Gasdrucks auf eine Gefäßwand

Der Gasdruck p entsteht durch die elastische Reflexion der Gasatome an der Gefäßwand. Dabei haben wir gelernt, dass die Normalkomponente des Impulses $\vec{p}$, also $|\vec{p}_n|$, ihre Richtung umkehrt. Der übertragene Impuls $|\Delta\vec{p}_n|$ beträgt also pro Stoß:

$$|\Delta\vec{p}_n| = 2 \cdot |\vec{p}_n| = 2 \cdot v_n \cdot m$$

wobei v_n die Normalkomponente der Geschwindigkeit und m die Molekülmasse ist.
Die Impulsänderung pro Zeit ist gleich der ausgeübten Kraft F_s:

$$\frac{|\Delta\vec{p}_n|}{\Delta t} = F_s$$

Wir betrachten ein würfelförmiges Gefäß der Kantenlänge a. Dieses sei mit N Atomen gefüllt. Im Zeitmittel fliegen je N/3 Atome zwischen zwei gegenüberliegenden Wänden hin und her. Wir nehmen vereinfachend an, dass die N/3 Atome nur in Richtung der Wände fliegen (mit Geschwindigkeit $\vec{v}_i$).
Wie oft trifft ein Atom i auf eine Wand?
Die Flugzeit Δt zwischen zwei Stößen auf dieselbe Wand ist für das Atom i

$$\Delta t = 2\frac{a}{v_i}$$

Es erfolgt ein Stoß pro Intervall Δt. Demnach ist $1/\Delta t$ die Zahl der Stöße eines Atoms pro Zeiteinheit.
Wie groß ist der in einem Stoß abgegebene Impuls Δp_i?
Wir wissen, dass für einen elastischen Wandstoß gilt:

$$|\Delta \vec{p}_i| = 2 \cdot m \cdot v_i$$

Die auf die Wand ausgeübte Kraft F_i ist (für ein Molekül pro Zeitintervall Δt)

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{|\Delta \vec{p}_i|}{\Delta t} \\ &= 2 \cdot m \cdot v_i \cdot \frac{v_i}{2a} = \frac{m \cdot v_i^2}{a} \end{aligned}$$

Wie groß ist die Gesamtkraft F_s aller N/3 Atome auf die Wand?

$$F_s = \sum_{i=1}^{N/3} F_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{a} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

Definition 6.5: Mittleres Geschwindigkeitsquadrat

Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat ist gegeben durch

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

Daraus folgt:

$$F_s = \frac{N}{3} \cdot \frac{m}{a} \cdot \overline{v^2}$$

Wie groß ist der Druck p auf die Wand?

$$p = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{a^2} = \frac{N}{3} \cdot \frac{m}{a^3} \cdot \overline{v^2} = \frac{N}{3} \cdot \frac{m}{V} \cdot \overline{v^2}$$

Das Boyle-Mariotte'sche Gesetz, bei konstanter Temperatur, lässt sich jetzt folgendermaßen umschreiben:

$$p \cdot V = \frac{N}{3} \cdot m \cdot \overline{v^2} = \text{konstant}$$

Da die Form des Gefäßes in der Endformel nicht auftritt, gilt diese offenbar allgemein. Wir schreiben nochmals um:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

Definition 6.6: Thermische Energie

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} = \mathrm{W}_{therm}$$

Ist die mittlere Bewegungsenergie (Thermische Energie) eines Gasatoms bei der Temperatur T

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot W_{therm}(T)$$

6.3 Temperatur

6.3.1 Einführung

Der Mensch hat zwar einen Temperatursinn, allerdings reagiert er vor allem auf Temperaturänderungen. Dies hat sich im Laufe der Evolution deshalb so entwickelt, weil Temperaturänderungen Gefahren signalisieren können. Wir wollen die Temperatur vorläufig definieren als den Zustand eines Körpers, den wir mit unserem Temperatursinn als warm oder kalt empfinden. Viele physikalische Größen hängen von der Temperatur ab:

- Thermische Ausdehnung von Körpern (Festkörper bzw. Flüssigkeiten)
- Druck eines Gases
- Elektrischer Widerstand von Leitern
- Strahlungsspektrum von glühenden Körpern:
  Ein Ofen glüht höchstens, während von der Sonne sichtbares und auch UV-Licht ausgeht.
- Spannung in Thermoelementen

Im Prinzip kann jede der physikalischen Größen zur Definition bzw. Messung der physikalischen Größe Temperatur verwendet werden.

Definition 6.7: THERMOMETER

> *Ein Thermometer nutzt die Temperaturabhängigkeit bestimmter Größen zur Temperaturmessung in einem bestimmten Bereich aus.*

Wir führen nicht gleich die endgültige Definition der Temperatur als physikalische Größe, gemessen in der SI-Einheit 1 K, durch.
Für den Alltag hat es sich bewährt, die physikalische Größe Temperatur über die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten festzulegen.

Definition 6.8: CELSIUSGRAD

> *Mit ϑ kürzt man die Temperatur ab, die mit den gängigen Haushaltsthermometern gemessen wird. Sie wird in Grad Celsius angegeben (℃).*

Bei Flüssigkeiten gilt in guter Näherung folgender Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur:

$$V(\vartheta) = V_0 \cdot (1 + \gamma\vartheta + \varepsilon\vartheta^2)$$

mit $V_0 = V(\vartheta = 0\,℃)$ und γ dem Volumensausdehnungskoeffizienten der betreffenden Flüssigkeit. Es ist z.B. $\gamma_{Hg} = 0,182 \cdot 10^{-3}\,(℃)^{-1}$. Bei Alkoholen ist γ etwa 10mal so groß.
Das Messverfahren für Temperaturen besteht in der Bestimmung der Ausdehnung die beim Erwärmen erfolgt. Dieses Messverfahren muss noch durch eine Maßeinheit ergänzt werden. Es müssen zwei Fixpunkte festgelgt werden. Z.B.:

- Temperatur des schmelzenden Eises = 0℃
- Temperatur des siedenden Wassers = 100℃

Beide Messungen sind bei Normaldruck ($1,0135 \cdot 10^5$ Pa) durchzuführen. 1/100 des Abstandes der Fixpunkte entspricht $\Delta\vartheta = 1$ ℃. Die Anzeige hängt allerdings etwas von der Thermometersubstanz ab, weil $V(\vartheta)$ nicht streng linear ist. Die relative Größe ε/γ ist für verschiedene Thermometersubstanzen unterschiedlich. Unter anderem auch aufgrund dieser Tatsache ist die Einheit Celsius in der Physik nicht üblich. Außerdem verlangt der Bezugspunkt 0℃ auch negative Temperaturen.

Wärmeausdehnung von Festkörpern

Ursache für die Ausdehnung von Festkörpern mit zunehmender Temperatur ist das asymmetrische Potential zwischen den Atomen. Die Atome führen Schwingungen um die Gleichgewichtslage r_0 aus. Je größer die Temperatur, desto größer die Schwingungsenergie. Bei kleinen Temperaturen entspricht der mittlere Abstand der Atome in etwa r_0. Bei höheren Temperaturen ist der mittlere Abstand jedoch größer. Das führt zur Volumenvergrößerung (Wärmeausdehnung).

6.3.2 Temperaturmessung

Im Prinzip wird die Temperaturabhängigkeit einer Eigenschaft eines Körpers ausgenutzt.

Thermische Ausdehnung

- Flüssigkeitsthermometer
  Gebräuchlich sind Hg (-38℃...350℃) und Alkohol (-114℃...0℃). Wenn ein Hg-Thermometer bei 0℃ und bei 100℃ mit einem Gasthermometer übereinstimmt, differieren sie bei 50℃ um bis zu 0,1℃!
- Bi-Metall-Thermometer
  Zwei Metalle unterschiedlicher Längenausdehnung werden verschweißt bzw. zusammengewalzt. Bei ΔT verbiegt sich der Bimetallstreifen. Bimetall-Thermometer werden als Überlastungsschutz in elektrischen Geräten eingesetzt. Z.B. im Elektromotor (bei Überhitzung würden die Wicklungen verbrennen) oder im Bügeleisen (die Heizplatte soll auf konstanter Temperatur gehalten werden; bei einer bestimmten Verbiegung wird der Kontakt geschlossen und der Stromfluß unterbrochen).
  Eigenschaften sind:
  - geringe Genauigkeit
  - Einsatz als elektrischer Kontakt möglich

Thermospannung

- Thermoelement
  Hier werden zwei verschiedene Metalle verlötet. An der Lötstelle entsteht eine Kontaktspannung (Ladungstrennung!), die von der Temperatur abhängt. Verlötet man die beiden anderen Enden ebenfalls, so heben sich diese Spannungen auf, solange beide Lötstellen auf gleicher Temperatur bleiben. Ist dies nicht der Fall, so liegt eine Thermospannung an.

  $$U_{therm} = \alpha(T_1 - T_0)$$

  Fe/Co: $\alpha = 50\mu$V/Grad
  Eigenschaften:

  - Mögliche Verwendung als Fernthermometer
  - Schnelle Anzeige

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

- Widerstandsthermometer
  Der elektrische Widerstand hängt von T ab. Er steigt bei Metallen mit zunehmendem T an. Gebräuchlich sind Widerstandsthermometer aus Platin, die ihren Messbereich von -123℃ bis +630℃ haben. Bei tieferen Temperaturen werden auch Kohle-Widerstandsthermometer eingesetzt.

  Die Elektronen im Metall bewegen sich im Gitter, das aus den Ionenrümpfen gebildet wird. Sie haben eine bestimmte kinetische Energie (thermische Energie, W_{therm}), die von der Temperatur abhängt. Die Elektronen führen Stoß- und Streuprozesse mit den Ionen des Gitters aus. Dadurch wird der Stromfluss behindert. Mit zunehmender Temperatur, und damit höherer kinetischer Energie, steigt auch die Anzahl der Stöße. $\Rightarrow$ Der elektrische Widerstand steigt mit T an.

Strahlungsthermometer

Bei hohen Temperaturen glühen feste Stoffe. Die Energie wird vor allem in Form von elektromagnetischer Strahlung abgegeben. Ein Teil davon in Form von sichtbarem Licht. Die gesamte abgegebene Strahlungsenergie hängt von T ab. Es gilt das

Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$W \sim (T_1^4 - T_0^4) \tag{6.3}$$

Dabei ist T_1 die Temperatur des glühenden Körpers und T_0 die Temperatur der Umgebung. Man vergleicht nun die Strahlung im sichtbaren Bereich, die vom Körper unbekannter Temperatur ausgeht, mit jener einer kalibrierten Strahlungsquelle (Pyrometer).
Die abgegebene elektromagnetische Strahlung wird durch ihre Wellenlänge λ charakterisiert. Typischerweise liegen die Wellenlängen zwischen 0,5 und 3 μm, wenn die Temperatur des strahlenden Körpers zwischen 1000℃ und 3000℃ liegt. Trägt man $P(\lambda)$ gegen λ auf, so erhält man die sogenannte Planck'sche Verteilung. Mit steigender Temperatur verschiebt sich das Maximum zu kleineren Wellenlängen. Die Intensität im sichtbaren Bereich nimmt mit steigender Temperatur stark zu. Der Zusammenhang zwischen $P(\lambda)$ und λ ist durch die Planck'sche Strahlungsformel gegeben.

6.3.3 Gasgesetze

Wir betrachten nun die grundlegenden Zustandsänderungen von idealen Gasen.

Isobare Erwärmung

Hier ist p konstant. Wir untersuchen, wie sich V als Funktion von ϑ ändert. Wir beginnen bei $\vartheta = 0$℃ mit dem Volumen V_0. Dann finden wir experimentell:

$$V(\vartheta) = V_0(1 + \beta\vartheta)$$

mit β= 1/273,15 (℃)$^{-1}$, dem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten. $V(\vartheta)$ ist exakt linear von ϑ abhängig.

Isochore Erwärmung

In diesem Fall ist V konstant. Wir untersuchen, wie sich p als Funktion von ϑ ändert und finden:

$$p(\vartheta) = p_0(1 + \beta'\vartheta)$$

wobei $p_0 = p(\vartheta = 0$℃) ist. Für ideale Gas gilt exakt $\beta' = \beta$.

6.3.4 Einführung der Kelvin-Skala

Wir nehmen an, dass der obige Zusammenhang bis $p = 0\,\mathrm{Pa}$ gilt. Analog für $V(\vartheta)$. Die lineare Extrapolation von $p(\vartheta)$ gegen $p = 0$ liefert die Aussage, dass dies bei -273,15℃ eintritt. Man setzt nun

$$T = (\vartheta + 237,15)\mathrm{K}$$

Dies entspricht einer Verschiebung des Nullpunktes unserer bisherigen Temperaturskala: T wird dort $T = 0\,\mathrm{K}$, wo der Gasdruck $p = 0\,\mathrm{Pa}$ wird.

Definition 6.9: KELVINSKALA

Die um 273,15 Grad verschobene Temperaturskala heißt Kelvinskala. Die Temperatureinheit heißt 1 Kelvin = 1 K. Dabei ist

$$\Delta T \equiv \Delta\vartheta$$

Temperaturen müssen in der Physik immer in K angegeben werden!
Das Kelvin ist eine Basisgröße im SI-System. Damit wird der Zusammenhang

$$p(\vartheta) = p_0(1 + \beta\vartheta)$$

modifiziert zu

$$p(T) = p_0(1 + \beta(T - 273,15)) = p_0(1 + \frac{T}{273,15} - 1)$$

Dadurch ergibt sich für den von der Kelvin-Temperatur abhängigen Druck bzw. das Volumen:

$$\begin{aligned} p(T) &= \frac{p_0 \cdot T}{273,15} \\ V(T) &= \frac{V_0 \cdot T}{273,15} \end{aligned}$$

Beide Beziehungen lassen sich zu einer Beziehung zusammenfassen:

$$p \cdot V = C \cdot T$$

6.3.5 Zustandsgleichung des idealen Gases

Wir suchen nun nach dem Zusammenhang zwischen der Kelvin-Temperatur und der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls. Wir erhielten bisher

$$p(T) \cdot V(T) \sim T$$

und fanden mit Hilfe der kinetischen Gastheorie auch

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot W_{therm}$$

Fasst man beide Gleichungen zusammen, so erhält man

$$p \cdot V = k \cdot N \cdot T$$

wobei wir eine neue Konstante k einführen, um aus obiger Beziehung eine Gleichung zu machen.

Definition 6.10: BOLTZMANN-KONSTANTE

Die Konstante k heißt Boltzmann-Konstante. Sie beträgt $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Weiter ergibt sich die

Mittlere thermische Bewegungsenergie

$$W_{therm} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \tag{6.4}$$

In Worten ausgedrückt heißt dies, dass W_{therm} proportional zur Temperatur T ist. T ist das Maß für die kinetische Energie der Gasmoleküle. Für ein Mol eines idealen Gases lautet der Zusammenhang zwischen p, V und T:

$$p \cdot V_{mol} = k \cdot N_A \cdot T$$

mit N_A der Avogadrokonstanten. Man kürzt nun noch ab:

$$k \cdot N_A = R$$

Definition 6.11: GASKONSTANTE

R heißt allgemeine Gaskonstante und hat den Wert

$$R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Damit lautet die Zustandsgleichung für ein Mol eines idealen Gases

$$p \cdot V_{mol} = R \cdot T$$

Hat man mehr als ein Mol des Gases, so muss man auf der rechten Seite mit der Stoffmenge ν (in Mol) multiplizieren. Es ergibt sich dann die

Allgemeine Zustandsgleichung

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T \tag{6.5}$$

6.4 Kinetische Gastheorie II

6.4.1 Freiheitsgrade

Wir betrachten das Gas nun als Energiespeicher. Energie kann in Form von Bewegung der Moleküle gespeichert werden.

1. Translation
2. Rotation der Moleküle
3. Schwingungsenergie

Die ersten beiden Bewegungen sind Formen von kinetischer Energie. Bei der Schwingung ist Energie in Form von W_{kin} und W_{pot} (Dehnung/Spannung der Moleküle) vorhanden.
Wir betrachten nun ein einatomiges Gas:
Energie wird nun in Form von Translation der Moleküle d.h. als W_{kin}, gespeichert. Aus der Zustandsgleichung folgt:

$$W_{therm}(T) = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Im Mittel entfällt auf die Molekülbewegung längs der drei Koordinaten-Richtungen jeweils $1/2 \cdot k \cdot T$ pro Molekül.

Definition 6.12: FREIHEITSGRAD

> *Die Zahl der Freiheitsgrade (FG) eines Systems ist gleich der Zahl der Koordinaten, die notwendig sind, um die Lage des Systems eindeutig zu beschreiben.*
>
> *Ein Gasmolekül hat drei Freiheitsgrade der Translation. Auf jeden FG entfällt $1/2 \cdot k \cdot T$.*

Wenn ein Molekül weitere Möglichkeiten der Bewegung besitzt, so entfällt auf jede Möglichkeit Energie zu speichern jeweils im Mittel $1/2 \cdot k \cdot T$. Wir ordnen jeder Bewegungsmöglichkeit einen weiteren Freiheitsgrad zu. Dann gilt:
Bei einer Temperatur T ist in jedem Freiheitsgrad im Mittel die Energie $1/2 \cdot k \cdot T$ pro Molekül gespeichert.
Wir betrachten nun ein zweiatomiges Molekül:
Neben den drei Freiheitsgraden der Translation kann eine Rotation in zwei Richtungen, jeweils senkrecht zur Kernverbindungsachse, stattfinden. Die Energiespeicherung erfolgt in Form von kinetischen Energie.
Eine Rotation um die Kernverbindungsachse kann nicht stattfinden, solange wir die Atome als Massenpunkte auffassen. Die erforderliche Energie für die Anregung dieser Bewegung ist sehr hoch! Ein zweiatomiges Molekül besitzt also zwei weitere Freiheitsgrade mit jeweils einer Energie von $1/2 \cdot k \cdot T$.
Nun betrachten wir noch ein dreiatomiges Molekül:
Es können Rotationen um drei aufeinander senkrechte Achsen stattfinden. Somit erhalten wir in diesem Fall drei weiter FG, auf die im Mittel die Energie $1/2 \cdot k \cdot T$ entfällt.

Schwingung/Vibration

Bei einem zweiatomigen Molekül kann in folgender Weise Energie gespeichert werden:

1. als potentielle Energie

   (der „gespannten Feder“, welche die Molekülbindung modelliert)

2. als kinetische Energie

   der um den Schwerpunkt schwingenden Atome

Die Speicherung erfolgt als sowohl in Form von kinetischer als auch als potentielle Energie. Auf jeden dieser beiden Freiheitsgrade entfällt wiederum im Mittel die Energie $1/2 \cdot k \cdot T$. Allgemein gilt: Auf jede „Eigenschwingung“ welche ein schwingungsfähiges System besitzt, entfällt $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ thermische Energie.

Eigenschwingungen

Ein zweiatomiges Molekül hat nur eine Schwingungsmode: die Atome schwingen im Gegentakt. Es besitzt also zwei Freiheitsgrade (1 FG kinetische Enerie, 1 FG potentielle Energie).
Ein dreiatomiges gewinkeltes Molekül besitzt drei Moden, bei denen jeweils alle drei Atome mit der gleichen Frequenz schwingen. Insgesamt gibt es also sechs Freiheitsgrade (für jede Mode zwei).
Ein gestrecktes dreiatomiges Molekül besitzt vier Moden und damit acht Freiheitsgrade.

6.4.2 Innere Energie, Wärme und Wärmekapazität

Wir betrachten zunächst ein ideales einatomiges Gas. Die Energie des Gases liegt nur als kinetische Energie vor. Auf jeden der drei FG entfällt $1/2 \cdot k \cdot T$ (im Mittel).

Definition 6.13: Innere Energie

> *Die innere Energie U im Sinne der gesamten im Gas gespeicherten Energie eines Mols idealen Gases beträgt*

$$U = N_A \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Die innere Energie ist unabhängig vom Gasvolumen!
Um die Änderung der inneren Energie zu untersuchen, führen wir nun Energie zu - und zwar in Form von Wärme. Dabei sei dQ die zugeführte Wärmemenge.
Wir betrachten zwei Fälle:
1. Konstantes Volumen V:
Die innere Energie U soll um dU vergrößert werden. Wegen der Energieerhaltung muss zu diesem Zwecke eine gleich große Wärmemenge dQ zugeführt werden.

$$dW_{therm} = dQ = dU$$

Die innere Energie $U(T)$ liegt dann in Form von kinetischer Energie der Gasmoleküle vor.

$$U(T) = N_A \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Offenbar führt die zugeführte Wärmemenge dQ dazu, dass sich die Temperatur T auf $T + dT$ erhöht. Dabei wächst die innere Energie auf $U(T) + dU$.

$$U(T) + dU = \frac{3}{2} \cdot k \cdot N_A \cdot (T + dT)$$

Damit folgt:

$$dU = \frac{3}{2} \cdot N_A \cdot k \cdot dT$$

dU ist die Zunahme an innerer Energie, wenn T um dT zunimmt.
Offenbar ist die Wärmemenge $dQ = dU$ nötig, um die Temperatur um dT zu erhöhen. Sie beträgt für ein Mol:

$$dQ = N_A \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot dT$$

Definition 6.14: MOLARE WÄRMEKAPAZITÄT c_v

> *Der Zusammenhang zwischen dQ und dT wird für ein Mol Gas durch die molare Wärmekapazität c_v beschrieben.*

$$dQ = c_v \cdot dT$$

Wie groß ist im vorliegenden Fall (1 Mol ideales, einatomiges Gas) die Wärmekapazität bei konstant gehaltenem Volumen?

$$c_v = \frac{3}{2} \cdot k \cdot N_A = \frac{3}{2} \cdot R$$

Der berechnete Wert für c_v gilt nur für Teilchen ohne „innere“ FG.
Ein zweiatomiges Gas (O_2, H_2...) hat zusätzlich zu den drei FG der Translation zwei FG der Rotation und zwei der Schwingung.
Wenn wir T um dT erhöhen wollen, müssen wir auch die Energien, die im Mittel auf jeden der zusätzlichen Freiheitsgrad entfallen, nämlich jeweils $1/2 \cdot N_A \cdot k \cdot dT$ (pro FG und Mol) zuführen. Also gilt:
Die innere Energie U wächst bei Zunahme von T um dT um dU:

$$dU = \underbrace{\frac{3}{2} \cdot N_A \cdot k \cdot dT}_{\text{Translation}} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_A \cdot k \cdot dT}_{\text{2 FG der Rotation}} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_A \cdot k \cdot dT}_{\text{2 FG der Vibration}}$$

Die zuzuführende Wärmemenge dQ ($= dU$) beträgt:

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{7}{2} \cdot N_A \cdot k \cdot dT \\ c_v = \frac{dQ}{dT} &= \frac{7}{2} \cdot N_A \cdot k = \frac{7}{2} \cdot R \end{aligned}$$

Für ein dreiatomiges Gas gibt es drei Rotationsmöglichkeiten.

$$c_v = 4 \cdot R = \frac{8}{2} \cdot R$$

Vergleicht man theoretische und experimentell ermittelte c_v-Werte, so sind letztere meist niedriger. Der Grund dafür ist, dass bei vergleichsweise niedrigen Temperaturen die Schwingungen nicht angeregt werden. Die benötigte Energiemengen kommen im Gas offenbar nur sehr selten vor. Die Tatsache, dass zur Anregung einer Schwingung von mikroskopischen Systemen, hier Molekül, ein Mindestbetrag notwendig ist, ist klassisch nicht verständlich. Die Erklärung wird durch die Quantenmechanik geliefert.
Bei hinreichend großen Temperaturen ($\sim 3000\,\mathrm{K}$) erhält man tatsächlich den theoretischen c_v-Wert.
In der klassischen Physik kann die Amplitude eines Fadenpendels (oder allgm. jedes Oszillators) jeden beliebigen Wert annehmen. Daraus ergibt sich auch für die Gesamtenergie ein beliebiger Wert. In der Mikrophysik ist diese Aussage nicht mehr gültig. Die möglichen Energiewerte sind

$$W_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot h \cdot \nu_0$$

Dabei ist n eine natürliche Zahl, ν_0 die Grundfrequenz und h das Planck'sche Wirkungsquantum ($6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$). Um mindestens eine Energiestufe anzuregen (Übergang von v $= 0 \rightarrow 1$) muss

$$\Delta W = H \cdot \nu_0$$

aufgebracht werden.
Als Faustregel, ob eine beträchtliche Anzahl von Molekülen angeregt werden könne, wählen wir

$$k \cdot T_v > h \cdot \nu_0$$

Für T_v muss also gelten

$$T_v > \frac{h \cdot \nu_0}{k}$$

Experimentell ist für H_2 $\Delta W \simeq 0{,}3$ eV, also $\nu_0 \simeq 7{,}3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$. Damit ergibt sich für $T_v \simeq 3500\,\mathrm{K}$. Daher sind die Schwingungsfreiheitsgrade bei $300\,\mathrm{K}$ bei H_2 nicht angeregt.

Quanteneffekte treten grundstzlich auch bei der Rotation auf. Auch dort ist die Energie gequantelt. Infolge dessen ist bei hinreichend kleinen Temperaturen ($T_{rot} \sim 80\,\mathrm{K}$) auch die Rotation nicht mehr angeregt.

2. Konstanter Druck p

Eine Temperaturerhöhung um dT durch Zuführung von dQ führt nicht nur zur Erhöhung der inneren Energie, sondern auch zu einer Ausdehnung, wobei die Arbei dW gegen den Druck p verrichtet wird. Hier gilt der

1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$dQ = dU + dW \tag{6.6}$$

In Worten: Die zugeführte Wärmemenge (dQ) wird verwendet, um

1. die innere Energie (um dU) zu erhöhen; T steigt um dT
2. um das Gas Volumenarbeit (dW) verrichten zu lassen; dabei dehnt es sich aus

Auch hier gilt, dass $dQ \propto dT$ ist. Somit erhält man

$$dQ = c_p \cdot dT$$

c_p ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck. Offenbar muss $c_p > c_v$ sein, weil ein Teil der Wärme zum Verrichten von Arbeit benötigt wird.

c_v für Festkörper

Bei Festkörpern ist die Energie in den Vibrationen gespeichert. Jedes Atom kann in drei Raumrichtungen schwingen. Jede Schwingung hat zwei Freiheitsgrade. Im Mittel entfällt je $1/2 \cdot k \cdot T$ pro Molekül auf die kinetische und die potentielle Energie der Schwingung. Daher beträgt die gesamte innere Energie U für 1 Mol:

$$U = N_A \cdot (\underbrace{\frac{3}{2} \cdot k \cdot T}_{\text{kin.}} + \underbrace{\frac{3}{2} \cdot k \cdot T}_{\text{pot.}}) = 3 \cdot k \cdot N_A \cdot T$$

Die Änderung dU bei einer Änderung von T um dT lautet also

$$dU = 3 \cdot k \cdot N_A \cdot T$$

und somit gilt für die molare Wärmekapazität c_v bei Festkörpern

$$C_v = 3 \cdot k \cdot N_A = 3 \cdot R$$

Es ist anzumerken, dass die oben berechneten Werte für c_v bzw. c_p nur bei hinreichend hohen Temperaturen gelten, da bei tiefen Temperaturen die Energie nicht ausreicht, um die inneren Freiheitsgrade anzuregen. Diese sind dann „eingefroren“.

6.4.3 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung und Boltzmann-Faktor

Fizeau-Selektor

Wie kann man die Maxwell-Boltzmann'sche-Geschwindigkeitsverteilung messen? D.h.

$$\frac{dN}{dv} \cdot \frac{1}{N} \qquad \text{gegen} \qquad v$$

Wir lassen Atome/Moleküle aus einem Reservoir („Ofen"), der sich auf der Temperatur T_0 befindet, durch ein enges Loch ins „Vakuum" strömen. Der Druck p_0 im Ofen ist typischerweise 1 Pa. Wir erhalten einen Molekularstrahl, wobei die Richtungsverteilung gegen die Strahlachse einem Cosinusgesetz folgt

$$\frac{dN(\vartheta)}{dv} \propto \cos\vartheta$$

Die Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$f(v) = \frac{dN}{dv} \cdot \frac{1}{N}$$

(Genauer ist der Teilchenstrom durch $j(v) = f(v) \cdot v$ gegeben. Siehe Kapitel 7)
Die Apparatur muss soweit evakuiert werden, dass die freie Weglänge (zwischen zwei Stößen) groß gegen die Gefäßdimension ist. Dies kann durch geeignete Vakuumpumpen erreicht werden.
Der Geschwindigkeitsselektor besteht aus zwei geschlitzten Scheiben auf einer Achse, Abstand l, die sich mit ω dreht. φ gibt den Verdrillungswinkel der Scheiben an.
Es gelangen nur jene Teilchen hindurch, welche die Strecke l so zurücklegen, dass jeweils ein Schlitz bei jeder der Scheiben vorgefunden wird. Durch Änderung von ω werden Teilchen mit einer anderen Geschwindigkeit durchgelassen.
Die Flugzeit zwischen den Scheiben beträgt

$$\Delta t = \frac{l}{v}$$

Der Winkel, der in Δt überstrichen wird, muss φ sein, damit auch bei der 2. Scheibe der Schlitz oben ist.

$$\omega \cdot \Delta t = \varphi$$

Durch Elimination von Δt ergibt sich für die Durchlassgeschwindigkeit

$$v = \frac{l \cdot \omega}{\varphi}$$

Das durchgelassene Geschwindigkitsintervall dv hängt von der Schlitzbreite s ab ($s = R \cdot d\varphi$) und ergibt sich zu

$$dv = \frac{v}{\varphi} \cdot \frac{s}{R}$$

Generell wird die M.-B.-Verteilung aus

$$f(v) \cdot v = N(v) \propto v^3 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

durch schrittweises Ändern von ω erhalten.

Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung

Wir schreiben die barometrische Höhenformel um

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

indem wir den Exponenten mit V_0 erweitern

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot V_0}{p_0 \cdot V_0} \cdot g \cdot h}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_0 \cdot V_0 &= M \\ p_0 \cdot V_0 &= \nu \cdot R \cdot T \end{aligned}$$

ergibt sich

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{\nu \cdot k \cdot T}}$$

und für die Dichte

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{\nu \cdot k \cdot T}}$$

Für die Teilchenzahl n wird wegen $\frac{M}{\nu} = m$

$$\begin{aligned} n(h) &= n_0 \cdot e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} \\ &= n_0 \cdot e^{-\frac{W_{pot}}{k \cdot T}} \end{aligned}$$

Im Exponenten steht das Verhältnis der potentiellen Energie in der Höhe h zur doppelten mittleren kinetischen Energie aufgrund der thermischen Bewegung bei T.
Es folgt nun der Übergang zur M.-B.-Geschwindigkeitsverteilung. Die Teilchenzahldichte $n(h)$ muss auch die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten $f(v_z)$ wiederspiegeln. Wir stellen uns die Entstehung der Atmosphäre so vor, dass die Atome von der Oberfläche aus gestartet sind und - je nach Anfangsgeschwindigkeit in z-Richtung - nur eine bestimmte maximale Höhe erreichen konnten. In

der Tat hat sich die Uratmosphäre durch Ausgasen der Erdoberfläche (Vulkane etc.) gebildet. Wir schließen daraus, dass wegen

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_z(h)^2$$

die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten auch als

$$f(v_z) = C \cdot e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}$$

geschrieben werden kann.
Normierung auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_z) dv_z \stackrel{!}{=} 1$$

liefert

$$C = \sqrt{\frac{m}{2\pi \cdot k \cdot T}}$$

Keine Richtung ist ausgezeichnet, also ist die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül mit $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ zu finden, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten $f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z) \equiv f(v_x, v_y, v_z)$.

$$f(v_x, v_y, v_z) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi \cdot k \cdot T}\right)^3} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Häufig ist nur der Betrag von $\vec{v}$ von Interesse. Dann müssen wir alle Beiträge von $\vec{v}$-Vektoren, die in das Intervall zwischen v und $v+dv$ entfallen zusammenfassen. Je größer v, desto mehr Möglichkeiten für $\vec{v}$-Vektoren gleicher Länge gibt es. Ihre Zahl ist proportional zum Volumen der Kugelschale $4\pi \cdot v^2 \cdot dv$.

Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$f(v)dv = \frac{N(v)}{N} = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} \cdot 4\pi \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv \qquad (6.7)$$

Wir haben berechnet

$$\frac{dN}{dv} \cdot \frac{1}{N} = f(v)$$

$\frac{dN(v)}{N}$ ist die Zahl der Moleküle mit $|\vec{v}|$ im Intervall dv um $|\vec{v}|$.
Wir können auch fragen, wieviele Moleküle eine kinetische Energie W im Intervall dW um W haben.

$$\frac{dN(W)}{N} = f(W) \cdot dW \propto \sqrt{W} \cdot e^{-\frac{W}{kT}}$$

Umschreibung auf $W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ liefert für $f(v) \cdot dv$

$$f(W) \cdot dW = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(kT)^3}} \cdot \sqrt{W} \cdot e^{-\frac{W}{kT}} \cdot dW$$

Diese Verteilung beantwortet unter anderem folgende Fragestellungen:

- Wieviele Moleküle haben ausreichend kinetische Energie um eine chemische Reaktion mit Schwellenenergie W_S auszulösen?
- Wieviele Moleküle tragen zur Stoßionisation eines Teilchens bei? (oder zu seiner elektronischen Anregung)
- Wieviele Moleküle der Atmosphäre können das Schwerefeld der Erde verlassen?
- Wieviele Atome eines Plasmas können die Coulomb-Abstoßung zwischen den positiven Atomkernen überwinden um eine Kernfusion auszulösen?

In der Praxis sind die erforderlichen Schwellenenergien immer $\gg kT$. Die Bedingung wird nur für relativ wenige Teilchen im „Maxwell-Schwanz" erfüllt. Die Zahl der Teilchen, die eine gegebene Schwellenenergie W_S aufbringen können ist (in guter Näherung)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{W_S}{kT}} \cdot e^{-\frac{W_S}{kT}}$$

(Fläche des Maxwell-Schwanzes) wobei W_S die Mindestenergie ist, die aufgebracht werden muss, damit der Prozess abläuft.
Die M.-B.-Geschwindigkeitsverteilung und die barometrische Höhenformel sind Spezialfälle des folgenden, allgemeineren Sachverhaltes:
Wenn ein System von Teilchen eine Reihe von Energiezuständen $W_1, W_2, \ldots, W_n$ annehmen kann (W_i = Summe aus kinetischer und potentieller Energie), dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen des Systems in Zuständen im Intervall $dxdydz$ und $dp_x dp_y dp_z$ um W_i herum befindet

$$dW = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \cdot f(p_x) \cdot f(p_y) \cdot f(p_z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Offenbar ist

$$dW = g_i \cdot e^{-\frac{W_i}{kT}} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Wobei g_i das statistische Gewicht des Zustandes i ist. g_i drückt aus, welche unterschiedlichen Möglichkeiten der Darstellung des Zustandes der Energie W_i bestehen.

Definition 6.15: Boltzmann-Faktor

Der Faktor

$$e^{-\frac{W_i}{kT}}$$

heißt Boltzmann-Faktor des Moleküls bei der Energie W_i *an gegebenem Ort und bei gegebenem Impuls.*

6.4.4 Reale Gase

Die Zustandsgleichung für das ideale Gas lautete

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$$

Es ist offenbar keine Verflüssigung eines idealen Gases möglich, da bei Flüssigkeiten Wechselwirkungen eine wichtige Rolle spielen. Bisher wurden folgende Vereinfachungen gemacht:

- Vernachlässigung des Eigenvolumens der Moleküle, d.h. das Molekül wurde als Massenpunkt betrachtet
- Keine Wechselwirkungen zwischen den Molekülen. Dadurch ist keine Arbeit notwendig, um das Volumen zu verändern.

Definition 6.16: Reales Gas

> *Ein Gas, das nicht durch die Zustandsgleichung beschreiben werden kann, heißt reales Gas.*

Solche Abweichungen sind besonders groß unter Bedingungen, bei denen das Gas in eine Flüssigkeit übergeht.

Definition 6.17: Dampf

> *Dämpfe sind Gase, die unter Normalbedingungen flüssig (fest) sind.*

Modell des realen Gases

Wir gehen vom idealen Gas aus und berücksichtigen die bisherigen Idealisierungen. Wir betrachten ein Mol eines Gases.

- Der Raum, der für die Molekülbewegung zur Verfügung steht, ist wegen des Eigenvolumens der Moleküle kleiner als V. Daher setzt man

  $$V \rightarrow (V - b)$$

  Dabei ist b ungefähr das Vierfache des Eigenvolumens aller Moleküle (Kovolumen).

- Die Kräfte zwischen den Molekülen liefern eine Anziehung.

  Definition 6.18: Van-der-Waals-Kräfte

  > *Die Wechselwirkungskräfte zwischen Atomen/Molekülen heißen Van-der-Waals-Kräfte.*

  Sie haben dieselbe Wirkung wie ein erhöhter Außendruck, da die thermische Bewegung behindert wird. Es muss zusätzliche Arbeit gegen die zwischenmolekularen Kräfte verrichtet werden, um das Volumen zu vergrößern. Im Inneren heben sich die Kräfte der umgebenden Moleküle auf das betrachtete Teilchen auf, aber an der Wand (Grenzfläche) bleibt eine resultierende Kraft übrig, die die Moleküle nach innen zieht. Sie ist proportional zur Teilchendichte n der anziehenden Moleküle. n ist umso größer, je kleiner das Volumen V, in dem sie sich befinden, ist:

$$n \propto \frac{1}{V}$$

Die Kraft ist ebenfalls proportional zur Zahl der auf die Wand stoßenden Teilchen selbst. D.h. nochmal zur Teilchendichte. Die Korrektur am Druck p (der „Binnendruck") ist also insgesamt a/V^2 mit a einer Proportionalitätskonstanten. Also setzt man

$$p \to (p + \frac{a}{V^2})$$

Aus beiden Korrekturen ergibt sich dann für 1 Mol die

Van-der-Waals-Gleichung

$$(p + \frac{a}{V^2}) \cdot (V - b) = RT \tag{6.8}$$

Die Konstanten a und b haben für jedes Gas typische Werte. Für beliebige Stoffmengen gilt

$$(p + \frac{a\nu^2}{V^2}) \cdot (V - \nu b) = \nu RT \tag{6.9}$$

Wir wollen nun die Van-der-Waals-Gleichung für CO_2 diskutieren. Bei hohen Temperaturen und großen Volumina, also kleinen Dichten, ist das Verhalten ähnlich dem idealer Gase.

Definition 6.19: Isotherme

Eine Kurve p(V) bei konstanter Temperatur heißt Isotherme.

Definition 6.20: Kritische Temperatur

Man nennt die Temperatur jener Isotherme, die eine waagrechte Tangente bei einem bestimmten Wertepaar (p_k, V_k) hat, die kritische Temperatur T_k.

Offenbar kann ein Gas nur für $T < T_k$ verflüssigt werden. Für $T > T_k$ sieht das p-V-Diagramm praktisch wie jenes für ideale Gase aus.
Aus einem V-T-Diagramm lässt sich analog der kritische Druck p_k ermitteln.

	T_k[K]	p_k[10^6 Pa]
CO_2	304,2	7,16
H_2O	647,2	21,35
Ar	151	4,7
He	5,3	0,22
H_2	33,3	1,25

Aus der Zustandsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{27} \cdot \frac{a}{b^2} \\ T_k &= \frac{8}{27} \cdot \frac{a}{b \cdot R} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das p-V-Diagramm in Abbildung 6.1.

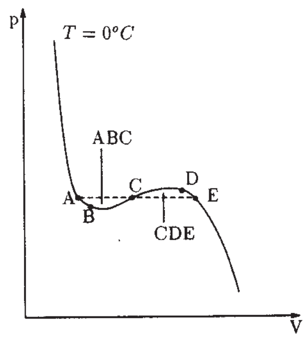

Abbildung 6.1: p-V-Diagramm für CO_2

Läuft man auf der Isotherme zu $T = 0$ °C entlang, so ergibt sich:

- Wenn Kondensationskeime vorliegen, beginnt die Flüssigkeit bei E sich abzuscheiden.
- Bis A steigt p nicht mehr an, d.h. Volumenverkleinerung führt zu weiterer Verflüssigung. Der strichlierte Bereich (ACE) zeigt den Koexistenzbereich von Gas und Flüssigkeit.

Es stellt sich die Frage, wie man den Sättigungsdruck (gestrichelte Kurve ACE), bei dem sich das Gas verflüssigt, erhält. Die Gerade ACE ist so zu legen, dass die Fläche (ABC) und (CDE) gleich sind. Bei A ist das gesamte Gas verflüssigt. Zu weiterer Volumenverkleinerung muss ein sehr großer Druck aufgewendet werden. Kurze Stücke der Kurve (ED) und (AB) können durchlaufen werden, wenn Kondensationskeime fehlen bzw. Siedeverzüge auftreten. Die Verflüssigung von Gasen allein durch Kompression ist dann möglich, wenn die Isotherme mindestens eine waagrechte Tangente hat.

6.4.5 Joule-Thomson-Effekt

Verflüssigung von Gasen allein durch Kompression ist nicht möglich, wenn T_k kleiner als Raumtemperatur ist. Das Gas muss in diesen Fällen auf $T < T_k$ abgekühlt werden. Dazu verwendet man den Joule-Thomson-Effekt, der bei realen Gasen auftritt.
Ein Gasvolumen stehe unter dem Druck p_1. Es werde durch ein Drosselventil in den Raum V_2 unter dem Druck p_2 entspannt. Wenn ein ideales Gas vorliegen würde, so müsste keine Arbeit gegen Kohäsionskräfte verrichtet werden. Die innere Energie eines idealen Gases

$$U = N_A \cdot f \cdot \frac{k \cdot T}{2}$$

ist unabhängig vom Volumen. Bei der Entspannung findet keine Änderung von U und damit auch keine Änderung von T statt. Betrachtet man nun ein reales Gas, so findet dort i. a. eine Temperaturabnahme statt. (CO_2: $\Delta T \sim 0{,}75\,\mathrm{K/bar}$; Luft: $\Delta T \sim 0{,}25\,\mathrm{K/bar}$; H_2 bei $T > T_i$ =-80°C Erwärmung!)
Schwere Moleküle bewegen sich vergleichsweise langsam. Für die Wechselwirkung/Stöße der Moleküle ist vorwiegend der anziehende Teil des Lenard-Jones-WW-Potentials wichtig. Bei den Stößen findet ein Impulsübertrag in Richtung des Stoßpartners statt. Gegen diese Kohäsionskräfte muss Arbeit verrichtet werden, soll der mittlere Abstand der Moleküle bei der Entspannung vergrößert werden. Diese Arbeit muss durch eine Abnahme von $U = N_A \cdot f \cdot \frac{kT}{2}$ aufgebracht werden:

- U nimmt ab
- T nimmt ab

Leichte Moleküle bewegen sich schnell. Es ist vorwiegend der abstoßende Teil des Potentials von Bedeutung. Die Impulsübertragung findet vom Stoßpartner weg statt. Bei der Vergrößerung des mittleren Abstandes wird Energie gewonnen

- U steigt an
- T steigt an

Daraus folgt:

Joule-Thomson-Effekt

Bei Expansion

- *kühlen schwere Gase ab*
- *erwärmen sich leichte Gase*

Unterhalb der Inversionstemperatur T_i sind die Moleküle aber so langsam, dass auch bei leichten Molekülen die anziehenden Kräfte überwiegen: Für $T < T_i$ findet, auch bei H_2, eine Abkühlung statt.
Es gilt:

$$T_i \simeq \frac{2a}{Rb}$$

Für CO_2 ist $T_i \gg$ als Raumtemperatur.

Verflüssigung von Sauerstoff

Komprimierter Sauerstoff (200 bar) wird über eine Drossel auf 20 bar entspannt. Der Joule-Tomson-Effekt liefert eine Abkühlung von 0,25 K/bar, d.h. insgesamt um $\Delta T \equiv 45\,\mathrm{K}$. Das abgekühlte Sauerstoffgas wird nun im Gegenstromverfahren am komprimierten Gas, das sich noch vor der Drossel befindet, vorbeigeführt, um dieses bereits vorzukühlen. Dadurch wird nach einiger Zeit eine Verflüssigung erreicht (Linde-Verfahren).

6.5 Wärmekraftmaschinen

6.5.1 Einführung

Wir fragen uns nun, inwieweit man Wärme Q, also thermische Energie, dazu verwenden kann, mechanische Arbeit zu verrichten. In einer derartigen Maschine wird das Arbeitsgas einer sich ständig wiederholenden Abfolge von Zustandsänderungen $(p_i; V_i; T_i \rightarrow p_f; V_f; T_f)$ unterworfen. Man spricht von einem Kreisprozess. Wir untersuchen/berechnen die mechanische Arbeit, die das Arbeitsgas beim Durchlaufen des Kreisprozesses verrichten kann (z.B. Bewegung eines Kolbens). Diese Arbeit muss aus der inneren Energie des Arbeitsgases stammen.

6.5.2 Volumenarbeit

Einem Gas kann Energie zugeführt werden, indem man es erwärmt (dQ). Außerdem ist Energiezufuhr auch durch mechanische Arbeit möglich, z.B. durch Kompression des Volumens mit einem Stempel auf den eine äußere Kraft wirkt. Wir berechnen die bei der Kompression am Gas verrichtete Arbeit bzw. die zu seiner Expansion benötigte Wärmemenge.
Erwärmt man das Gas bei konstantem Druck p, so dehnt es sich aus. Die dafür zugeführte Wärme muss, neben der Erhöhung der inneren Energie um dU, auch noch die Arbeit zur Expansion des Gases um dV verrichten:

$$dQ = dU + dW$$

Herrscht der Druck p (innen und außen, damit keine Kraft nötig ist, um den Stempel zu bewegen), dann ist

$$dW = F_n \cdot dx$$

wobei F_N die Normalkraft ist, die durch den Impulsübertrag der Moleküle herrührt. $F_n = p \cdot A$, wobei A die Stempelfläche ist.

$$dW = -p \cdot A \cdot dx = -p \cdot dV$$

Eine nach außen abgegebene Arbeit wird negativ gerechnet, da die Energie des Systems dabei abnimmt.
Für die Bewegung des Kolbens um einen endlichen Weg, bei dem sich $V_1 \rightarrow V_2$ ändert, gilt:

$$W(1 \rightarrow 2) = -\int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV$$

Der Zusammenhang zwischen p, V und T wird über die Zustandsgleichung reguliert.

Definition 6.21: VOLUMENARBEIT

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV \tag{6.10}$$

heißt Volumenarbeit.

Die verrichtete Volumenarbeit entspricht der Fläche unter der $p(V)$-Kurve im Arbeitsdiagramm.
Damit wird der 1. Hauptsatz zu

$$dU = dQ - p \cdot dV$$

6.5.3 Zustandsänderungen idealer Gase

Wir betrachten jetzt spezielle Prozesse als Anwendungen des 1. Hauptsatzes.

1. **Isochore Zustandsänderung**

   Es wird bei konstantem Volumen ($\Delta V = 0$) keine mechanische Arbeit verrichtet. Jede Zufuhr/Abfuhr von Energie (in Form von Wärme dQ) führt zu einer entsprechenden Änderung der inneren Energie ΔU.

   $$dQ = dU = c_v(T_2 - T_1) = c_v dT$$

   Der Prozess kann dazu dienen, die Verknüpfung zweier weiterer Zustandsänderungen vorzunehmen (die mit Umsetzung mechanischer Arbeit verknüpft sind). Dadurch kann ein Kreisprozess geschlossen werden.

2. **Isobare Zustandsänderung**

   Wegen $p =$ konstant, während V_1 in V_2 übergeht, wird

   $$-W(1 \to 2) = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V$$

3. **Isotherme Zustandsänderung**

   Das Gas wird im Kontakt mit einem Wärmebad gebracht, um T konstant zu halten. Wir berechnen die bei der isothermen Expansion vom Gas verrichtete Arbeit. Das Volumen vergrößert sich von $V_1 \to V_2$

   $$W(1 \to 2) = -\int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV$$

   Der Zusammenhang $p(V)$ ist durch die Zustandsgleichung für das ideale Gas gegeben.

$$
\begin{aligned}
W(1 \to 2) &= -R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\
W(1 \to 2) &= -R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}
\end{aligned}
$$

Wegen $T =$ konstant ändert sich die innere Energie U nicht. Die gesamte dem Wärmebad entnommene Wärme wird in mechanische Arbeit umgesetzt.

4. **Adiabatische Zustandsänderung**

Definition 6.22: Adiabatische Prozesse

Adiabatische Prozesse sind solche, bei denen keine Energie, also auch keine Wärme, mit der Umgebung ausgetauscht wird ($\Delta U = 0$).

Aus dem 1. Hauptsatz (mit $dQ = 0$)

$$dU = dQ - p \cdot dV = -p \cdot dV$$

und der inneren Energie

$$U = \frac{f}{2} \cdot R \cdot T$$

folgt folgender Zusammenhang

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{konstant}$$

mit $\kappa = c_p/c_v = (f{+}2)/f$. f ist die Zahl der Freiheitsgrade. Die verrichtete Arbeit bei der Expansion muss ganz aus der innere Energie U stammen

$$-W(1 \to 2) = \frac{f}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

Das Gas muss sich also abkühlen, wenn es mechanische Arbeit verrichtet.

6.5.4 Kreisprozesse

Es geht nun um die Umwandlung thermischer Energie in mechanische Energie. Wir wissen, dass jede Energieform in jede andere umgewandelt werden kann. Beispielsweise kann chemische Energie sowohl in mechanische als auch elektrische Energie oder Licht überführt werden. Mechanische Energie kann (vollständig) in Wärme umgewandelt werden. Wärme kann ebenso in mechanische Energie umgeformt werden. Wir lernen in diesem Abschnitt folgende Tatsache: Wärme kann nicht vollständig in mechanische Energie umgewandelt werden, so dass periodisch Wärme aus einem Temperaturbad entnommen und anschließend nur in mechanische Energie umgesetzt wird (2. Hauptsatz der Wärmelehre).

Heißluftmotor

Das Arbeitsgas wird periodisch zwischen zwei Bereichen unterschiedlicher Temperatur hin- und hergeschoben. Dabei wird offenbar Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt. Folglich lässt sich „im Prinzip" periodisch Wärme in mechanische Arbeit umwandeln. Es stellt sich bloß die Frage, wieviel Wärme muss aufgewandt/eingesetzt werden, um die mechanische Arbeit zu erzielen.

Diskussion des p-V-Diagramms unserer Wärmekraftmaschine

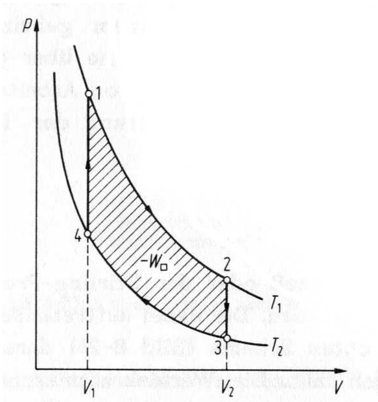

Abbildung 6.2: pV- Diagramm

In diesem Diagramm entspricht der periodisch arbeitenden Maschine offenbar ein Kreisprozess. Die von der geschlossenen Kurve eingeschlossene Fläche ist die nach außen abgegebene Volumenarbeit, die während des Kreisprozesses auftritt. Auf dem „Hinweg" $(1 \to 2)$ wird zwar vom Gas eine größere Arbeit verrichtet (Fläche zwischen $(1 \to 2)$ und der V-Achse), aber auf dem „Rückweg" $(3 \to 4)$ muss am Gas Arbeit verrichtet werden, um das Gas zu komprimieren. Die Netto-Arbeit ist die schraffierte Fläche ΔW. Im gezeigten Fall verläuft der Prozess zwischen den beiden Temperaturen T_1 (hoch) und T_2 (tief). Die Fläche unter $(3 \to 4)$ würde nur dann verschwinden, wenn die Rückführung zum Anfang bei $p = 0$ (d.h. bei absolutem Temperatur-Nullpunkt $T = 0\,\mathrm{K}$) erfolgen würde. Dies ist aber nicht möglich. Wir stellen uns nun die Frage, wie groß der Wirkungsgrad η einer thermischen Maschine maximal werden kann.

Definition 6.23: WIRKUNGSGRAD

Der Wirkungsgrad η ist definiert als

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q_1}$$

Dabei ist Q_1 die auf dem Hinweg $(1 \rightarrow 2)$ umgesetzte Wärmemenge (Fläche zwischen $(1 \rightarrow 2)$ und V-Achse) und ΔW die Nettoarbeit (schraffiert). Wir stellen fest, dass gilt:

$$\eta < 1$$

Wir gehen jetzt wie folgt vor: Wir berechnen η für einen speziellen Kreisprozess, bei dem Zustandsänderungen eines idealen Gases zugrundegelegt werden. Dann ist das tatsächliche η jedenfalls kleiner als das berechnete. Wärmeverluste werden ebenfalls vernachlässigt.

6.5.5 Sterling-Kreisprozess

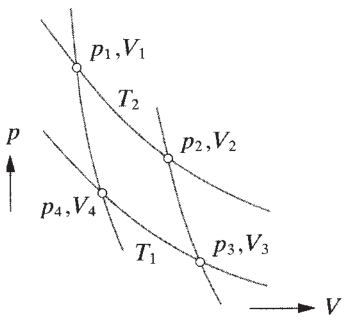

Abbildung 6.3: Arbeitsdiagramm des Sterling-Prozesses

- (1→2): Isotherme Expansion bei Temperatur T_1

  Eine bestimmte, gleichbleibende Gasmenge wird zwischen einem kalten und einem heißen Bereich hin- und hergeschoben. Im heißen Bereich dehnt sich das Gas aus und drückt den Arbeitskolben nach außen. Das Gas verrichtet mechanische Arbeit.

  Die aufgenommen Wärmemenge $Q(1 \rightarrow 2)$ (gleich der nach außen abgegebenen Volumenarbeit!) beträgt für 1 Mol ideales Gas

$$Q(1 \rightarrow 2) = R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- (2→3): Isochore Abkühlung

  Anschließend wird das Gas in den kalten Bereich bewegt. Die freiwerdende Wärme wird (zumindest teilweise) gespeichert.

  Die abgegebene Wärmemenge stammt aus der inneren Energie, da für V = konstant keine Volumenarbeit verrichtet wird. Wieder für 1 Mol gilt:

$$Q(2 \to 3) = -c_v(T_1 - T_2)$$

Wir stellen uns vor, dass wir $Q(2 \to 3)$ vollständig zwischenspeichern könnten, um sie später wieder zu verwenden.

- (3→4): Isotherme Kompression

  Im kalten Bereich wird das Gas wieder auf das ursprüngliche Volumen komprimiert. Es wird Arbeit am Gas verrichtet.

  Hier wird jene Wärmemenge $Q(2 \to 3)$, die bei der Kompression entsteht, wieder aufgenommen:

$$Q(3 \to 4) = T \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_1}{V_2} = -T \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- (4 →1): Isochore Erwärmung

  Letztendlich wird das Gas wieder in den heißen Bereich transportiert.

  Um diese Wärmemenge zuzuführen, können wir die zwischengespeicherte Wärmemenge $Q(\to 3)$ verwenden, denn es ist $Q(4 \to 1) = Q(2 \to 3)$.

Es war

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q(1 \to 2)}$$

Also wird mit

$$\begin{aligned} \Delta W &= R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \\ Q(1 \to 2) &= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

der Wirkungsgrad η gleich

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

und somit

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{6.11}$$

Der Wirkungsgrad aus Gleichung (6.11) ist der Wirkungsgrad eines idealen Sterling-Prozesses ohne Wärmeverlust und mit idealer Zwischenspeicherung.

Moderne Kraftwerke arbeiten zwischen den Temperaturen $\vartheta_1 = 550$°C $(= 823\,\mathrm{K})$ und $\vartheta_2 = 37$°C $(=310\,\mathrm{K})$. Der Wirkungsgrad für den Idealfall ergibt sich damit zu

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 62\%$$

Tatsächlich erreichbar sind aber nur etwa $\eta_{eff} \approx 45\%$.
Achtung! η immer mit Temperaturen in Kelvin berechnen!!

6.5.6 Thermische Maschinen

Es stellt sich die Frage, was passiert, wenn man den Kreisprozess rückwärts ablaufen lässt. Bei der niedrigen Temperatur T_2 wird eine bestimmte Wärmemenge $Q(4 \to 3)$ aufgenommen. Durch Aufwand von W wird die Wärmemenge auf die höhere Temperatur T_1 gebracht (Übergang 3→2). Auf T_1 wird bei der isothermen Zustandsänderung (2→1) die Wärmemenge $Q(2 \to 1)$ an die Umgebung abgegeben. Für diesen „umgekehrten" Kreisprozess gibt es zwei technische Anwendungen.

1. Wärmepumpe:

   Bei dieser Maschine besteht der Nutzen in der Abgabe von $Q(2 \to 1)$ auf dem Temperaturniveau T_1. Dazu ist der Aufwand W an mechanischer Arbeit zu verrichten:

   $$W = Q(2 \to 1) - Q(3 \to 4)$$

   Uns interessiert die Leistungszahl ε:

   $$\varepsilon = \frac{\text{Nutzen}\, Q(2 \to 1)}{\text{Aufwand W}} = \frac{Q(2 \to 1)}{Q(2 \to 1) - Q(3 \to 4)} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta}$$

   ε ist der Kehrwert des Wirkungsgrades für den Kreisprozess in der ursprünglichen Richtung. Der Aufwand W ist also um den Faktor η kleiner als wenn $Q(2 \to 1)$ direkt auf dem Temperaturniveau T_1 erzeugt werden muss. ε hat typischerweise den Wert 2,5.

2. Kältemaschine:

   Bei dieser Maschine besteht der Nutzen darin, dass einem Wärmebad der niedrigen Temperatur T_2 eine bestimmte Wärmemenge $Q(4 \to 3)$ (isotherm) entzogen wird. Folglich kühlt es sich ab. Der Aufwand besteht darin, dass $Q(4 \to 3)$ an die Umgebung, die sich dabei auf der höheren Temperatur T_1 befindet, abgegeben werden muss und zwar als Wärmemenge $Q(2 \to 1)$. Der Aufwand ist also (Energiesatz)

   $$W = Q(2 \to 1) - Q(4 \to 3)$$

   Uns interessiert wieder die Leistungszahl

   $$\varepsilon = \frac{\text{Nutzen}\, Q(4 \to 3)}{\text{Aufwand W}} = \frac{Q(4 \to 3)}{Q(2 \to 1) - Q(4 \to 3)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

   Beim Kühlschrank ist zum Beispiel $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ und $T_2 = 263\,\mathrm{K}$. Als Leistungszahl ergibt sich dann ein Wert von etwa 7. Der Nutzen ist optimal, wenn der Temperaturunterschied so klein wie möglich ist.

Ebenso lässt sich die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes folgern, d.h. die Tatsache, dass T_2 nicht erreichbar ist. Es ist

$$\frac{\text{Aufwand W}}{\text{entzogene Wärmemenge}\,\Delta Q} \geq \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

Bei der Annäherung an $T_2 = 0$ rückt die für den Entzug von $Q(4 \rightarrow 3)$ erforderlich Arbeit W ins Unendliche. Anschaulich bedeutet dies, dass man keinen Kreisprozess mehr aufbauen kann, denn bei $T \rightarrow 0$ fallen Isothermen und Adiabaten praktisch zusammen. Bei $T = 0$ laufen sie parallel.

Sterling-Prozess als Wärmepumpe

Der Übergang $(3 \rightarrow 2)$ muss durch die Zufuhr von elektrischer (mechanischer) Energie erreicht werden. Dann wird bei der Kompression $(2 \rightarrow 1)$ die Wärmemenge ΔQ_1 an das obere Wärmebad (T_1) abgegeben. Die obere Hälfte des Motors erwärmt sich. Kommt das Gas in Kontakt mit dem kälteren Wärmebad (T_2), so geschieht der Übergang $(1 \rightarrow 4)$. Bei der Expansion $(4 \rightarrow 3)$ wird ΔQ_2 aus diesem Wärmebad (T_2) entnommen.

Sterling-Prozess als Kältemaschine

Nur eine andere Sprechweise: Aus dem Bad (T_2) wird ΔQ_2 entnommen. W wird an elektrischer Energie hineingesteckt, um ΔQ_1 an das Bad T_1 abgeben zu können.

Maximaler Wirkungsgrad einer beliebigen Wärmekraftmaschine

Wir schalten eine „Wundermaschine“ $(\eta > \eta_{Sterling})$ und eine Sterling-Maschine zusammen, wobei die Sterling-Maschine als Wärmepumpe arbeitet und beide Maschinen zwischen denselben Reservoirs (mit T_1 und T_2) arbeiten. Die Wundermaschine soll gerade die mechanische Arbeit ΔW liefern, welche die Sterling für ihren Betrieb benötigt. Das kombinierte System würde aber Wärme aus dem Reservoir mit der höheren Temperatur T_1 entnehmen und ins kältere Reservoir T_2 pumpen, ohne dass eine äußere Energiezufuhr stattfinden würde. Dies widerspricht dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre. Daraus folgt:
Es gibt keine Wärmemaschine mit einem Wirkungsgrad $\eta > \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

6.5.7 Reversible und irreversible Prozesse

Bei der Behandlung des Sterling-Kreisprozesses wurden alle Zustandsänderungen so geführt, dass sie umkehrbar waren. Z.B. die isotherme Volumenänderung läuft in beide Richtungen ab, wenn nur ein infinitesimaler Druckunterschied zwischen p_a und p_i besteht. Allgemein gilt, dass jeder mechanische Bewegungsablauf reversibel ist.

Definition 6.24: Reversibel/irreversibel

> *Jeder Vorgang der in beide Richtungen erfolgen kann heißt reversibel.*
> *Prozesse die nur in eine Richtung verlaufen, heißen irreversibel.*

Beispiele für irreversible Prozesse:

- Hahn zwischen einem gasgefüllten und einem evakuierten Gefäß wird geöffnet
- Zwei verschiedene Gase vermischen sich durch Diffusion
- Ein Topf auf einer heißen Herdplatte erwärmt sich

Zur Veranschaulichung führen wir die isotherme Volumenänderung einmal als reversible und dann als irreversible Zustandsänderung durch.

1. Volumenverdopplung durch Herausziehen eines Schiebers:

   Der Prozess läuft von alleine ab. Arbeit muss nicht verrichtet werden. Der Prozess kann ohne zusätzlichen Maßnahmen (Arbeitsaufwand) nicht umgekehrt werden. Es handelt sich also um eine irreversible Prozessführung.

2. Volumenverdopplung durch Herausziehen eines Kolbens:

   Der Prozess läuft ab, sobald auch nur ein infinitesimal kleiner Druckunterschied zwischen p_i und p_a besteht, wenn also

   $$p_a < p_i$$

   Arbeit muss dazu praktisch nicht verrichtet werden, da immer $p_a \approx p_i$ gehalten werden kann. Diese Prozessführung ist reversibel. Dazu muss nur $p_a > p_i$ gemacht werden. Dazu reicht ein infinitesimaler Druckunterschied aus. Arbeit muss zur Prozessumkehrung praktisch nicht verrichtet werden.

Bei der ersten Prozessführung müsste z.B. eine Turbine eingebaut werden, die - unter Verrichtung von Arbeit - die Moleküle wieder zurückbefördert.
Alle unsere Betrachtungen zum Wirkungsgrad η wurden für reversible Kreisprozesse gemacht, d.h. alle Zustandsänderungen wurden reversibel geführt. Bei makroskopisch abgeschlossenen Systemen kommen praktisch keine reversiblen Zustandsänderungen vor, da z.B. durch Reibung/Luftwiderstand immer Wärme freigesetzt wird. Das bedeutet auch

$$\eta_{eff} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

6.5.8 Entropie

Definition 6.25: REDUZIERTE WÄRMEMENGE

> *Die bei der i-ten Zustandsänderung aufgenommene Wärmemenge ΔQ_i bezogen auf die dabei herrschende Temperatur T_i, also $\frac{\Delta Q_i}{T_i}$ heißt reduzierte Wärmemenge.*

Umgesetzte Wärmemenge beim Sterling-Prozess

Wir können das System auf zwei verschiedenen Wegen in den Zustand 3 bringen:

- von $1 \to 2 \to 3$
- von $1 \to 4 \to 3$

Die längs der beiden Isothermen von $1 \to 2$ und von $4 \to 3$ aufgenommenen reduzierten Wärmemengen sind

$$\begin{aligned} \frac{Q(1 \to 2)}{T_1} &= R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \\ \frac{Q(4 \to 3)}{T_2} &= R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

also gleich groß. Beim Sterlingprozess müssen nur die längs der Isothermen umgesetzten Wärmemengen berücksichtigt werden, denn die bei den beiden isochoren Zustandsänderungen $1 \to 4$ und $2 \to 3$ anfallenden Wärmemengen sind gleich groß und werden zwischengespeichert und wieder verwendet.
⇒ Die Summe der reduzierten Wärmemengen beim Sterling-Kreisprozess

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

Wir schließen daraus auch noch, dass die Änderung der reduzierten Wärmemenge unabhängig vom Weg ist, auf dem man vom Anfangs- zum Endzustand gelangt.

Definition 6.26: ENTROPIE

> *Wir definieren die auf einem Teilstück eines beliebigen Kreisprozesses umgesetzte reduzierte Wärmemenge als Änderung dS einer Größe S, die wir als Entropie der Systems bezeichnen:*

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$

Wir gehen von einem Referenzzustand 0 aus und berechnen die Größe $S(0 \to 1)$ für eine reversible Zustandsänderung.

$$S(0 \to 1) = \int_0^1 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

d.h. die reduzierte Wärmemenge, die beim Übergang 0 →1 (für eine reversible Zustandsänderung!) anfällt.

Definition 6.27: Entropie

$$S(0 \to 1) = \int_0^1 \frac{dQ_{rev}}{T} \tag{6.12}$$

heißt Entropie des Zustandes i bezüglich des Zustandes 0. SI-Einheit J/K

Alle unsere Betrachtungen zu thermischen Maschinen werden für Kreisprozesse gemacht, die reversibel geführt werden. Es ergab sich dann

$$\oint \frac{dQrev}{T} = 0$$

D.h. auch, dass die Entropie nach dem Durchlaufen des Kreisprozesses konstant bleibt.

$$\Delta S = 0$$

Für Kreisprozesse, die nur reversible Zustandsänderungen enthalten, bleibt die Entropie erhalten.
Für Führungen eines Kreisprozesses mit irreversiblen Zustandsänderungen war

$$\eta_{eff} < \eta_{ideal}$$

das bedeutet, dass

$$\sum \frac{dQ_i^{irr}}{T_i} < 0$$

Für einen Kreisprozess mit irreversiblen Zustandsänderungen ist die Summe der reduzierten Wärmemengen kleiner als 0!

Berechnung der Entropie

Wir können die Entropieänderung ΔS für reversible Prozesse eines idealen Gases berechnen:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{dU + p \cdot dV}{T}$$

Nun war

$$\begin{aligned} dU &= c_v \cdot dT \\ p \cdot V &= R \cdot T \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$dS = c_v \cdot \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dV}{V}$$

Beispiele:

- Isothermer Prozess:

  $V_1 \to V_2$ bei T_1:

  $$\Delta S = R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- Isochorer Prozess

  $T_1 \to T_2$ bei $V =$ konstant

  $$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dU}{T} = \Delta S = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

- Diffusion eines Gases aus einem kleinen Volumen V_1 in ein größeres Volumen V_2 (isotherme Expansion):

  Dies ist offenbar ein irreversibler Prozess, da die Rückkehr aller Moleküle durch das enge Loch ins Volumen V_1 extrem unwahrscheinlich ist. Die Entropieänderung bei Expansion von V_1 auf $V_1 + V_2$ kann aber sofort für den reversiblen Prozess des Herausschiebens eines Kolbens von $V_1 \to V_1 + V_2$ angegeben werden:

  $$\Delta S = R \cdot \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

  Wir finden, dass für unseren Diffusionsprozess die Entropie zunimmt $\Delta S > 0$.

  Wie wir sehen werden, gilt allgemein, dass in abgeschlossenen Systemen bei irreversiblen Prozessen die Entropie zunimmt.

6.5.9 Richtungsablauf von Prozessen

Wir betrachten einen Kreisprozess, der eine irreversible Zustandsänderung enthält. Dann ist

$$\oint \frac{dQ}{T} > 0$$

Nur bei einem reversibel geführten Kreisprozess würde gelten

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0$$

d.h. S ist konstant.
Wir legen die irreversible Zustandsänderung in den Ast $1 \rightarrow 2$ und schließen den Kreisprozess durch eine reversible Zustandsänderung $2 \rightarrow 1$. Dann ist

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{rev}}{T} < 0$$

wir drücken das zweite Integral durch die Entropien $S(2)$ und $S(1)$ der Zustände 1 und 2 aus:

$$\int_2^1 \frac{dQ_{rev}}{T} = S(1) - S(2)$$

und erhalten

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} < S(2) - S(1)$$

Das bedeute, dass der Entropiezuwachs $1 \rightarrow 2$ größer ist als das Integral $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ (für den irreversiblen Prozess). Meistens betrachtet man Prozesse in abgeschlossenen Systemen. Dann kann keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden ($dQ = 0$)

$$\Rightarrow S(2) - S(1) > 0$$

Statistische Deutung der Entropie

Wir gehen von den Betrachtungen am Diffusionsexperiment aus:
Nach dem Öffnen des Loches sinkt die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Molekül in V_1 zu finden von W = 1 auf W = $\frac{V_1}{V_2}$. Für zwei Moleküle ist die Wahrscheinlichkeit, beide in V_1 zu finden nach öffnen des Loches $\mathrm{W}_2 = (\frac{V_1}{V_2})^2$. Allgemein für N_A-Moleküle (ein Mol) ist die Wahrscheinlichkeit, sie alle in V_1 zu finden

$$W_{N_A} = (\frac{V_1}{V_2})^{N_A} = (\frac{V_1}{V_2})^{\frac{R}{k}}$$

Wir schließen, dass das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{W}_2/\mathrm{W}_1$, alle Moleküle in V_2 bzw. V_1 zu finden, ist

$$\frac{W_2}{W_1} = (\frac{V_2}{V_1})^{\frac{R}{k}}$$

Für den Logarithmus des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeiten gilt

$$\ln \frac{W_2}{W_1} = \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{R}{k}}$$

oder

$$k \cdot \ln \frac{W_2}{W_1} = R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Andererseits gilt aber für die isotherme Expansion, dass sich bei $V_1 \rightarrow V_2$ die Entropie ändert um

$$\Delta S = R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \Delta S &= k \cdot \ln \frac{W_2}{W_1} \\ \rightarrow S &= k \cdot \ln W \end{aligned}$$

Die Entropie ist also ein Maß für die Wahrscheinlichkeit W_i eines Zustandes i.
Prozesse, bei denen der Endzustand wahrscheinlicher als der Anfangszustand ist ($\Delta S > 0$), laufen im abgeschlossenen System spontan ab (z.B. Diffusion, Wärmeleitung).
Prozesse mit $\Delta S < 0$ laufen nur unter Arbeitsaufwand ab.
Reversible Prozesse haben $\Delta S = 0$. Hier besteht zu jedem Zeitpunkt Gleichgewicht.

Kapitel 7

Strömungsvorgänge

7.1 Einführung

Definition 7.1: Strömung

> *Der Begriff der Strömung ist definiert als Fortbewegung eines Mediums oder einer nicht materiellen Größe (z.B. Energie).*

Beispiele sind die Strömungen von Wasser im Fluss, Blut im Kreislauf oder auch der Wind. Die ursprüngliche Definition war „Fortbewegung von Masse“, d.h. eines flüssigen oder gasförmigen „fluiden“ Mediums. Hierbei handelt es sich um einen Massenstrom. Dieser Begriff ist aber erweiterbar auf die Bewegung von Ladungsträgern, z.B. Elektronen in Metallen oder Ionen in Flüssigkeiten (Elektrolyse-Erscheinungen). Der Transport von Ladungen d.h. die Fortbewegung von Ladungsträgern, heißt elektrischer Strom. Ebenso ist der Begriff auf den Transport von Größen, die nicht mit Materie identifizierbar sind, anwendbar. Eine besondere Stellung nimmt dabei der Transport von Energie ein, Dieser tritt beispielsweise beim Strahlungsstrom (z.B. von der Sonne zur Erde) oder auch bei der Schallstrahlung von der Schallquelle zum Ohr auf. Diese Ströme nennt man Energieströme. Besonders wichtig ist hier die elektromagnetische Strömung.
Am einfachsten ist die Behandlung von fluiden Medien, d.h. Massenströme. Daran definieren wir die Grundgrößen, die dann auf weitere Strömungen übertragen werden. Ausführlich behandelt werden dann der elektrische Strom, Energieströme (insbesonders elektromagnetische Strahlung) und die Schallausbreitung.

7.2 Grundbegriffe

Unmittelbarer Anlass für die Betrachtung ist die Fortbewegung von flüssigen oder gasförmigen Medien. Das Fachgebiet heißt Rheologie (Fließkunde). Die neuen physikalischen Größen wie Strom oder Stromdichte bleiben dieselben,

wenn stattdessen die Fortbewegung von Ladungen in Drähten, Flüssigkeiten usw. untersucht wird. Weiterhin sind diese Begriffe anwendbar auf Vorgänge, bei denen überhaupt keine Materie, sondern Energie transportiert wird.
Eine Strömung wird charakterisiert durch ein sogenanntes Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r})$. Dabei denken wir uns an jeder Stelle der Flüssigkeit den lokalen Geschwindigkeitsvektor der Teilchen angeheftet.

Definition 7.2: STROMLINIEN

> *Verbindet man die Vektoren $\vec{v}(\vec{r})$ benachbarter Orte $\vec{r}$, so erhält man als Ergebnis die Stromlinien.*

Definition 7.3: LAMINARE UND TURBULENTE STRÖMUNG

> *Wenn sich die Stromlinien nicht schneiden, so spricht man von laminarer Strömung. Schneiden sich die Stromlinien, so ist die Strömung turbulent.*

Definition 7.4: WIRBELSTRÖMUNG

> *Wirbelströmungen sind solche, in denen geschlossene Stromlinien auftreten.*

Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitelements ist dann die vektorielle Überlagerung aus Translations- und Rotationsgeschwindigkeit. Ein Maß für die Drehbewegung/rotatorische Komponenten ist die Zirkulation.

Definition 7.5: ZIRKULATION

> *Die Zirkulation Γ ist das Integral über $\vec{v}$ längs eines in der Flüssigkeit verlaufenden geschlossenen Weges.*
>
> $$\Gamma = \oint \vec{v}d\vec{s}$$

Für einen (kreisförmigen) Wirbel liefert die Integration im Abstand R vom Wirbelkern, da alle Flüssigkeitselemente das selbe ω haben:

$$\Gamma = \oint \vec{v}d\vec{s} = 2\pi R^2\omega$$

Eine wirbelfreie Strömung liegt vor, wenn für jedes Flüssigkeitselement gilt

$$\Gamma = 0$$

Wir halten nun einen Meßrahmen der Fläche A in die Strömung und messen die in Δt durch A fließende Materiemenge Δm.

Definition 7.6: STROMSTÄRKE

> *Die Stromstärke für einen Massestrom ist definiert als*
>
> $$I = \frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Die fließende Menge braucht aber nicht unbedingt Masse sein:

Strom(stärke)	Menge	I	Einheit
Massestrom	Masse m	$\frac{dm}{dt}$	kg/s
Ladungsstrom	Ladung Q	$\frac{dQ}{dt}$	C/s = Ampère (A)
Energiestrom	Energie W	$\frac{dW}{dt}$	J/s = Watt (W)

Definition 7.7: DICHTE

Bezieht man eine physikalische Größe (Masse, Ladung, Energie) auf das Volumen, in dem sie definiert ist, so erhält man die Dichte der betreffenden Größe.

In der kinetischen Gastheorie haben wir die Teilchendichte $n = \frac{dN}{dV}$ bereits kennengelernt. In Worten bedeutet dies, dass sich dN Teilchen im Volumen dV befinden. Analog sind nun auch Dichten für die Größen Masse, Ladung und Energie definiert:

- Massendichte: $\rho = \frac{dm}{dt}$ (Einheit $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)
- Ladungsdichte: $\rho_{el} = \frac{dQ}{dt}$ (Einheit $1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$)
- Energiedichte: $\rho = \frac{dW}{dt}$ (Einheit $1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$)

Wird eine physikalische Größe durch eine einzige Sorte von Teilchen transportiert (z.B. Ladung durch Elektronen), dann ist

$$\rho_{el} = e \cdot \frac{dN_e}{dV} = e \cdot n$$

wobei dN_e die Zahl der Elektronen in dV ist. In Worten heißt dies, dass die Ladungsdichte ρ_{el} als Produkt aus Einzelladung e und Teilchenzahldichte n geschrieben werden kann.
Weil für den Massestrom speziell $m = \rho \cdot V$ ist, gilt für konstante Dichte ρ:

$$I = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt}$$

Definition 7.8: VOLUMENSTROM

Den Ausdruck $\frac{dV}{dt}$ nennt man Volumenstromstärke. Man misst dazu das Volumen, welches pro Zeit dt durch den Meßrahmen fließt.

Es ergibt sich nun die Problematik, dass die Stromstärke von der Orientierung von A relativ zu $\vec{v}(\vec{r})$ abhängt. Man sucht also eine davon unabhängige Größe. Dazu macht man A genügend klein, bezieht I auf A und wählt die Orientierung von A senkrecht zu $\vec{v}(\vec{r})$.

Definition 7.9: STROMDICHTE

> *Die Stromdichte ist definiert über den Quotienten aus dem durch das Flächenelement dA fließenden Strom dI und dem Flächenelement selbst:*

$$j = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{dI}{dA}$$

Man beachte, dass die Flächennormale von A parallel zu $\vec{v}(\vec{r})$ ist. Bei einem Massestrom I $= \frac{dm}{dt}$ erhält man nun

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A}\frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho}{\Delta A}\frac{\Delta A \cdot \Delta s}{\Delta t} \to \rho \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot v$$

Offenbar ist die Stromdichte $\vec{j}$ ein Vektor, der die Richtung von $\vec{v}$ hat. Allgemein gilt somit:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{v}(\vec{r}) \tag{7.1}$$

Die Gleichung (7.1) gilt analog für die elektrische Stromdichte $\vec{j}_{el}$ und die Energiestromdichte $\vec{j}_w$. Dabei ist für ρ die Ladungsdichte bzw. die Energiedichte einzusetzen.

Kontinuitätsgleichung

Generell gilt immer der Grundsatz der Massen-, Ladungs- und Energieerhaltung. Als Konsequenz daraus ergibt sich die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Wir untersuchen dazu, was in einer Rohrverjüngung passiert (siehe Abbildung 7.1).

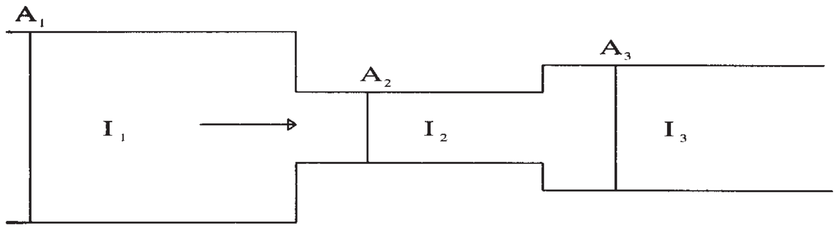

Abbildung 7.1: Rohr

Wir stellen fest, dass durch alle drei gezeigten Querschnitte in Δt dieselbe Materiemenge fließen muss. Andernfalls würde sich die Materie irgendwo aufstauen. es gilt daher $I_1 = I_2 = I_3$, d.h. I ist überall gleich. Es folgt nun aus der umgeformten Definition der Stromstärke für jeden der drei Querschnitte

$$I_i = \frac{dm}{dt} = \rho_i \cdot A_i \cdot \frac{ds_i}{dt} = \rho_i \cdot A_i \cdot v_i$$

Wird die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen, d.h. ist ρ konstant, so gilt die

Kontinuitätsgleichung

$$A \cdot v = konstant = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \ldots \tag{7.2}$$

Eine Verengung des Rohres erfordert also automatisch eine Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit (siehe Autobahn-Staus).

7.3 Strömung fluider Medien

7.3.1 Bernoulli-Gleichung

Die Massenerhaltung und damit die Kontinuitätsgleichung fordert, dass die Strömung an einer Querschnittsverengung schneller fließt. Für die zur Beschleunigung notwendige Kraft muss ein Druckunterschied verantwortlich sein. Unser Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen dem lokalen Druck und der Strömungsgeschwindigkeit zu finden. Man macht einige Idealisierungen:

- Die Reibung zwischen den Molekülen und der Wand wird vernachlässigt.

  Definition 7.10: Reibungsfreie Strömung

  > *Eine Flüssigkeit, bei der die Reibungskräfte vernachlässigt werden, heißt reibungsfreie Strömung.*

  Definition 7.11: Viskosität

  > *Eine Flüssigkeit, bei der die Reibungskräfte berücksichtigt werden, heißt viskos oder zäh.*

- Die Flüssigkeit wird als inkompressibel angenommen, d.h. die Dichte ρ ist überall konstant.

Definition 7.12: ideale Flüssigkeit

> *Eine ideale Flüssigkeit ist ein Modell, bei dem die Flüssigkeit als inkompressibel und reibungsfrei angesehen wird. Sonst wird die Flüssigkeit als real bezeichnet.*

Im Folgenden handelt es sich um eine ideale Flüssigkeit. Wir betrachten ein Zeitintervall Δt, in dem der Kolben (1) in Abbildung 7.2 die Flüssigkeit um Δs_1 verschiebt.
Der Kolben (2) muss nun wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit um die Strecke Δs_2 bewegt werden, wobei gilt:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta s_1 \cdot A_1 = \Delta s_2 \cdot A_2 = \Delta V_2$$

Folgende zu verrichtende Arbeiten tragen nun zu Energiebilanz bei:

1. Volumenarbeit (unten):
$$\Delta W_1 = p_1 \cdot \Delta V_1$$

2. Volumenarbeit (oben):
$$\Delta W_2 = p_2 \cdot \Delta V_2$$

3. Hubarbeit:
$$\Delta W_H = \Delta m \cdot g \cdot \Delta h = \rho \cdot g \cdot \Delta h \cdot \Delta V$$

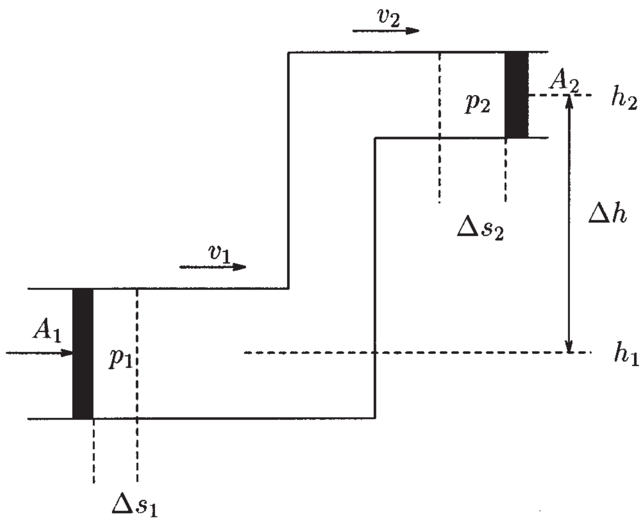

Abbildung 7.2: Kolbendruck

4. Beschleunigungsarbeit, um die Strömung von v_1 auf v_2 zu bringen:

$$\Delta W_B = \frac{1}{2}\Delta m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Aus diesen Arbeiten kann nun die Energiebilanz aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\Delta W_1 &= \Delta W_2 + \Delta W_H + \Delta W_B \\
p_1 \cdot \Delta V &= p_2 \cdot \Delta V_2 + \rho \cdot g \cdot \Delta h \cdot \Delta V + \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\
p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2
\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die

Bernoulli-Gleichung

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = konstant = p_g \tag{7.3}$$

Definition 7.13: Statischer, Stau- und Schweredruck

Die Größe p heißt statischer Druck (Kolbendruck), der Ausdruck $\frac{1}{2}\rho v^2$ dynamischer Druck (Staudruck), der Term $\rho \cdot g \cdot h$ Schweredruck und p_g Gesamtdruck.

Wir diskutieren nun einige Aspekte der Bernoulli-Gleichung:

1. Bei einer ruhenden Flüssigkeit ist die Geschwindigkeit $v = 0$. Dies führt zu der vereinfachten Gleichung

$$p_1 = p_2 + \rho g(h_2 - h_1)$$

   Der Druckunterschied $\Delta p = (p_2 - p_1)$ wird durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule der Höhe $\Delta h = (h_2 - h_1)$ ausgeglichen. Anwendung findet dieser Fall bei der Druckmessung mit einem U-Rohr-Manometer.

2. Befindet sich die Flüssigkeit immer auf gleicher Höhe $h_1 = h_2$, hat aber eine Geschwindigkeit $v \neq 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

   Zur Beschleunigung der Flüssigkeit von v_1 auf v_2 ist ein Druckunterschied erforderlich. In der Verengung muss die Flüssigkeit schneller fließen. Deshalb ist der statische Druck in der Querschnittsverengung kleiner als außerhalb.

Druckmessung

Es sind der statische Druck, der Staudruck und der Schweredruck zu messen.

- Der statische Druck ist der Druck, den ein mit der Strömung mitbewegtes Manometer misst. Alternativ kann ein Manometer verwendet werden, dessen Öffnung senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ steht. Dann ist in dieser Richtung $\vec{v} = 0$.
- Der Staudruck kann mit Hilfe eines Prandtl-Staurohres (siehe Abbildung 7.3) gemessen werden. Es gilt: $v = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{Stau}}$. Für bekanntes ρ kann v direkt abgelesen werden.

Das Gesetz von Bernoulli findet Anwendung beispielsweise bei der Wasserstrahlpumpe und dem Zerstäuber. In beiden Fällen wird ausgenutzt, dass in der Umgebung einer Querschnittsverengung Unterdruck herrscht. Dadurch wird etwas Gas in die Flüssigkeit oder etwas Flüssigkeit in das Gas (Zerstäuber) gesaugt.

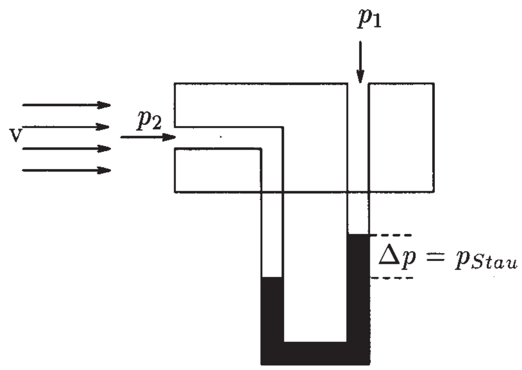

Abbildung 7.3: Prandtl-Rohr

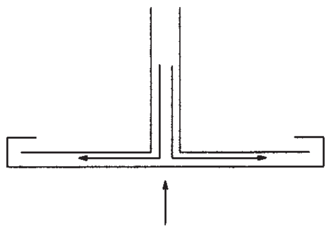

Abbildung 7.4: Hydrodynamisches Paradoxon

Hydrodynamisches Paradoxon

Zwei Platten hängen lose zusammen (siehe Abbildung 7.4). Durch die obere Platte strömt Luft in den Zwischenraum zwischen den beiden Platten ein. An den Plattenrändern erweitert sich der Strömungsquerschnitt. Folglich muss zwischen den Platten ein Unterdruck verglichen zum Atmosphärendruck herrschen, der an den Rändern vorliegt. Als Konsequenz werden die Platten angezogen und der Luftstrom unterbrochen. Die untere Platte fällt ab und der Ablauf beginnt von vorn. Dies ist das Modell für das „Schnarchen". Die Funktion der unteren Platte wird durch das Gaumensegel übernommen.

7.3.2 Querkräfte in Strömungen

Eine unerwünschte Wirkung zeigt die Bernoulli-Gleichung beim Abdecken von Dächern in Stürmen. Über dem Dach ist die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ erhöht und es entsteht ein Unterdruck p und damit eine Kraft

$$F = L_y \int_{x_1}^{x_2} \Delta p(x) dx = L_y \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho}{2} v(x)^2 dx$$

Dabei ist L_y die Dachlänge senkrecht zur Strömungsrichtung und $\Delta p = p_0 - p(x)$.
Bringt man einen Ball in einen Luftstrom, so beginnt er zu schweben. Offenbar ist wesentlich, dass das Geschwindigkeitsfeld quer zur Ausströmungsrichtung in unterschiedlicher Weise oberhalb/unterhalb des Balles modifiziert wird. Dies wird z.B. auch dadurch erreicht, dass der Ball rotiert.
Offenbar erhalten die Teilchen, die sich in Richtung der Umfangsgeschwindigkeit bewegen, eine Zusatzgeschwindigkeit. Jene die sich in die Gegenrichtung bewegen werden verlangsamt. Zum Verständnis betrachten wir nochmals eine umströmte Kugel (oder Zylinder) und interpretieren die Situation mit der Bernoulli-Gleichung.
Zunächst wird das Strömungsfeld und die Druckverteilung um einem nicht rotierenden Zylinder betrachtet (Abbildung 7.5).

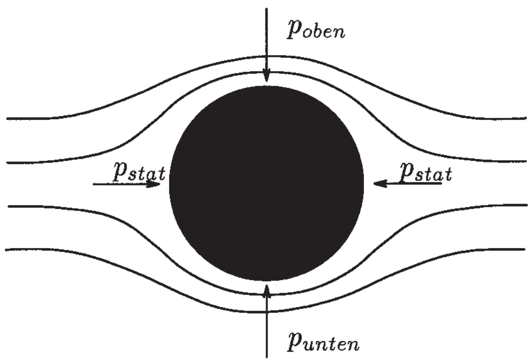

Abbildung 7.5: Strömung um einen Zylinder

Das Geschwindigkeitsfeld wird durch den Zylinder verändert. Eine Querkraft tritt aber nicht auf.
$p_0 = p_n$, da das Geschwindigkeitsfeld symmetrisch verändert wird. D.h. p_0 und p_n sind beide um den gleichen Betrag kleiner als p_{stat} (bei der Staulinie) $\rightarrow$Die Walze/Kugel erfährt im Strom keine Querkraft!
Die Haftung der Flüssigkeitsmoleküle an dem Körper durch die van-der-Waals-Kräfte führt zu einer Reibungskraft $\vec{F_r}$ - in Richtung von $\vec{v}$ - die den Zylinder mitzureißen versucht. Diese Kraft wird im Modell der idealen Flüssigkeit nicht berücksichtigt.

Dynamischer Auftrieb, Magnus-Effekt

Wird der Zylinder nun aber in eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Längsachse versetzt (siehe Abbildung 7.6), so erhalten die Flüssigkeitselemente am Zylinderumfang oben eine zusätzliche Geschwindigkeit von $v_z = \omega R$ und unten eine um $v_z = \omega R$ erniedrigte Geschwindigkeit. Es ist

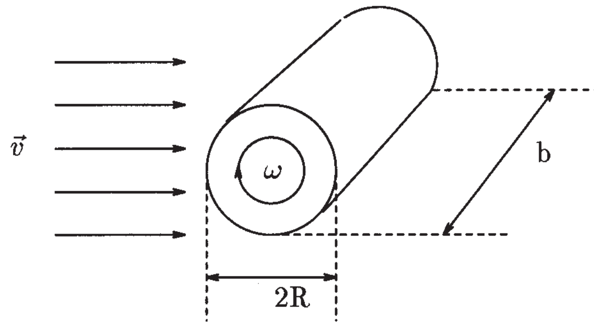

Abbildung 7.6: Magnus-Effekt

$$\begin{aligned} v_O &= v + \omega R \\ v_U &= v - \omega R \end{aligned}$$

Die Bernoulli-Gleichung liefert nun

$$p_O + \frac{\rho}{2} v_O^2 = p_U + \frac{\rho}{2} v_U^2$$

Als Druckdifferenz ergibt sich daraus

$$\Delta p = p_O - p_U = \frac{\rho}{2}((v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2) = 2\rho \cdot v \cdot \omega \cdot R$$

Das Vorzeichen von Δp hängt dabei von der Drehrichtung, also von ω ab. Die Kraft $|\vec{F}_A|$ quer zur Strömungsrichtung beträgt $F_A = \Delta p \cdot A$. Als angeströmte Fläche A erhält man $A = \frac{1}{2} 2\pi R b = \pi R b$. Setzt man diese in die Gleichung für die Kraft ein, so erhält man

$$F_A = 2\rho v \omega R \cdot \pi R b = \rho v b \cdot \Gamma$$

wobei $\Gamma = 2\pi R^2 \omega$ die Zirkulation der Strömung ist.

Definition 7.14: Dynamischer Auftrieb

> *Die Kraft F_A heißt dynamische Auftriebskraft.*

Definition 7.15: Magnus-Effekt

> *Die Tatsache, dass ein rotierender Körper in einer Strömung eine Querkraft erfährt, heißt Magnus-Effekt.*

Die Zirkulation Γ berechnet sich allgemein aus dem geschlossenen Wegintegral über den Körperumfang

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s}$$

wobei die Integration entlang eines Weges geführt wird, welcher den Körper umschließt. $d\vec{s}$ ist ein Wegelement auf eben diesem Weg. In unserem Beispiel war $|\vec{v}| = 2\pi R$. Für Γ ergab sich somit

$$\Gamma = 2\pi\omega R^2$$

Verallgemeinert stellt man fest: Immer wenn sich um einen Körper eine Zirkulationsströmung ergibt ($\Gamma \neq 0$), so entsteht eine dynamische Auftriebskraft. Es reicht bereits aus, wenn $v_O \neq v_U$ ist. Eine Zirkultion entsteht auch, wenn sich von einem Hindernis Wirbel ablösen. Es gilt für einen Körper der „Spannweite“ l allgemein der

Satz von Kutta-Jukowsky

$$F_A = \rho v b \cdot \Gamma \tag{7.4}$$

Ein einfaches Beispiel für die Entstehung von F_A durch Formgebung des Hindernisses ist ein umströmter Tragflügel. v_O muss größer als v_U sein, damit sich - bei längerem Weg oben herum - beide Massenelemente hinter dem Tragflügel wieder treffen. Das Integral für Γ ergibt dann $\Gamma \neq 0$. Kutta-Jukowsky liefert die Querkraft um den umströmten Flügel.

7.3.3 Strömungen in realen Flüssigkeiten

Bisher nahmen wir an, dass die Moleküle aufeinander keine Kohäsionskräfte ausüben, ferner sollte es keine Adhäsionskräfte zwischen den Molekülen und den Wänden geben. Jetzt lassen wir dagegen die Reibung (innere Reibung) zu. Vorausgesetzt wird dagegen, dass es sich um eine laminare Flüssigkeit handelt, d.h. das Strömungsfeld dieser Flüssigkeit zeigt keine Überkreuzungen.
Betrachten wir nun eine reale Flüssigkeit in einer Rohrleitung. Am Einfluss herrscht der Druck p_1 und die Strömungsgeschwidigkeit sei v_1. Am Ausfluss erwartet man wegen des gleichen Querschnitts auch die gleiche Geschwindigkeit $v_2 = v_1$. Nach Bernoulli müsste nun $p_1 = p_2$ sein. Man findet aber, dass p_2 kleiner als p_1 ist. Der Grund hierfür ist, dass Volumenarbeit gegen die Kohäsions - bzw. Adhäsionskräfte verrichtet wird. Die verrichtete Arbeit gegen die Reibungskraft ist

$$W = (p_1 - p_2) \cdot A \cdot \Delta s$$

Ist Δp die auftretende Druckdifferenz und $I_V = Av$ der gegebene Volumenstrom, so trifft man folgende Definition:

Definition 7.16: STRÖMUNGSWIDERSTAND

Der Quotient aus Druckabfall und Volumenstrom heißt Strömungswiderstad R

$$R = \frac{\Delta p}{I_V}$$

Definition 7.17: NEWTON-FLÜSSIGKEIT

Hängt der Strömungswiderstand R nicht vom Druckverlust Δp ab, so handelt es sich um eine Newton-Flüssigkeit.

Obige Definition des Strömungswiderstandes bedeutet anschaulich, je größer der Druckverlust Δp sein muss, um I_V strömen zu lassen, desto größeren Widerstand setzt die Rohrleitung der Strömung entgegen. Offenbar gilt:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \Delta p \cdot A \cdot v = \frac{\Delta p}{I_V} I_V^2 = R \cdot I_V^2$$

Um eine anschauliche Erklärung der Viskosität zu finden, betrachte man eine Flüssigkeit, die an einer Platte der Fläche A vorbeigleitet.
Direkt an der Platte treten zwischen Platte und Flüssigkeitsmolekülen Adhäsionskräfte auf, die die Moleküle festhalten. Die folgenden Schichten müssen nun übereinander weggleiten. Dem stehen aber Kohäsionskräfte entgegen. Folglich wächst die zu überwindende Kraft mit der Fläche A des Hindernisses, an dem die Moleküle haften. Die Größe der Kraft $\vec{F}$, die nötig ist, um einen Körper mit vorgegebener Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch eine ruhende Flüssigkeit zu bewegen, hängt von den Kohäsions- und Adhäsionskräften ab:

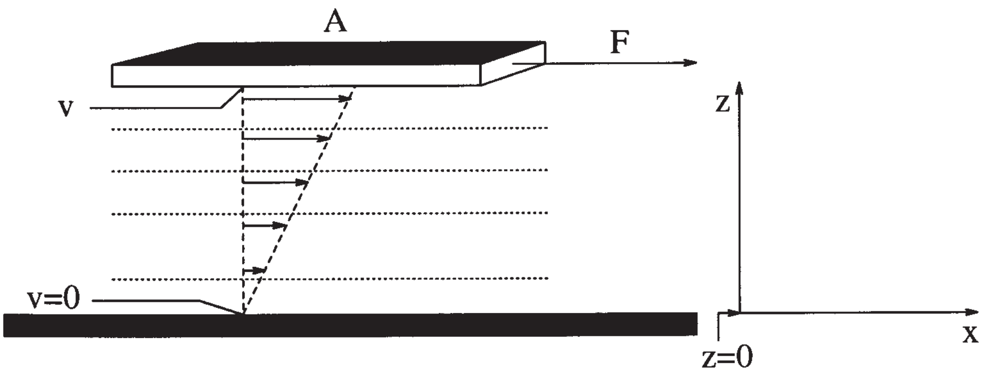

Abbildung 7.7: Adhäsionskräfte an einer Platte

- Die Kraft $\vec{F}$ muss um so größer sein, je größer die Fläche A ist, an der die Adhäsion auftritt: $F \sim A$.
- Ebenfalls muss $\vec{F}$ um so größer sein, je größer $\vec{v}$ sein soll. Es geht also der Geschwindigkeitsunterschied $\frac{dv}{dz}$ zur ruhenden Flüssigkeit ein: $F \sim \frac{dv}{dz}$

Der einfachste Ansatz für die Kraft $\vec{F}$ heißt

Newton'scher Reibungsansatz

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dz} \tag{7.5}$$

Definition 7.18: ZÄHIGKEIT

Der Proportionalitätsfaktor η heißt Zähigkeit oder Viskosität der Flüssigkeit und ist charakteristisch für die Molekularkräfte. Die SI-Einheit ist $1\,Ns/m^2 = 1\,Pa{\cdot}s$.

Ölsorte (T = 55°C)	Zähigkeit η
SAE 10	$160 \ldots 220 \cdot 10^{-3}$ Pa·s
SAE 20	$230 \ldots 300 \cdot 10^{-3}$ Pa·s
SAE 30	$360 \ldots 430 \cdot 10^{-3}$ Pa·s

Tabelle 7.1: Zahlenbeispiel zur Viskosität

Es zeigt sich, dass die Viskosität von der Temperatur abhängt. Dies kann schematisch durch Platzwechselvorgänge erklärt werden. Wir betrachten die Moleküle der Flüssigkeit als harte Kugeln. Dies erlaubt uns eine qualitative Aussage über die Temperaturabhängigkeit. Die Verzahnung benachbarter Kugelschichten bedingt einen „Potentialberg", der überwunden werden muss, denn die benachbarte Kugelschicht muss etwas angehoben werden. Wenn die Moleküle bereits beträchtliche thermische Energie besitzen, so ist dies leichter möglich. Die Höhe des Potentialberges W_a stellt die Aktivierungsenergie für den Platzwechsel dar. Die Wahrscheinlichkeit dafür geht proportional mit $\exp(-W_a/kT)$.

Flüssigkeit	Temperatur ϑ	Viskosität η [Ns/m^2]
H_2O	0	$1,79 \cdot 10^{-3}$
H_2O	20	$1,01 \cdot 10^{-3}$
H_2O	50	$0,55 \cdot 10^{-3}$
H_2O	100	$0,28 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.2: Zahlenwerte für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Versuch zur inneren Reibung (Couette-Viskosimeter)

Das Couette-Viskosimeter ist aus zwei gegeneinander drehbaren Zylindern aufgebaut, deren Wände den Abstand $dr \approx 1\,\text{mm}$ haben. Der innere Zylinder ist drehbar und zwischen den Zylindern befindet sich Flüssigkeit bis zu einer Höhe h. Durch diese Höhe kann die mit Flüssigkeit bedeckte Oberfläche A der Zylinder ein Drehmoment verursacht und ihn in eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω versetzt. Man erhält folgende Ergebnisse:

1. Die Antriebskraft ist proportional zur Fläche A.
2. Die Antriebskraft wächst proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω.
3. Sie ist ebenfalls abhängig von der Art der Flüssigkeit, d.h. ihrer Viskosität η.
4. Die Verwendung eines Innenzylinders mit kleinerem Abstand zum Außenzylinder verursacht eine größere Kraft zur Aufrechterhaltung der gleichen Geschwindigkeit. Der Grund hierfür ist das Anwachsen der Fläche A mit wachsendem Radius$r$.

Diese Ergebnisse bestätigen den Newton'schen Reibungsansatz, wobei bei uns gilt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d(\omega r)}{dr} = \omega$$

Anwendungen des Newton'schen Reibungsansatz

1. **Stokes-Gesetz**

   Wir betrachten eine Kugel, die von einem Fluid umströmt wird (siehe Abbildung 7.8).

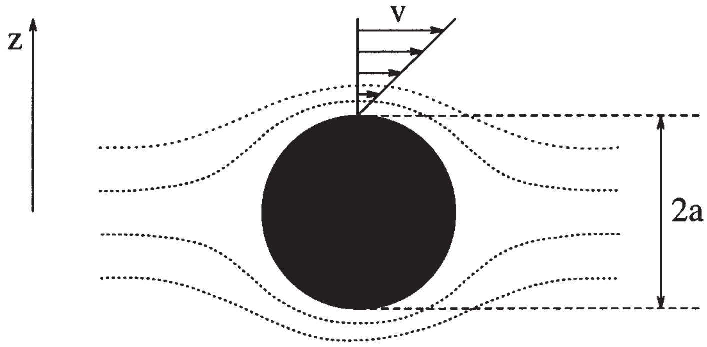

Abbildung 7.8: Strömung um eine Kugel

Fern der Kugel sei die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$. An der Kugel haftet dagegen die angrenzende Flüssigkeitsschicht, d.h. $\vec{v}$ ist dort Null. Wir haben ein Geschwindigkeitsgefälle von

$$\frac{dv}{dz} \approx \frac{v}{a}$$

mit a dem Radius der Kugel. Wir verwenden nun den Newton'schen Reibungsansatz. An der Kugeloberfläche greift eine Reibungskraft F_R an, für die nach Newton gilt:

$$F_R \approx 4\pi a^2 \eta \frac{v}{a} = 4\pi\eta a v$$

Tatsächlich stellt die Kugel ein Strömungshindernis dar und nach Bernoulli ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit für $z > a$ größer als weit vor oder hinter dem Hindernis. Eine strengere Betrachtung liefert daher für F_R einen etwas größeren Wert als jenen, den wir abgeschätzt haben. Man erhält das

Stokes-Gesetz

$$F_R = 6\pi\eta a v \tag{7.6}$$

Versuch: Kugelfall-Viskosimeter

Wir lassen eine Kugel in einem Fluid fallen. Nach einiger Zeit sind die Schwerkraft und die Reibungskraft gleich groß, d.h. es herrscht Kräftegleichgewicht. Da es sich in diesem Zustand um eine kräftefreie Bewegung handelt, fällt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit. Die Kräftebilanz ergibt

$$F_R = 6\pi\eta a v = F_g = mg = \rho g \frac{4\pi}{3} a^3$$

Dabei ist wegen der Auftriebskorrektur $\rho = \rho_{kugel} - \rho_{Fl}$. Die Fallgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{\eta} g a^2$$

Die Geschwindigkeit ist also proportional zum Quadrat des Kugelradius. Kennt man nun den Kugelradius sowie die Dichte der Kugel bzw. der Flüssigkeit und misst die Fallgeschwindigkeit, so kann man die Zähigkeit der Flüssigkeit bestimmen.

2. **Gesetz von Hagen-Poiseuille**

Weil die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet ($v = 0$), muss eine Kraft F_R überwunden werden, um eine Strömung mit $|\vec{v}|$ aufrecht zu erhalten. Dies geschieht durch eine Druckdifferenz zwischen Ein- und Austritt des Rohres. Es ist

$$F_R = \Delta p \pi a^2$$

Innerhalb des Rohres ergibt sich ein Geschwindigkeitsprofil der in Abbildung 7.9 gezeigten Form.

Anschaulich ist klar, dass $v(z) = c \cdot (a^2 - z^2)$ gelten könnte. Man findet in der Tat

$$v(z) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(a^2 - z^2)$$

Wir schätzen F_R wieder aus dem Newton'schen Reibungsansatz ab und setzen $A = 2\pi a l$, d.h. A ist die innere Oberfläche des Rohres, denn l ist die Rohrlänge und a der Rohrradius. Ferner ist $\frac{dv}{dz} \approx 2\frac{\bar{v}}{a}$, wobei $\bar{v}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in etwa $\bar{v} = v_{max}/2$ ist. Das Ergebnis unserer Abschätzung lautet

$$F_R \approx 4\pi\eta l\bar{v}$$

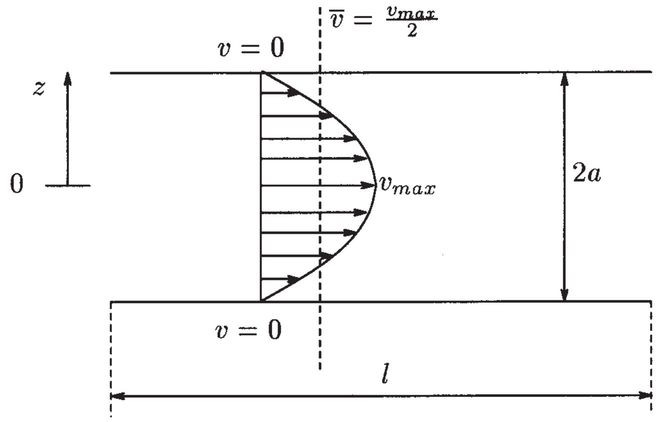

Abbildung 7.9: Strömungsprofil in einer Röhre

Eine strengere Rechnung liefert stattdessen das Ergebnis

$$F_R = 8\pi\eta l\bar{v} \tag{7.7}$$

Wir berechnen nun noch den Strömungswiderstand R nach Definition 7.16, wobei der Volumenstrom durch $I_V = A\bar{v}$ gegeben ist. Mit $\Delta p = \frac{F_R}{\pi a^2}$ folgt somit

$$R = \frac{\Delta p}{I_V} = \frac{\Delta p}{\pi a^2 \bar{v}} = \frac{F_R}{\pi^2 a^4 \bar{v}}$$

Setzt man nun F_R gemäß Gleichung (7.7) ein, so ergibt sich das

Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$R = \frac{8\eta l}{\pi a^4} \tag{7.8}$$

Der Strömungswiderstand von Rohren hängt also äußerst empfindlich vom Rohrradius ab ($\sim \frac{1}{a^4}$). Wirkung zeigt diese Tatsache z.B. beim menschlichen Blutkreislauf. Ist dort ein Blutgefäß stark verengt, so werden manche Körperteile nicht mehr oder nur wenig mit Sauerstoff versorgt und in ihren Funktionen eingeschränkt oder sterben gar ab (Herzinfakt).

Im Prinzip kann über das Hagen-Poiseuillesche Gesetz auch die Zähigkeit η gemessen werden.

7.3.4 Turbulente Strömungen

Man stellt fest, dass oberhalb einer kritischen Strömungsgeschwindigkeit ein Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung stattfindet. Es stellt sich die Frage, wie man dies erkennt. Leitet man die Strömung durch ein Rohr und trägt den Quotienten aus Druckabfall und Länge des Rohres $\frac{\Delta p}{l}$ gegen $\bar{v}$ auf, so ergibt sich das Diagramm in Abbildung 7.10.

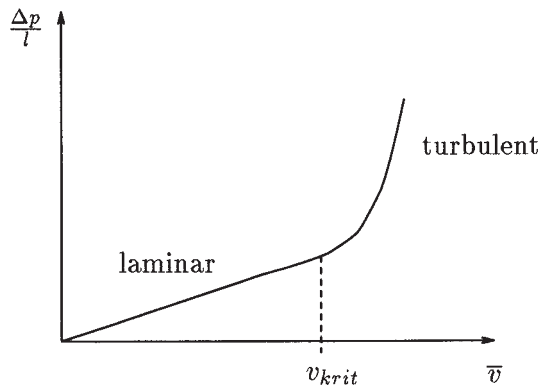

Abbildung 7.10: Diagramm zur Turbulenz

Wir finden folgende Zusammenhänge:

- Für $\bar{v} < v_{krit}$ ist $\Delta p \sim \bar{v}$
- Für $\bar{v} > v_{krit}$ dagegen ist $\Delta p \sim \bar{v}^2$

Der Vergleich von laminarer und turbulenter Strömung ergibt, dass im laminaren Fall das Strömungsfeld im Gegensatz zur Turbulenz nicht explizit von der Zeit abhängt. Ferner kann bei Turbulenz die Bahn eines Flüsigkeitselementes Δm nicht durch einen Stromfaden charakterisiert werden, was im laminaren Fall der Fall ist. Wie wir bereits gesehen haben, unterscheiden sich die beiden Fälle zudem durch die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Geschwindigkeit. Im Laminarfall hängt dieser linear, bei Turbulenz quadratisch von der Strömungsgeschwindigkeit ab. Letztlich dominieren bei laminarer Strömung die Reibungskräfte, während bei der Turbulenz die Druckkräfte überwiegen.

Entstehung und Auswirkung der Wirbelbildung

Wir betrachten den Fall einer Wirbelstraße hinter einer angeströmten Platte. Bei einer idealen Strömung ergibt sich die in Abbildung 7.11 dargestellte Situation. Vor und hinter der Platte herrsche der Druck p_h, oben und unten der Druck p_n. Der Druck über und unter dem Hindernis ist natürlich niedriger, weil sich dort die Stromfäden zusammendrängen und somit eine größere Strömungsgeschwindigkeit vorliegt. Die Bernoulli-Gleichung sagt aus:

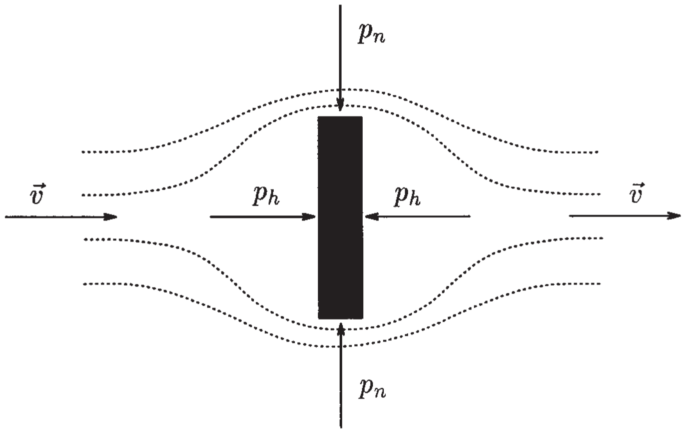

Abbildung 7.11: Ideale Strömung um eine Platte

$$p_n + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_h$$

Der Staudruck muss aus der Druckdifferenz $p_h - p_n$ stammen. Im Idealfall ist der Strömungsverlauf vor und hinter dem Hindernis identisch. Die „Bewegungsenergie“ $\frac{1}{2}\rho v^2$ reicht gerade aus, um gegen den Druckunterschied $p_h - p_n$ anzulaufen. Bei einer viskosen Strömung verrichtet ein Teil der Bewegungsenergie Arbeit gegen die Reibungskräfte. Dadurch kommt die Flüssigkeit nicht mehr gegen das Druckgefälle an. Sie „kehrt um“, strömt also auf das Hindernis zu. Diese Gegenströmung muss Arbeit gegen die Reibungskräfte verrichten. Um nun einen Wirbel bilden zu können, muss die Bewegungsenergie in der Gegenströmung hinreichend hoch sein. Ebenso muss die Druckdifferenz eine bestimmte Grenze überschreiten, um einen Wirbel zu erzeugen (siehe Abbildung 7.12).

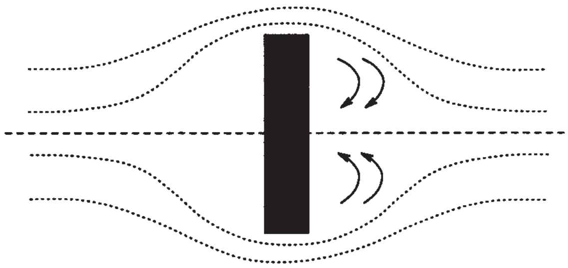

Abbildung 7.12: Wirbelstraße

Wir wollen nun den Strömungswiderstand R in turbulenten Strömungen „berechnen“. Die Wirbel enthalten Rotationsenergie, die aus dem Druckunterschied

$p_h - p_n$ stammen muss. Folglich kann p_h' hinter dem Hindernis nicht so groß sein wie p_h vor dem Hindernis. Auf das Hindernis wirkt also die Kraft

$$F_D = (p_h - p_h') \cdot A$$

in Richtung der Strömung („D“ für Druckkraft). Wir wollen F_D nun abschätzen. Wenn der gesamte Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$ in Rotationsenergie umgesetzt würde, dann wäre

$$p_h - p_h' = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Dabei vernachlässigen wir die Arbeit gegen die Reibungskräfte. Somit ist

$$F_D = (p_h - p_h') \cdot A = \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot A$$

In Wirklichkeit ist F_D auch noch von der Körperform abhängig. Es gilt für die

Widerstandskraft

$$F_D = c_w \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot A \tag{7.9}$$

Definition 7.19: WIDERSTANDSBEIWERT

Der von der Körperform abhängige Proportionalitätsfaktor c_w heißt Widerstandsbeiwert.

Der Zusammenhang aus Gleichung (7.9) gilt auch noch unter Einschluss des Strömungswiderstandes F_R aufgrund der Reibung.

Einführung der Reynoldszahl

Wir vergleichen die Druckkraft $\vec{F}_D$ mit der Reibungskraft $\vec{F}_R$. Die Druckkraft muss wesentlich überwiegen, sonst entstehen keine Wirbel. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} F_D &\gg F_R \\ \Delta p \cdot A = \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot a &\gg \eta \frac{v}{a} \cdot A \\ \frac{\rho v a}{\eta} &\gg 1 \end{aligned}$$

Definition 7.20: REYNOLDS-ZAHL

Der folgende dimensionslose Parameter Re heißt Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho v a}{\eta}$$

Dabei ist v die Anströmgeschwindigkeit, a eine charakteristische Abmessung des umströmten Hindernisses oder des durchströmten Rohres, η die Zähigkeit und ρ die Flüssigkeitsdichte. Die Reynoldszahl bestimmt, ob Turbulenz auftritt. Man findet experimentell, dass Turbulenz für Reynoldszahlen $\mathrm{Re} \geq 2 \cdot 10^3$ auftritt. Der exakte Wert hängt von der Form des Hindernisses, der Oberflächenbeschaffenheit o.ä. ab. Der angegebene Wert ist eine Faustregel.
Strömungen heißen ähnlich, wenn in ihnen die Reynoldszahl denselben Wert hat. Um eine konstante Reynoldszahl zu erreichen, müssen a und v (bei gleicher Form des Hindernisses) einander umgekehrt proportional geändert werden.

Treibstoffverbrauch von Kraftfahrzeugen

Wir wenden vorstehende Überlegungen auf die Bewegung von Kraftfahrzeugen an. Die aufzuwendende chemische Energie wird gebraucht, um die Druckwiderstandskraft F_D zu überwinden. Die Rollreibung kann vernachlässigt werden. Die benötigte Leistung beträgt

$$P = F_D \cdot v = c_w \frac{1}{2} \rho v^3 \cdot A$$

wenn man F_D aus Gleichung (7.9) einsetzt. Man muss also entweder die angeströmte Fläche oder den Wiederstandsbeiwert möglichst klein machen.

Widerstandskörper	c_w-Wert
Rennwagen	0,25 ... 0,35
PKW (Golf I)	0,41
PKW (Passat Bj.1983)	0,38
Kugel	0,25 ... 0,43

Tabelle 7.3: Typische Widerstandsbeiwerte

Die genauen Werte hängen von der Oberflächenbeschaffenheit des jeweiligen Körpers ab. Den Fahrer interessiert besonders die aufzuwendende Energie pro Fahrstrecke s:

$$\frac{W}{s} = \frac{F_D \cdot s}{s} = \frac{1}{2} c_w \rho v^2 A$$

Der Betrag der aufzuwendenden Energie steigt also proportional mit v^2 an. Wesentliche Einsparungen setzen die Entwicklung sparsamer Motoren bzw. eine sparsame Fahrweise voraus.

Auftrieb und Widerstandskraft beim Fliegen

Ein umströmter Tragflügel erfährt eine dynamische Auftriebskraft $\vec{F}_A$ mit

$$|\vec{F}_A| = \rho \cdot v \cdot b \cdot A$$

Anders als beim Magnuseffekt kommt Γ nicht durch die Rotation des Körpers zustande, sondern durch Wirbelbildung. Wir setzen zunächst laminare, zähe Strömung um das asymmetrische Profil voraus.

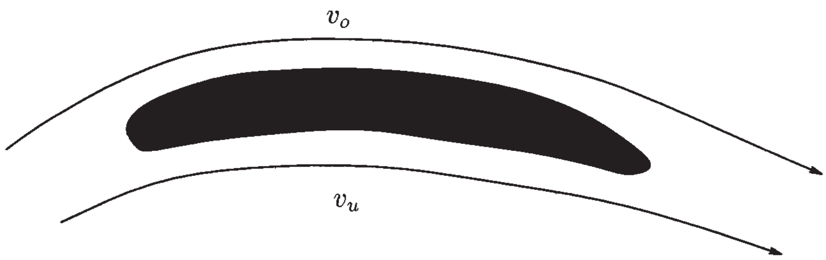

Abbildung 7.13: Zirkulation um einen Tragflügel

Da der Weg oben länger ist, wird die Luft auf diesem Weg stärker abgebremst, als jene die unten fließt. Hinter dem Tragflügel entsteht also ein Geschwindigkeitsgefälle zwischen benachbarten Luftschichten. Übersteigt das Gefälle einen bestimmten Grenzwert, abhängig von η und v, so entsteht ein Wirbel hinter dem Tragflügel. Da der Gesamtdrehimpuls der strömenden Luft erhalten bleiben muss, bildet sich eine Zirkulation Γ um das gesamte Profil aus (mit entgegengesetztem Drehimpuls). Der Wirbel löst sich vom Tragflügel ab, während die Zirkulation erhalten bleibt. Sie ist für die dynamische Auftriebskraft verantwortlich.
Für F_D gilt

$$F_D = c_w \cdot \frac{\rho}{2} v^2 \cdot A$$

Dabei hängt c_w vom Profil und vom Anstellwinkel α ab.
Für F_A liefert Bernoulli

$$F_A = \Delta p \cdot A = c_A \cdot \frac{\rho}{2}(v_O^2 - v_U^2) \cdot A$$

c_A ist der Auftriebsbeiwert. Er hängt ebenfalls von der Form des Profils und α ab. Aus einem Modellversuch erhält man folgende Werte

α[°]	F_A [N]	F_D [N]	F_A/F_D
0	3,5	3,5	1
10	35	4	~ 9
20	57	10	~ 6
30	60	30	2

Kräfte beim motorlosen Flug
Es gibt keinen mechanischen Antrieb. Die für die dynamische Auftriebskraft $\vec{F}_A$ erforderliche Geschwindigkeit $\vec{v}$ muss allein aus der Fallbewegung des Flugzeuges stammen. Das Flugzeug muss sich auf einer abwärts gerichteten Flugbahn bewegen.

Die resultierende Kraft $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_w$ muss $m\vec{g}$ kompensieren.

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= -\frac{|\vec{F}_w|}{mg} \\ \tan\gamma &= \frac{|\vec{F}_w|}{|\vec{F}_A|} \end{aligned}$$

Definition 7.21: Gleitzahl

Das Verhältnis $\frac{F_w}{F_A}$ heißt Gleitzahl.

Um ein möglichst kleines γ zu erhalten, muss F_A möglichst groß werden. Da F_A aber nicht beliebig vergrößert werden kann, muss mg möglichst klein gehalten werden.
Durch Thermik erhält die Strömungsgeschwindigkeit eine zusätzliche vertikale Komponente (statischer Auftrieb) und das Flugzeug kann steigen.

Motorflug

Durch den Antrieb erhält man eine zusätzliche Schub-/Zugkraft $\vec{F}_z$. Damit ist ein Steigflug möglich.

7.4 Transporterscheinungen

7.4.1 Einführung

Moleküle, Atome sowie Ladungsträger sind in ständiger thermischer Bewegung. Besteht eine räumliche Asymmetrie wie Konzentrationsgefälle, Temperaturgefälle etc. so entstehen Ströme von Teilchen, Energie etc, die so gerichtet sind, dass das betreffende Gefälle abgebaut wird. Man spricht von irreversiblen Ausgleichsvorgängen. Dazu zählen

- Diffusion

  Transport von Teilchen. Ursache ist ein Konzentrationsgefälle.

- Wärmeleitung

  Transport von Energie. Ursache ist ein Temperaturgefälle.

- Innere Reibung (Viskosität)

  Transport von Impuls. Ursache ist ein Geschwindigkeitsgefälle.

Eine wichtige Größe ist dann offenbar der Weg, der im Mittel von einem Teilchen des Ensembles zwischen zwei Stößen, in denen ein Austauschprozess passiert, zurückgelegt wird.

Definition 7.22: MITTLERE FREIE WEGLÄNGE

> *Der Weg eines Teilchens zwischen zwei Stößen heißt mittlere freie Weglänge λ.*

7.4.2 Mittlere freie Weglänge

Wir lassen ein Molekül mit Radius r_1 durch ein Gas mit Teilchen (Radius r_2) laufen. Wenn die Gasmoleküle praktisch ruhen, so findet ein Stoß statt, wenn die Teilchenmittelpunkte von stoßendem und gestoßenem Teilchen weniger als $r_1 + r_2$ voneinander entfernt sind. Der „Stoßquerschnitt“ $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$. Wenn ein Weg x zurückgelegt wird, so überstreicht der Stoßquerschnitt einen Kanal von Volumen $\sigma \cdot x$. Ein Stoß tritt ein, wenn in diesem Kanal ein Teilchenmittelpunkt liegt. Bei einer Teilchenzahldichte n liegen im Volumen $\sigma \cdot x$ gerade $n \cdot \sigma \cdot x$ Teilchen. Wenn $n \cdot \sigma \cdot x = 1$ wird, so tritt im Mittel auf der Strecke x gerade ein Stoß auf., d.h. x ist dann die freie Weglänge λ.

$$\begin{aligned} n \cdot \sigma \cdot \lambda &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{n \cdot \sigma} \end{aligned}$$

Wenn die Gasteilchen sich mit etwa derselben Geschwindigkeit wie das stossende Teilchen bewegen, so kommen etwas häufiger Stöße vor, d.h. λ wird kleiner. Offenbar ist

$$x = v_r \cdot t$$

mit $\vec{v}_r = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ wird

$$\begin{aligned} \bar{v_r^2} &= \bar{\vec{v}_1^2} + \bar{\vec{v}_2^2}(+\underbrace{2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}_{\equiv 0}) \\ \Rightarrow \bar{v_r^2} &\simeq 2\bar{v_1^2} \qquad \text{sofern} \qquad \bar{v_1} \simeq \bar{v_2} \simeq \bar{v} \end{aligned}$$

Wir ersetzen $\bar{v_r^2}, \bar{v^2}$ durch näherungsweise $\bar{v}^2, \bar{v_r}^2$ und erhalten

$$\bar{v} \approx \sqrt{2} \cdot \bar{v}$$

Die Stoßzahl ist proportional zu $\bar{v_r}$. Die freie Weglänge wird also um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma}$$

7.4.3 Diffusion

Definition 7.23: DIFFUSION

> *Als Diffusion bezeichnet man den gerichteten Transport von Teilchen in Materie.*

Wir versuchen, die Größe die transportiert wird, hier Masse, in Zusammenhang mit jener zu bringen, die die Diffusion verursacht, das Konzentrationsgefälle. Wir verknüpfen also die Diffusionsstromdichte j (Teilchen s^{-1} m^{-2}) mit dem Konzentrationsgefälle (Dichteunterschied) $\frac{dn}{dt}$.

1. Fick'sches Gesetz

$$j = -D \cdot \frac{dn}{dx} \tag{7.10}$$

D heißt Diffusionskoeffizient (m^2 s^{-1}). Das Minuszeichen bedeutet, dass der Transport von Orten hoher zu Orten niedriger Dichte stattfindet. D nimmt mit wachsender Temperatur zu, da die Bewegung der Moleküle schneller wird. D ist für leichte Moleküle bei vorgegebenem T größer, da sich leichte Partikel schneller bewegen. Außerdem ist die Diffusion in Flüssigkeiten langsamer als in Gasen, weil die freie Weglänge aufgrund der größeren Packungsdichte in Flüssigkeiten kleiner ist.

Herleitung des 1. Fick'schen Gesetz für Gase

Wir betrachten die Stromdichten j_l und j_r durch eine Fläche A im Gasvolumen. Im Mittel fliegen $N/6$ der Moleküle in die Richtungen $\pm x, \pm y, \pm z$. Wir vergleichen die Ströme von links bzw. von rechts durch A und denken daran, dass wir ein Dichtegefälle in x-Richtung vorliegen haben. Für j_l ergibt sich offenbar ($j = \frac{1}{6}n(x)\bar{v}$)

$$j_l = \frac{1}{6}(n(x_0) - \frac{dn}{dx}|_{x_0} \cdot \overline{\Delta x}) \cdot \bar{v}$$

Wir haben die Vorstellung, dass jene Teilchen, die sich im Mittel mit $\bar{v}$ in x-Richtung nach rechts bewegen, aus der Gegend $x_0 - \overline{\Delta x}$ stammen, wobei offenbar $\overline{\Delta x}$ die freie Weglänge ist. Entsprechend gilt

$$j_r = \frac{1}{6}(n(x_0) + \frac{dn}{dx}|_{x_0} \cdot \overline{\Delta x}) \cdot \bar{v}$$

Der Nettostrom der Diffusion, j_D, ist

$$\begin{aligned} j_D = (j_l - j_r) &= -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{dn}{dx}|_{x_0} \cdot \lambda \cdot \bar{v} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{dn}{dx}|_{x_0} \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

d.h.

$$D = \frac{1}{3}\lambda \cdot \bar{v}$$

Wir haben das 1. Fick'sche Gesetz begründet und einen Ausdruck für D erhalten. Wir setzen nun ein:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n\sigma} \\ \bar{v} &\sim \sqrt{\frac{3kT}{m}} \\ p &= nkT \end{aligned}$$

und erhalten

$$D = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sigma p} \cdot \sqrt{\frac{(kT)^3}{m}}$$

Damit finden wir

- für $p =$ konstant: $D \propto T^{\frac{3}{2}}$
- für $T =$ konstant: $D \propto \frac{1}{p}$

- leichte Moleküle diffundieren schneller wegen $D \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$

Aggregatszustand	D [m^2/s]
Gase	10^{-5}
Flüssigkeiten	10^{-10}
Feststoffe	10^{-20}

7.4.4 Wärmeleitung

Wir verknüpfen hier die Wärmestromdichte j_W mit dem Temperaturgefälle $\frac{dT}{dx}$ in Richtung des Wärmetransportes. Analog zum 1. Fick'schen Geetz wird geschrieben

$$j_W = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Das Vorzeichen sagt wieder aus, dass der Transport von höheren zu niedrigeren Temperaturen erfolgt.

Definition 7.24: WÄRMELEITFÄHIGKEIT

λ heißt Wärmeleitfähigkeit. Einheit $W\ m^{-1}\ K^{-1}$

Bei der Wärmeleitung transportiert jedes Molekül im Mittel die Wärmemenge $\frac{f}{2}kT$ (f = Zahl der Freiheitsgrade).
Die Wärmeströme durch die Fläche A bei x_0 sind dementsprechend:

$$\begin{aligned} j_l &= \frac{1}{6}(n(x_0) - \frac{dn}{dx}\bar{x}) \cdot (v - \frac{dv}{dx}\bar{x}) \cdot \frac{f}{2}kT(x_0 - \bar{x}) \\ j_r &= \frac{1}{6}(n(x_0) + \frac{dn}{dx}\bar{x}) \cdot (v + \frac{dv}{dx}\bar{x}) \cdot \frac{f}{2}kT(x_0 + \bar{x}) \end{aligned}$$

wobei $\bar{x}$ jener Bereich ist, aus dem die transportierte Energie stammt, also die freie Weglänge. Für den Nettostrom erhalten wir

$$j_W = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \frac{f}{2} \cdot k \cdot \bar{v} \cdot \lambda \frac{dT}{dx}$$

so dass wir für λ_W erhalten

$$\lambda_W = \frac{f}{12} \cdot n \cdot k \cdot \bar{v} \cdot \lambda$$

Setzen wir nun wieder für die freie Weglänge ein

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot \sigma} \\ \Rightarrow \lambda_W &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sigma} \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

Offenbar ist λ_W unabhängig von der Teilchendichte n, d.h. unabhängig vom Gasdruck (gilt nicht mehr, wenn die freie Weglänge in den Bereich der Gefäßdimensionen kommt). Da $\bar{v}$ von T abhängt, steigt λ_W mit wachsender Temperatur an.

Material	Wärmeleitfähigkeit [W K^{-1} m^{-1}]
Ag	427
Cu	398
Al	237
Fe	80
Edelstahl	14,6
H_2O	0,6
Luft	0,025

Wir betrachten im Speziellen die Metalle. Dort sind die Elektronen frei beweglich und führen eine Brown'sche Bewegung aus, die den Energietransport liefert.

Wiedemann-Franz'sches Gesetz

Gute Stromleiter (= effektiver Ladungstransport) sind auch gute Wärmeleiter (= effektiver Energietransport)

Die Wärmeleitfähigkeit λ und die elektrische Leitfähigkeit σ sind einander proportional

$$\frac{\lambda}{\sigma} = K(T)$$

K(T) ist eine Funktion von T, da die kinetische Energie der Elektronen von T abhängt.

7.4.5 Innere Reibung: Viskosität

Die molekularkinetische Deutung der inneren Reibung in strömenden Flüssigkeiten ist Impulstransport quer zur Strömungsrichtung. Anschaulich tauschen benachbarte, mit unterschiedlicher Geschwindigkeit $\vec{u}$ sich bewegende Fluidschichten Moleküle aus. Dadurch wird der Geschwindigkeitsgradient abgebaut. Zur Aufrechterhaltung von $\frac{du}{dz}$ ist eine Schubspannung $\tau = \frac{F}{A}$ (lt. Newton'schem Reibungsansatz) notwendig.
Wir wollen nun die innere Reibung mikroskopisch behandeln:
Wir betrachten die Impulsstromdichten durch eine Fläche A, senkrecht zu $\vec{u}$.

$$\vec{j} = \frac{1}{6} n\vec{\bar{v}} \cdot m \cdot u(z) = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{1}{A}$$

Mit der freien Weglänge $\bar{z}$ und dem transportierten Impuls aus jenem Bereich der die Fläche A kreuzt

$$p = m(u(z_0) + \frac{du}{dz}|_{z_0} \cdot \bar{z})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} j_{+z} &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot (u(z_0) + \frac{du}{dz}|_{z_0} \cdot \bar{z}) \\ j_{-z} &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot (u(z_0) - \frac{du}{dz}|_{z_0} \cdot \bar{z}) \end{aligned}$$

Die Nettostromdichte ist

$$j_V = -\frac{1}{3} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot \lambda \cdot \frac{du}{dz}$$

und für die Zähigkeit erhalten wir

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot \lambda$$

Wir haben somit den Newton'schen Reibungsansatz für Gase begründet und die Zähigkeit η berechnet. Substituiren wir wieder λ, lässt sich η darstellen als

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\bar{v}m}{\sigma}$$

d.h. η ist unabhängig vom Gasdruck.
λ_W und η hängen von denselben Konstanten ab:

$$\frac{\lambda_W}{\eta} = \frac{c_V}{M}$$

Offenbar ist j_V die Impulsstromdichte. In z-Richtung gilt also

$$j_V = \frac{1}{A}\frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dt}(m \cdot |\vec{u}|)$$

Nach der Grundgleichung der Dynamik ist

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= F_x \\ \Rightarrow \frac{1}{A} \cdot \frac{dp_x}{dt} &= \frac{F_x}{A} \end{aligned}$$

Die Kraft, die benötigt wird um $\frac{du}{dz}$ aufrecht zu erhalten, ist also

$$F_x = \eta \cdot \frac{du}{dz} \cdot A$$

Wärmetransport durch Konvektion

Strömungsvorgäge werden auch durch lokal vorhandene Temperatur- und damit Dichteunterschiede in Gang gesetzt. Z.B. Auftrieb wärmerer Bereiche oder sehr komplizierte Strömungsfelder mit erstaunlicher Regelmäßigkeit (Bénard-Zellen). Will man Konvektion weitgehend unterdrücken, muss man vorhandene Hohlräume möglichst klein halten.

7.5 Elektrischer Gleichstrom

7.5.1 Strom und Widerstand

Charakeristisch für eine ruhende Ladung ist ihr elektrisches Feld $\vec{E}$, welches auf eine Probeladung q eine Kraft

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

ausübt. Bewegte Ladungen zeigen dagegen zusätzliche Wirkungen:

- Ein vom Strom durchflossener Leiter erwärmt sich.
- In der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters wird eine Magnetnadel abgelenkt - wie durch einen Stabmagneten. Ein Strom ist also von einem Magnetfeld umgeben.
- Zwischen stromführenden Leitern existieren Kräfte. Anschaulich wird dies durch die Magnetfelder, die um die beiden Leiter hervorgerufen werden.
- Bei Gasentladungen wird elektrische Energie in Licht umgewandelt.

Definition 7.25: Elektrischer Strom

Elektrischer Strom ist ein Transport von Ladungen.

Normalerweise versteht man darunter Elektronen, die sich mit kleiner Geschwindigkeit in Metallen vorwärtsbewegen. Ladungsträger sind an Materie gekoppelt.

Exotisches Beispiel: Aufstehen vom Stuhl
Beim Aufstehen von einem Stuhl kann man sich elektrisch aufladen. Wenn man nun so aufgeladen durch das Zimmer geht, so transportiert man diese Ladung. Man stellt also einen Strom dar.

Der Ladungstransport ist leicht möglich in sogenannten Leitern. Diese sind in den allermeisten Fällen Metalle und ihre Legierungen. Die Elektronen des Metalls (bestehend aus Ionenrümpfen und Elektronengas) sind leicht verschiebbar. Der Ladungstransport ist dagegen schwer möglich, wenn kein Elektronengas vorhanden ist, sondern die Elektronen an bestimmten Gitterplätzen fest gebunden sind. Solche Stoffe heißen Isolatoren. Beispiele sind Glas, Kunststoff, bestimmte Keramiken und Holz.

Definition 7.26: Elektrischer Strom

Der Strom I ist die Ladungsmenge ΔQ, die im Zeitintervall Δt durch eine vorgegebene Leiterquerschnittsfläche A fließt:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t)$$

Die Gesamtladung Q, die zwischen t_1 und t_2 durch A hindurchgeflossen ist, beträgt dann

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

Der Nachteil bei der Definition des Stromes besteht darin, dass er von der Größe und der Orientierung der Fläche A abhängt. Deshalb führt man die Stromdichte j ein.

Definition 7.27: STROMDICHTE

Die elektrische Stromdichte ist definiert durch

$$\vec{j} = \frac{dI}{dA} \cdot \hat{v}$$

Dabei ist $\hat{v}$ der Einheitsvektor in Richtung des Stroms. Man kann (analog der Strömungsmechanik) die Stromdichte durch die Ladungsträgerdichte ρ_{el} und die Ladungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ ausdrücken:

$$\vec{j} = \rho_{el} \cdot \vec{v} = q \cdot n \cdot \vec{v}$$

Dabei ist q die Größe der einzelnen Ladung und n die Ladungsträgerdichte, d.h. die Zahl der Ladungen pro Volumen.

Definition 7.28: STROMRICHTUNG

Der Strom hat die Richtung von $\vec{v}$, wenn die Ladung q positiv ist. Sonst ist $\vec{j}$ entgegengesetzt gerichtet.

Ein Vergleich mit den Strömungen in Fluiden ergibt, dass der Volumenstrom dort von der Druckdifferenz aufrechterhalten wird. Analog wird dies für den elektrischen Strom von der Potentialdifferenz, der Spannung, übernommen. Wir kommen nun zum Begriff des elektrischen Widerstandes. Er entspricht dem Strömungswiderstand R beim Massenstrom. Um einen Ladungsstrom konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ aufrecht zu erhalten, muss offenbar Beschleunigungsarbeit verrichtet werden. Man muss daher an den Leiter eine Spannung U anlegen. Wir berechnen nun die Arbeit W_{el}, die an den Elektronen beim Durchlaufen von U verrichtet wird. W_{el} ist pro Ladungsträger

$$W_{el} = q \cdot U$$

Für mehrere (N) Ladungsträger gilt, wenn Q die Gesamtladung ist

$$W_{el} = N \cdot q \cdot U = Q \cdot U = \mathrm{U} \cdot I \cdot t$$

Die elektrische Leistung ist dann wegen

$$P_{el} = \frac{dW_{el}}{dt} = U \cdot I$$

Aus der Einheit der Energie 1 J folgt für die Leistung 1 J/s = 1 W. Die Einheit der Spannung ist das Volt (1 V), so dass gilt: W = V · A.
Für metallische Leiter gilt im allgemeinen ein linearer Zusammenhang zwischen I und U. Je größer die angelegte Spannung U ist, desto größer ist der fließende Strom. Dieser Zusammenhang trägt den Namen

Ohm'sches Gesetz

$$U = R \cdot I \tag{7.11}$$

Definition 7.29: ELEKTRISCHER WIDERSTAND

Die in Gleichung (7.11) auftretende Proportionalitätskonstante R heißt elektrischer Widerstand. SI-Einheit 1 Ω (Ohm).

Für einen homogenen, zylindrischen Leiter ist offenbar der Widerstand proportional zur Länge des Leiters und zu einem Querschnitt. Es ergibt sich folgender Zusammenhang

$$R = \rho_{el} \frac{l}{A} \tag{7.12}$$

In diesem Zusammenhang ist der Proportionalitätsfaktor ρ_{el} <u>keine</u> Ladungsträgerdichte, sondern der spezifische Widerstand.

Definition 7.30: SPEZIFISCHER WIDERSTAND

ρ_{el} heißt spezifischer Widerstand und ist eine Materialkonstante.

Es stellt sich die Frage, wie man R erhält. Die Antwort ist, dass man eine Strom-Spannungscharakteristik $I(U)$ aufnimmt. Dazu wird für jeden Spannungswert U der zugehörige Strom I gesucht und $R = U/I$ ausgerechnet. Man stellt schließlich fest, dass R von U abhängt. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass der Widerstand sich erwärmt und R von T abhängt, weil die Bewegung der Elektronen mit wachsender Temperatur stärker wird.

Definition 7.31: DIFFERENTIELLER WIDERSTAND

Die Steigung der I(U)-Kurve liefert den differentiellen Widerstand

$$R_{diff} = \frac{dU}{dI}$$

Spricht man allgemein vom Widerstand, so meint man stets den statistischen Widerstand nach dem Ohm'schen Gesetz.
Der Widerstand des menschlichen Körpers hängt von der Konstitution und vom Übergangswiderstand der Haut ab. Er nimmt mit wachsender Spannung ab.

Stromschädigungen können bei Strömen $\geq 20\,\mathrm{mA}$ auftreten. Auch können keine größeren Spannungen am Menschen eingestellt werden.

7.5.2 Elektrische Schaltungen

Der einfachste Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle und einem Voltmeter zur Spannungsmessung (siehe Abbildung 7.14). Ein Strich ist dabei ein elektrischer Leiter.

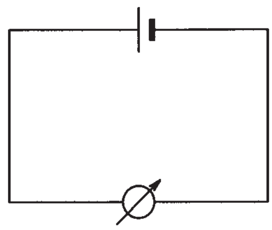

Abbildung 7.14: Einfachster Stromkreis

Generell werden die von uns benötigten elektrischen Bauelemente durch ein Symbol aus Abbildung 7.15 dargestellt.

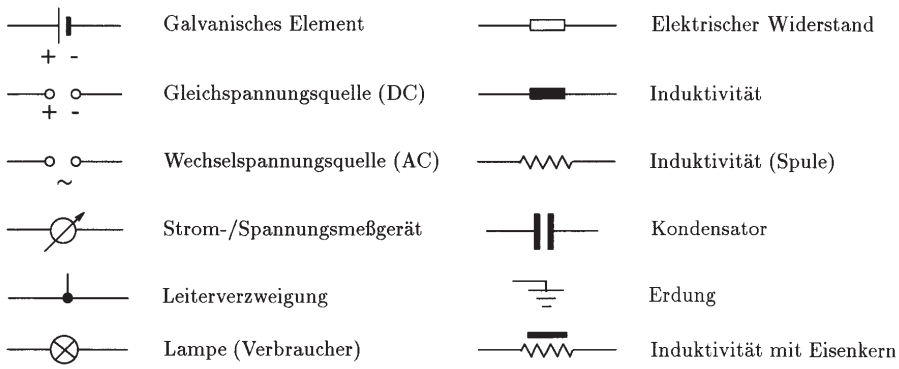

Abbildung 7.15: Elektrische Bauelemente

Bei einem Strom- oder Spannungsmessgerät erkennt man aus der Schaltung, um welches Gerät es sich handelt. Man kann identisch gebaute Geräte für beide Messungen verwenden. Weitere häufig vorkommende Symbole sind die Leiterverzweigung, die mit einem Punkt gekennzeichnet wird, der elektrische Widerstand (offenes Rechteck), Kondensator (zwei symbolisierte Kondensatorplatten) und die Induktivität (gefülltes Rechteck). Die beiden letzten Bauelemente werden in späteren Kapiteln ausführlich behandelt. Der Begriff „Erde“ oder „Erdung“ bedeutet, dass man alle Körper, die sich aufladen können, durch eine metallische Leitung miteinander und mit der Umgebung verbindet (z.B. mit der Wasserleitung oder der Heizung). Anschaulich kann man sich die Situation an einem Widerstand so vorstellen, als würden sich dort die Elektronen stauen, zu einer

Ladungsanhäufung führen und somit den Spnnungsunterschied zwischen den Widerstandsenden hervorrufen („Spannungsabfall“).

Beispiel für eine Schaltung mit Strom- und Spannungsmessung

Eine Taschenlampenbatterie betreibt eine Glühbirne. Der Strom der Elektronen versucht, das Ladungsungleichgewicht zwischen den Klemmen auszugleichen. Dazu müssen sich die Elektronen durch die Heizwendel der Glühbirne „hindurchquetschen“. Dabei wird Wärme aus elektrischer Energie erzeugt. Die Folge ist, dass sich die Wendel bis zum Glühen aufheizt. In Abbildung 7.16 ist die Schaltung mit einer Spannungsmessung bzw. mit Strom- und Spannungsmessung zu sehen.

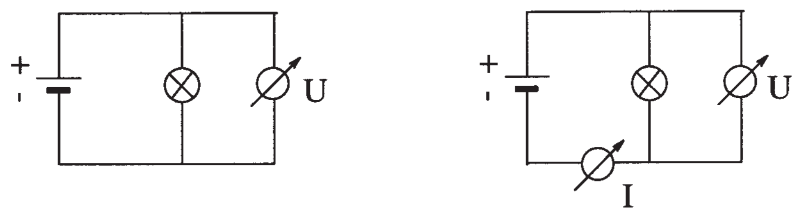

Abbildung 7.16: Stromkreis mit einer Glühlampe

7.5.3 Elektrische Spannungsquellen

Wir stellen die Frage, unter welchen Bedingungen sich Ladungen bewegen, d.h. ein Strom fließt. Es ist eine experimentelle Erfahrung, dass man einen Leiter mit einer Spannungsquelle verbinden muss, damit die Ladungsträger in Bewegung geraten. Die Elektronen des Leiters erfahren eine elektrische Kraft F_{el}, denn sonst würden sie sich nicht bewegen. Mit anderen Worten: Die Ladungen befinden sich in einem elektrischen Feld $\vec{E}$.

Definition 7.32: ELEKTRISCHES FELD

Das elektrische Feld ist definiert durch

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

In Worten: Die Kraft F_{el} bezogen auf die Größe der Probeladung q, wird elektrisches Feld genannt. Das elektrische Feld ändert sich nicht über den Bereich von q. Das elektrische Feld ist im gewissen Sinne mit dem Gravitationsfeld zu vergleichen.
Es stellt sich die Frage nach der Ursache für $\vec{F}_{el}$. Diese Kraft wird durch nicht kompensierte Ladungen hervorgerufen. Wir schließen daher: Zwischen den Polen der Spannungsquelle besteht ein Ladungsungleichgewicht. Genauer muss die

Spannung der „Spannungsquelle“ durch eine Ladungsanhäufung erzeugt werden, denn eine ungleichmäßige Ladungsverteilung bedeutet elektrische Kräfte, somit auch ein elektrisches Feld, eine Beschleunigung von q und damit einen Stromfluss. Die Spannung ist ein Maß für die Größe von Ladungsanhäufung zwischen den Enden des Leiters. Beispiele für Spannungsquellen sind die Taschenlampenbatterie, die Steckdose und das Thermoelement.

Wirkungsweise einer Spannungsquelle

1. Galvanisches Element:
Ein galvanisches Element besteht aus zwei Stäben verschiedener Metalle, die z.B. in Schwefelsäure eingetaucht sind. Verschiedene Metalle haben ein unterschiedliches Bestreben aufgrund der Adhäsionskräfte zwischen Metall- und Flüssigkeitsmolekülen in Lösung zu gehen. Dabei treten die Metallatome als Ionen in die Flüssigkeit über. Die Elektronen bleiben im Metall zurück.

Definition 7.33: ION

> *Ein Atom, welches nicht neutral ist, da zur Kompensation der Kernladung entweder Elektronen fehlen (positives Ion, Kation) oder zuviele vorhanden sind (negatives Ion, Anion).*

Gehen nun bei z.B. Zink (Zn) mehr Ionen in Lösung als bei z.B. Kupfer (Cu), so lädt sich das Zink gegen das Kupfer negativ auf. Wir haben ein Ladungsungleichgewicht, denn in der Zinkelektrode häufen sich negative Ladungen (verglichen mit Kupfer) an. Zwischen den beiden Elektroden besteht folglich eine Spannung U. Verbinden wir die beiden Metallelektroden, so werden die Elektronen durch den Draht „gepumpt“. Das galvanische Element ist eine Ladungspumpe. Ihre Leistungsfähigkeit hängt davon ab, wieviele Ionen pro Zeit in Lösung gehen. Der Elektronenstrom lässt sich konstant aufrecht erhalten, denn wenn sich der Unterschied in der Ladungsdichte ausgleichen kann gehen dauernd weitere Ionen in Lösung. Gelangen nun Zinkionen zur Kupferelektrode, so nehmen sie zwei Elektronen auf, und scheiden sich als metallisches Zink auf der Kupferelektrode ab.

2. Erzeugung hoher Spannungen (Bandgenerator)
Besonders hohe Spannungen werden durch einen Bandgenerator nach van-de-Graaff erzeugt, wie er in Abbildung 7.17 zu sehen ist.
Im Punkt P werden von der Kugel L stammende Ladungen auf das rotierende Band aufgebracht. Im Punkt Q werden diese Ladungen vom Band an die Kugel K abgegeben. Auf diese Art und Weise entsteht zwischen L und K durch Ladungstrennung eine hohe Spannung ($\sim 10^6$ V).

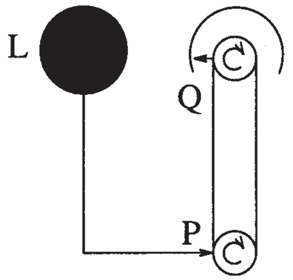

Abbildung 7.17: Bandgenerator nach Van-de-Graaff

7.5.4 Elektrische Netzwerke

1. Kirchhoff'sche-Regel (Knotenregel)

Da Ströme bewegte Ladungen darstellen, können sie aufgrund der Ladungserhaltung nicht einfach verschwinden. Sie können sich nur in beliebig viele andere Ströme aufteilen. Wir betrachten einen Schaltungspunkt, in dem mehrere Leiter zusammen kommen. Dabei sollen hineinfließende Ströme ein positives und herausfließende Ströme ein negatives Vorzeichen haben. Es gilt die

1. Kirchhoff'sche-Regel

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \tag{7.13}$$

In einem Knotenpunkt ist die Summe der einfließenden Ströme gleich der Summe der herausfließenden.

2. Kirchhoff'sche-Regel (Maschenregel)

Kein Punkt einer Schaltung kann gegen sich selbst eine Spannung haben, d.h. ein Unterschied in der Ladungsverteilung (Ladungsungleichgewicht) kann nur zwischen zwei verschiedenen Punkten bestehen. Wir betrachten einen geschlossenen Schaltungsteil („Masche“). Sie kann Widerstände, Spannungsquellen und andere Bauelemente, die wir später kennenlernen werden, enthalten. Spannungsabfälle treten auf, wenn durch Widerstände Strom fließt. Die Summe der Spannungen in einem geschlossenen Stromkreis, den man in einer festen Richtung durchläuft, liefert also Null. Dies ist die

2. Kirchhoff'sche-Regel

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0 \qquad (7.14)$$

Die Summe der Spannungen in einem geschlossenen Stromkreis, den man in einer festen Richtung durchläuft, ist Null.

Die beiden Kirchhoffschen Regeln finden Anwendung bei der Parallel- und Serienschaltung von Widerständen.
Parallelschaltung:
Drei Widerstände seien parallel in einem Stromkreis eingebaut (Abbildung 7.18).

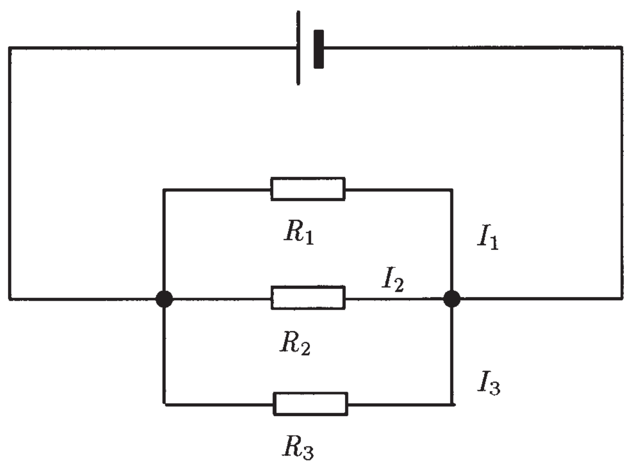

Abbildung 7.18: Parallelschaltung von drei Widerständen

Aufgrund der Ladungserhaltung und somit wegen der Knotenregel gilt folgender Zusammenhang

$$I_1 + I_2 + I_3 - I = 0$$

Jeder „Verbraucher" lässt einen bestimmten Strom I_i zu, der aus dem Ohmschen Gesetz folgt, weil U denselben Wert für alle Verbraucher hat. Somit ist

$$I = \sum_i I_i = U \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{ges}}$$

Definition 7.34: Leitwert

> *Der Kehrwert eines Widerstandes $G = \frac{1}{R}$ wird Leitwert genannt.*
> *Die SI-Einheit des Leitwertes ist $1\,A/V = 1\,\Omega^{-1} = 1\,S$ (Siemens).*

Es ergibt sich daher als Gleichung für den Gesamtwiderstand R_{ges} bzw. den Gesamtleitwert

Gesamtleitwert der Parllelschaltung

$$G_{ges} = \frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \qquad (7.15)$$

Bei der Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Kehrwerte der Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes. Anders ausgedrückt kann man sagen, in einer Parallelschaltung addieren sich die Einzelleitwerte zum Gesamtleitwert.
Serienschaltung:
Drei Widerstände werden gemäß der Abbildung 7.19 hintereinander in einen Stromkreis eingebaut.

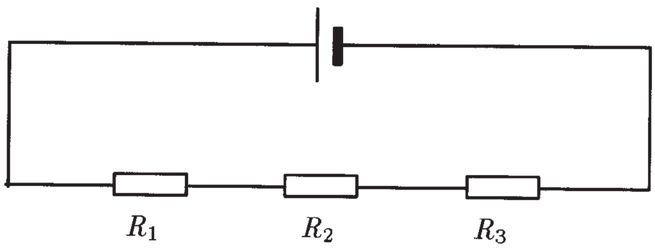

Abbildung 7.19: Serienschaltung von drei Widerständen

Der Strom I muss nun durch alle Verbraucher fließen. Er kann sich nicht aufteilen oder stauen. An jedem Verbraucher R_i tritt ein Spannungsabfall $U_i = R_i \cdot I$ auf. Die Summe aller Spannungsabfälle muss nach der zweiten Kirchhoff'schen Regel die Gesamtspannung U ergeben:

$$U = \sum_{i=1}^{3} U_i = I \cdot \sum_{i=1}^{3} R_i = I \cdot R_{ges}$$

Es ergibt sich als

Gesamtwiderstand der Serienschaltung

$$R_{ges} = \sum_i R_i \tag{7.16}$$

Bei der Serienschaltung addieren sich die Einzelwiderstände zum Gesamtwiderstand.

Spannungsteiler

Wir stellen die Frage, wie man sich eine gewünschte Spannung verschaffen kann. Die Spannung die über einen Metalldraht abfällt, ist proportional zu dessen Länge l (Gleichung (7.12)). Betrachten wir nun eine typische Spannungsteilerschaltung (Abbildung 7.20).

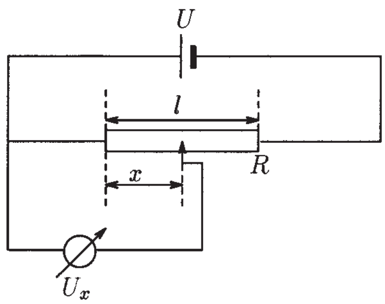

Abbildung 7.20: Spannungsteiler

Ist die Länge x der Teil des Drahts, über dem die Spannung abgegriffen wird, so unterteilt der Abgriff den Widerstand R im Verhältnis $x : l$, denn es ist nach Gleichung (7.12)

$$\frac{R_x}{R} = \frac{x}{l}$$

Am Abgriff wird also die Spannung $U_x = U \cdot \frac{x}{l}$ abgegriffen. Entlang des Drahtwiderstandes tritt ein linearer Spannungsabfall auf. Allgemein unterteilt der Abgriff den Gesamtwiderstand R in zwei Teilwiderstände R_1 und R_2. Diese stehen im Verhältnis der jeweiligen Drahtlängen. Durch beide Teilwiderstände R_i fließt derselbe Strom I. Es ist also $U_i = R_i \cdot I$ und daher

$$U = (R_1 + R_2) \cdot I$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{U} &= \frac{R_1}{R_1+R_2}\\ \frac{U_2}{U} &= \frac{R_2}{R_1+R_2}\end{aligned}$$

Im folgenden sind ein unbelasteter (Abbildung 7.21)

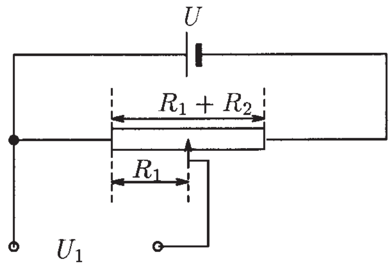

Abbildung 7.21: Unbelasteter Spannungsteiler

und ein belasteter Spannungsteiler (Abbildung 7.22) dargestellt.

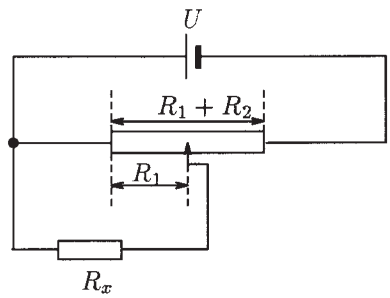

Abbildung 7.22: Belasteter Spannungsteiler

Bei der belasteten Schaltung gilt für U_x an R_x:

$$U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_1+R_2}$$

Damit U_x aber korrekt berechnet werden kann, muss $R_x \gg R_1$ gelten, denn für die Spannungsteilung ist die Serienschaltung aus R_x und R_1 maßgebend. Sie muss bei der Berechnung von U_x verwendet werden.

Kompensationsschaltung

Wir stellen die Behauptung auf, dass mit einer Spannungsquelle bekannter Spannung U, einem Strommeßgerät und einem Spannungsteiler jede unbekannte

Spannung $U_x \leq U$ gemessen werden kann. Eine Schaltung, die dies leisten kann, zeigt Abbildung 7.23.

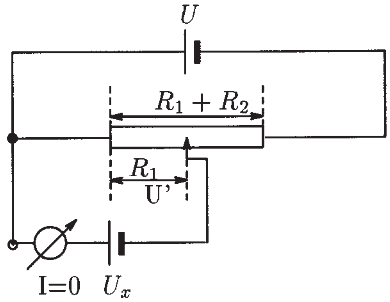

Abbildung 7.23: Kompensationsschaltung

Über R_1 fällt U' ab. R_1 und R_2 werden solange variiert, bis $U' = U_x$ wird. Dann gibt es im Verbraucherstromkreis keine Stromquelle, die Ladungen in Bewegung setzt. Der Strom im Verbraucherstromkreis ist daher Null. Der Strom muss nicht gemessen werden, sondern nur auf Null abgeglichen werden. Dies geschieht durch ein sogenanntes Nullinstrument. Man kann schließen: Wenn $I = 0$ ist, dann muss U' gleich U_x sein. U' kann aus dem Verhältnis der beiden Widerstände R_1 und R_2 bestimmt werden. Die Spannungsquelle mit U_x wird nicht belastet, da $I = 0$ im Verbraucherstromkreis ist. Verwendung findet eine Kompensationsschaltung bei der Wheatstone-Brücke, deren Schaltbild aus Abbildung 7.24 hervorgeht.

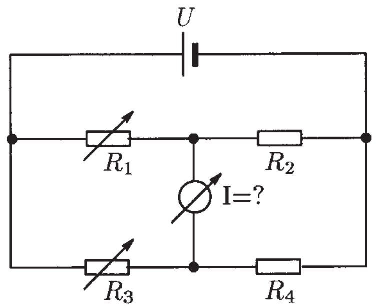

Abbildung 7.24: Wheatstone-Brücke

Es fließt kein Strom durch das Nullinstrument, wenn an beiden Seiten des Nullinstruments die gleiche Spannung anliegt. Die ist der Fall, wenn beide Spannungssteiler die Spannung U im gleichen Verhältnis unterteilen

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Die Wheatstone-Brücke dient zur Bestimmung unbekannter Widerstände. Sei $R_x = R_4$ der unbekannte Widerstand. Dann ist

$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Der Vorteil ist, dass kein kalibriertes Strommeßgerät benötigt wird.
Die Wheatstone-Brücke kann aber auch anderwertig eingesetzt werden. Im Normalfall ist die Brücke nicht abgeglichen, weil $R_x(T)$ eine Funktion eines Parameters, hier der Temperatur, ist. Sei die Brücke zunächst für $T = T_0$ auf Null abgeglichen. Tritt dann eine Temperaturänderung auf, so ändert sich auch R_x. Der Strom durch das Nullinstrument wird ungleich Null. Es ergibt sich so eine Möglichkeit zur Umeichung der Brücke auf (T-T_0)-Werte. Ferner kann die Wheatstone-Brücke in einem Messwandler eingesetzt werden. Dazu wird die Änderung einer anderen physikalischen Größe, z.B. Druckänderung, Längenänderung oder Durchbiegung, in eine Widerstandsänderung umgewandelt. Diese Änderung des Widerstands wird in der Brücke gemessen. Kalibriert man diese Brücke um, so hat man die eingangs erwähnte physikalische Größe einer Messung zugänglich gemacht.

Vergleich Flüssigkeitsströmung - elektrischer Strom

Bei der Flüssigkeit erfahren die Moleküle eine Kraft, die sie in Bewegung hält. Die Kraft rührt von einem Druckunterschied zwischen Ein- und Auslauf her. Der Druckunterschied Δp steht für eine Zusatzkraft per Fläche, durch die der Stromfluss erfolgt. Beim elektrischen Strom hält die elektrische Kraft die Elektronen in Bewegung. Sie rührt von einem Ladungsungleichgewicht zwischen den beiden Enden einer Spannungsquelle (Spannungsunterschied ΔU) her. Die Spannung U entspricht also dem Druck bei einer Flüssigkeitsströmung. In beiden Fällen werden mengenartige Größen bewegt (Masse bzw. Ladung).

Stromwirkung auf den menschlichen Körper

Wichtig für Arbeiten in den Praktika
Die Physiologen haben herausgefunden: Wenn menschliche Zellen in einen Stromkreis geraten, erfolgen chemische Wirkungen des Stroms. Es kann zu Konzentrationsänderungen im Ionenhaushalt und damit zu einer Änderung von Membranspannungen kommen. Dies hat eine Muskelkontraktion zur Folge. Besonders gefährlich ist es, wenn wichtige Organe wie das Herz betroffen sind. Die Stombahn sollte also nie durch den Brustkorb führen. Vorsicht ist also beim Hantieren mit beiden Händen geraten. Zum Schutz gegen Stromschläge sollte man sehr schlecht geerdet sein, also Holzschuhe oder Schuhe mit dicker Sohle tragen. Dann ist nur ein kleiner Stromfluß möglich. Eletroschocks verursachen eine unregelmäßige Kontraktion der Herzkammern. Das sogenannte „Herzflimmern“ wird gerade noch vermieden, wenn für die Schockdauer Δt und den Strom folgender Zusammenhang gilt:

$$I_{max}^2 \leq (0,116)^2 \frac{A^2}{s} \cdot \Delta t$$

Dieser Zusammenhang wurde vor geraumer Zeit aus Tierversuchen ermittelt. Ein Schock von 1 s Dauer ist bei Netzstrom von 116 mA noch nicht gefährlich. Bei 4 s sind aber nur noch 58 mA verträglich. Eine weitere Nebenwirkung des Stroms besteht in einer „Lösungshemmung“: Man kann spannungsführende Teile nicht mehr loslassen. Man weiß, dass Lösungshemmung beispielsweise für 25 mA schon beim Anliegen von 30 V an einem Bauteil auftritt.

7.6 Mechanismen der Stromleitung

7.6.1 Eletronenleitung in Festkörpern - Bändermodell

Die Energiezustände eines Elektrons im Atom sind diskrete Niveaus. Im Festkörper hat ein Elektron die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Gitterbausteinen (Atomen) hin- und herzuspringen. Die Konsequenz ist, dass die Energieniveaus von N_A-Atomen Energiebänder bilden, die häufig nicht mehr voneinander getrennt sind.

Definition 7.35: ELEKTRISCHER LEITER

> *Elektrische Leiter sind Festkörper, bei denen ein Energieband nur teilweise besetzt ist.*

Strom bedeutet, dass Elektronen bei ihrer Bewegung kinetische Energie aufnehmen, und im Energieband in ein höheres Niveau gehoben werden. Dies ist in einem voll besetzten Band nicht möglich.

Definition 7.36: VALENZBAND

> *Das oberste besetzte Band heißt Valenzband.*

Definition 7.37: LEITFÄHIGKEITSBAND

> *Das über dem Valenzband liegende leere bzw. teilweise besetzte Band heißt Leitfähigkeitsband.*

In den einfachsten Metallen kann jedes Atom genau ein Elektron für den Ladungstransport zur Verfügung stellen. Da aber in jedem Orbital zwei Elektronen Platz haben, besetzen die vorhandenen Elektronen bei der Bildung eines Festkörpers nur die Hälfte der vorhandenen Zustände. Das Leitfähigkeitsband ist also halb besetzt.

7.6.2 Stromleitung in Flüssigkeiten

In Flüssigkeiten wandern Ionen, nicht Elektronen.

Definition 7.38: ELEKTROLYT

> *Eine stromleitende Flüssigkeit heißt Elektrolyt.*

Die Ionen entstehen durch die Dissoziation von Salzen, Säuren oder Laugen beim Einbringen in ein Lösungsmittel. (Beispiel: $CuSO_4 \rightarrow Cu^{2+} + SO_4{}^{2-}$) Beim Anlegen eines elektrischen Feldes wandern die positiv geladenen Ionen zur Kathode und die negativ geladenen zur Anode. Neutralisation führt zur Abscheidung von Cu an der Kathode. An der Anode entsteht O_2-Gas. Bei der Dissoziation schieben sich H_2O-Moleküle zwischen die Ionen und hüllen sie ein. Man sagt, die Ionen werden hydratisiert, d.h. von einer Hülle aus Wasser-Dipolen umgeben. Für die Dissoziation ist die Energie W_D notwendig. Jedoch wird bei der Anlagerung von H_2O-Molekülen Energie frei.

$$\begin{aligned} CuSO_4 &\overset{+W_D}{\rightarrow} Cu^{2+} + SO_4{}^{2-} \\ Cu^{2+} + n\ H_2O &\overset{-W_1}{\rightarrow} [Cu{\cdot}nH_2O]^{2+} \\ SO_2{}^{2-} + n\ H_2O &\overset{-W_2}{\rightarrow} [SO_4{\cdot}nH_2O]^{2-} \end{aligned}$$

Immer wenn

$$|W_1 + W_2| > W_D$$

erfolgt die Dissoziation spontan.

Leitfähigkeit und Widerstand von Elektrolyten

Der Innenwiderstand fällt zunächst mit zunehmender Konzentration der Elektrolyt-Moleküle. Mit weiter zunehmender Konzentration nimmt er aber wieder zu, weil der mittlere Abstand der gelösten Ionen abnimmt. Zur Trennung der Ionenpaare muss mehr Arbeit gegen ihre Coulomb-Anziehung verrichtet werden. Der Widerstand nimmt mit wachsender Temperatur ab. Zum einen nimmt die kinetische Energie der Ionen zu und es ist somit weniger zusätzlich elektrische Energie zu ihrer Trennung nötig. Zum anderen nimmt die Viskosität des Lösungsmittels ab.

Ladungs-Massen-Bilanz

Ein Mol Z-fach geladene Ionen transportieren die Ladung

$$Q = N_A \cdot Z \cdot e = F \cdot Z$$

Definition 7.39: FARADAY-KONSTANTE

$$F = e \cdot N_A = 96485,309\,C \tag{7.17}$$

heißt Faraday-Konstante.

Man kann aus der Menge des transportierten Cu, das abgeschieden wird und durch die Messung des fließenden Stroms I die Elementarladung e (bzw. N_A) bestimmen.

7.6.3 Elektronische Leitung im Vakuum und in Gasen

Ströme im Vakuum

Ideales Vakuum ist ein idealer Isolator. Es müssen Ladungsträger in das Vakuum eingebracht werden, damit Strom fließt.
Der Metall-Glühfaden dient als Kathode und wird durch Anlegen einer Spannung angeheizt wodurch Elektronen austreten.

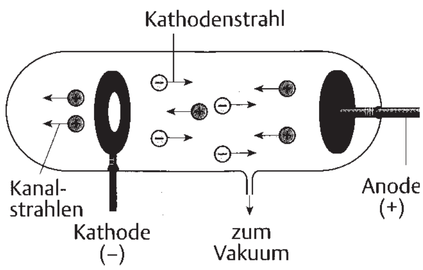

Abbildung 7.25: Aufbau der Kathodenröhre

An der Anode werden, durch eine positive Spannung, die von der Kathode erzeugten Elektronen beschleunigt und auf die Energie

$$e \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

gebracht.
Wenn alle produzierten Elektronen zur Anode gelangen, fließt der Sättigungsstrom.
Um Elektronen aus der Kathode austreten zu lassen, muss die Austrittsarbeit W_A aufgebracht werden. Dazu wird die Kathode geheizt. W_A stammt aus der kinetischen Energie der Metallelektronen und beträgt im Mittel

$$W_{therm}(T) = \frac{3}{2} kT$$

Die Zahl der Elektronen, die eine kinetische Energie von mindestens W_A aufbringen, ist proportional zum Boltzmann-Faktor. Die Emissionstromdichte j_e ist durch die Richardson-Gleichung gegeben.

$$j_e = A_R \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{W_A}{kT}} \tag{7.18}$$

W_A [eV]	A_R	j_e	T
4,5	60	1,0	4000
1,0	0,01	0,3	5000

Tabelle 7.4: Typische Zahlenwerte in der Richardson-Gleichung

Andere Mechanismen, die zur e^--Emission führen

- Feldemission:

  W_A wird durch die Energie des elektrischen Feldes aufgebracht. Erforderliche Feldstärke 10^9 V/m

- Photoemission:

  Sichtbares und UV-Licht kann aus Metallen mit hinreichend kleinem W_A Elektronen ablösen.

- Sekundärelektronenemission:

  Elektronen (auch Ionen) mit ausreichender kinetischer Energie können Elektronen aus Oberflächen schlagen.

Elektrische Leitung in Gasen

Gase sind Nichtleiter, da sie neutrale Moleküle sind. Aus den Molekülen müssen erst durch Stoßionisation Ionen-Elektronen-Paare erzeugt werden. Dies geschieht durch Elektronenstoß, Ionenstoß, Photoionisation etc. In jedem Fall muss die Ionisationsenergie von etwa 10 eVaufgebracht werden. Nehmen die Bruchstücke im elektrischen Feld viel kinetische Energie auf, so können sie selbst wieder ionisieren.

Gasentladungen

Definition 7.40: GASENTLADUNG

> *Eine Gasentladung ist eine Anordnung, die ein teilweise ionisiertes Gas enthält.*

1. Unselbständige Entladung

   Schaltplan siehe Vakuumröhre. Wir nehmen die Strom-Spannungscharakteristik $I(U)$ auf und vergleichen für die evakuirte Entladungsröhre. Mit Gas verläuft die Kurve anfangs steiler. Durch die Stoßionisation werden Ionen vor der Kathode gebildet. Sie verhindern, dass sich eine Raumladung vor der Kathode aufbaut, welche die thermische Emission der Kathode behindert.

   Definition 7.41: UNSELBSTÄNDIGE ENTLADUNG

   > *Eine unselbständige Entladung erfolgt, wenn der Strom im Gas mit Hilfe von Elektronen/Ionen, die durch äußere Einwirkung entstanden sind, aufrechterhalten wird. Der Strom bricht ab, wenn die äußere Einwirkung verschwindet.*

2. Selbständige Entladung

   Wenn nach Erreichen des Sättigungsstrom die Spannung U weiter erhöht wird, so steigt der Strom wieder steil an. Der Grund ist, dass viele Elektronen die zur Stoßionisation benötigte kinetische Energie erreichen und die bei diesen Stößen erzeugten Elektronen-Ion-Paare ihrerseits wieder ionisieren. Der Strom wächst also lawinenartig. Auch wenn der Heizstrom der Kathode abgestellt wird, bleibt die Entladung bestehen.

Definition 7.42: SELBSTÄNDIGE ENTLADUNG

Eine Entladung heißt selbständig, wenn die primären Ladungsträger genügend Energie besitzen, um für sich Ersatz zu schaffen.

Während der Ausbildung der Ladungsträger-Lawine nimmt der Widerstand der Gasentladung ständig ab. Es ist ein Vorwiderstand zur Strombegrenzung nötig, da sonst ein Kurzschluss in der Spannungsquelle auftritt.

Definition 7.43: PLASMA

Ein weitgehend ionisiertes Gas heißt Plasma.

Bei ausreichend hoher Temperatur (ca. 5000 K) sind Gase auch ohne Vorliegen eines elektrischen Feldes (zur Ionisation) völlig ionisiert. Die kinetische Energie der Moleküle aus der Wärmebewegung reicht zur Stoßionisation aus.

Glimmentladung

Bei genügend hohen Spannungen und im geeigneten Druckbereich ist die Aufrechterhaltung einer Glimmentladung möglich. Vor der Kathode kann man Leuchterscheinungen (Glimmlicht) beobachten. Vor der Anode entsteht eine, eventuell strukturierte, positive Säule. Hinter der durchbohrten Anode kommt es zur Fluoreszenz durch das Auftreffen von Elektronen auf das Gas des Rohres. Durch das Loch in der Kathode bilden sich Kanalstrahlen (Ionenbündel).

Im Kathodenfall nehmen Ionen die Energie auf, um Elektronen aus der Kathode abzulösen. Sie ionisieren im Bereich der positiven Säule. Dort sind Elektronen und Ionen in gleicher Dichte vorhanden. Man spricht von einem quasi-neutralen Plasma. Leuchterscheinungen treten auf, weil Atome nicht nur ionisiert, sondern auch angeregt werden. Bei Edelgasfüllung liegt die Lichtemission im UV-Bereich. Durch Aufbringen von Leuchtstoff auf die Innenwand des Entladungsrohres kann das UV-Licht in sichtbares Licht umgewandelt werden.

Bogenentladung

Bei Erhöhung des Drucks und des Stroms geht die Glimmentladung in eine Bogenentladung über. Die Kathode erzeugt den Hauptanteil der Ladungsträger. Durch den Strom der Entladung wird sie soweit erhitzt, dass sie viele Elektronen thermisch emittiert.

7.7 Elektrischer Strom und Magnetfelder

7.7.1 Magnetfelder stromdurchflossener Leiter

Wir wissen aus dem Experiment, dass elektrische Ströme und Magnetfelder miteinander verknüpft sind. Ein magnetischer Dipol erfährt in Umgebung des stromführenden Leiters ein Drehmoment $\vec{M}$. Ist der Dipol frei beweglich, so stellt er sich in Richtung des Magnetfeldes ein. Die Richtung des Magnetfeldes ergibt sich aus der

Rechte-Hand-Regel

Zeigt der Daumen der rechten Hand in die konventionelle Stromrichtung, d.h. zum Minuspol der Spannungsquelle, dann geben die Finger der Hand die Richtung des Magnetfeldes an.

Definition 7.44: MAGNETFELD

Das Magnetfeld $\vec{H}$ ist eine vektorielle physikalische Größe und wird auch magnetische Feldstärke (Erregung) genannt.

Die Richtung des Magnetfeldes ist durch die Rechte-Hand-Regel gegeben, der Betrag kann aus dem Drehmoment $|\vec{M}|$ bestimmt werden, den der magnetische Dipol in $\vec{H}$ erfährt. Verbindet man die Richtung benachbarter Dipole (zur Charakterisierung des $\vec{H}$-Feldes), so erhält man geschlossene Magnetfeldlinien (Kraftlinien).
Interessante Magnetfelder sind die Leiterschleife und der Stabmagnet. Man erhält den Verlauf von $\vec{H}$ um die Leiterschleife, wenn man den stromführenden, geraden Leiter zu einer Schleife biegt. Das Feld entspricht jenem des quermagnetisierten Stabmagneten. Man erhält den Verlauf des $\vec{H}$-Feldes in der Spule aus der Überlagerung der $\vec{H}$-Felder vieler Leiterschleifen. $\vec{H}$ ist innen achsenparallel und konstant. Im Außenraum schließen sich die aus der Spule austretenden $\vec{H}$-Feldlinien. Das $\vec{H}$-Feld des langen Permanentmagneten hat im Außenraum denselben Verlauf wie jenes um die Spule. Ein magnetischer Dipol besitzt ein $\vec{H}$-Feld, das jenem des längs-magnetisierten Permanentmagneten entspricht.

Messung von $\vec{H}$

$\vec{H}$, die magnetische Feldstärke, ist ein Vektor. Seine Richtung erhalten wir aus der Rechte-Hand-Regel. Um den Betrag zu bestimmen, benötigen wir ein Magnetometer: Dieses besteht im Prinzip aus einem magnetischen Dipol, der um eine Achse senkrecht zu $\vec{p}_m$ drehbar ist und in das $\vec{H}$-Feld senkrecht zur Richtung der Kraftlinien eingebracht wird. Das Drehmoment, das $\vec{p}_m$ erfährt, wird durch ein rücktreibendes Drehmoment M kompensiert, so dass das Gleichgewicht erhalten bleibt. Die Größe des rücktreibenden Drehmoments ist ein Maß für die Stärke von $|\vec{H}|$. Bringen wir das Magnetometer in das Magnetfeld einer Spule ein, so finden wir folgenden experimentellen Zusammenhang:

$$M \sim \frac{nI}{l}$$

Dabei ist n die Windungszahl und l die Länge der Spule. Die festgestellten Abhängigkeiten hängen nicht von dem verwendeten magnetischen Dipol ab. Sie sind Eigenschaften des Magnetfeldes. $|\vec{H}|$ muss somit ebenfalls proportional zum Drehmoment sein:

$$|\vec{H}| \sim \frac{nI}{l}$$

Definition 7.45: Betrag des Magnetfeldes

Der Betrag des Magnetfeldes $|\vec{H}| = H$ hat für eine Spule den Wert

$$H = \frac{n \cdot I}{l} \tag{7.19}$$

Die SI-Einheit des Magnetfeldes ist 1 A/m.

Wir haben das Magnetfeld $\vec{H}$ nun nach Betrag und Richtung festgelegt und besitzen eine Messmethode. Sie kann für die Messung beliebiger $\vec{H}$-Felder, nicht nur für jene von Spulen, verwendet werden. $\vec{H}$ ist als physikalische Größe daher vollständig bestimmt. Es folgt die Festlegung der Größe des magnetischen Moments $\vec{p}_m$. Die Richtung von $\vec{p}_m$ ist die magnetische Dipolachse (die Einstellrichtung im Magnetfeld). Man stellt fest:

$$|\vec{M}| \sim H \cdot p_m \cdot \sin(\vec{p}_m, \vec{H})$$

Mathematisch genau ist die folgende Formulierung unter Verwendung des Kreuzproduktes

$$\vec{M} \sim \vec{p}_m \times \vec{H}$$

d.h. das Drehmoment ist proportional zum Kreuzprodukt aus magnetischem Dipolmoment und Magnetfeld. Zur Festlegung der Proportionalitätskonstanten fordern wir, dass ein Kreisstrom ein magnetisches Moment

$$p_m = I \cdot A$$

besitzen soll. Man findet schließlich den Zusammenhang

$$M = \mu_0 \cdot I \cdot A \cdot H$$

und damit im allgemeinen Fall vektorieller Schreibweise

$$\vec{M} = \mu_0 \vec{p}_m \times \vec{H}$$

Die SI-Einheit von p_m ist $1\,\mathrm{Am}^2$.

Definition 7.46: MAGNETISCHE FELDKONSTANTE

Die Größe μ_0 trägt den Namen magnetische Feldkonstante oder Induktionskonstante. Sie beträgt (exakt!)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \tag{7.20}$$

7.7.2 Magnetfelder stromdurchflossener Leiter

Wir untersuchen die magnetische Feldstärke in der Umgebung diverser Leiteranordnungen, die stromdurchflossen sind, z.B. mit dem Magnetometer.

1. Gerader stromdurchflossener Leiter:

   Eine Messung des Drehmoments $\vec{M}$, das unser magnetisches Dipolmoment in der Umgebung erfährt, ergibt

   $$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

   mit r dem Abstand des Dipoldrehpunktes vom Draht und I der Stromstärke. Die Richtung von $\vec{H}$ ergibt sich aus der Rechte-Hand-Regel.

2. Stromdurchflossene, lange Spule:

   Es gilt

   $$|\vec{H}| = \frac{n \cdot I}{l}$$

   mit l der Spulenlänge, I dem Spulenstrom und n der Windungszahl der Spule.

Beide Befunde lassen sich wie folgt interpretieren: Man kann $\vec{H}$ berechnen, indem man das Linienintegral

$$\oint_{(K)} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

längs einer Kurve (K) um die stromführende Anordnung berechnet. In beiden Fällen liefert das Integral den Zusammenhang, der

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = n \cdot I \tag{7.21}$$

heißt. Es gilt für beliebige stromführende Leiteranordnungen.
Beispiel: Draht
Wir wählen für (K) Kreise um den Draht, durch den der Strom I fließt. Dann ist $|\vec{H}|$ überall längs (K) konstant und $\vec{H}$ hat die Richtung von $d\vec{s}$. Es ist also mit $n = 1$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot |\vec{H}| = I$$

und daher

$$|\vec{H}(r)| = \frac{I}{2r\pi}$$

Anwendung zum Ampère'schen Durchflutungsgesetz

Betrachten wir einen kreiszylindrischen Stab, der sich zu einem Rohr mit Radius R_0 aufweitet. Im Außenraum bzw. an der Oberfläche erhalten wir

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{I}{2r\pi} \qquad \text{für r} > \mathrm{R}_0 \\ H_O &= \frac{I}{2R_0\pi} \end{aligned}$$

Im Innenraum verschwindet das Magnetfeld.
Im Innern eines massiven kreiszylindrischen Leiters gilt

$$\begin{aligned} I_i(r_i) &= I \cdot \frac{r_i^2}{R_0^2} \\ \Rightarrow H_i \cdot 2\pi \cdot r_i &= I \cdot \frac{r_i^2}{R_0^2} \\ \Rightarrow H_i &= I \frac{r_i}{2\pi R_0^2} \end{aligned}$$

Zusammengefasst wächst H im Inneren linear mit dem Abstand von der Leiterachse an. Am Leiterrand erreicht es den höchsten Wert und fällt im Außenraum mit 1/r ab.
Wir können hier Analogien zum Geschwindigkeitsprofil um einen Wirbelkern ziehen. Der Wirbelkern ist jener Teil des Wirbels, der wie ein starrer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Bahngeschwindigkeit v der Flüssigkeitselemente ist

$$v = \omega \cdot r$$

Ausserhalb des Wirbelkerns nimmt die Geschwindigkeit mit 1/r ab (Zirkulationsbereich). Das $\vec{H}$-Feld hat nach Betrag und Richtung im Inneren wie im Äußeren denselben Verlauf wie das Strömungsgeschwindigkeitsfeld in und um einen Wirbelkern.

Gesetz von Biot-Savart

Bei kompliziertem Verlauf von stromführenden Leitern ist häufig eine Umformulierung des Durchflutungsgesetz für die Berechnung von $\vec{H}$ günstig. Das führt uns zum Gesetz von Biot-Savart.
Wir machen uns den Beitrag $d\vec{H}$ zu $\vec{H}$ plausibel, der von einem „Stromelement" $I \cdot \vec{dl}$ herrührt. Wir erinnern uns: Der Beitrag einer Ladung dq zu $\vec{E}$ beträgt im Punkt P

$$d\vec{E} = \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dq$$

Wir bauen $\vec{H}$ analog aus den Beiträgen der Stromelemente $I \cdot \vec{dl}$ auf. Die r-Abhängigkeit ist analog zu $\vec{E}$

$$\propto \frac{1}{4\pi r^2}$$

Der Beitrag $d\vec{H}$ steht senkrecht auf $I \cdot \vec{dl}$. D.h. $d\vec{H}$ hat die Richtung von

$$I \cdot \vec{dl} \times \hat{r} = \frac{I}{r} \cdot \vec{dl} \times \vec{r}$$

Gesetz von Biot-Savart

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi r^3} \cdot I \cdot \vec{dl} \times \vec{r} \tag{7.22}$$

Beispiel: $\vec{H}$-Feld eines Kreisstroms:
Das $\vec{H}$-Feld steht senkrecht auf die Kreisstromebene.

$$\begin{aligned}
|d\vec{H}| &= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{dl}|}{a^2+b^2} \\
|d\vec{H}_x| &= |d\vec{H}| \cdot \sin\alpha = |d\vec{H}| \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\Rightarrow |\vec{H}| &= 2\pi a \cdot \frac{I}{4\pi(a^2+b^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\vec{H} &= \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}
\end{aligned}$$

Für das Magnetfeld im Zentrum ergibt sich aus

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} \cdot \vec{dl} \times \vec{r}$$

nach Integration über den gesamten Kreistrom (mit $\vec{dl} \times \vec{r} = 2d\vec{A}$ und $\sum d\vec{A} = \pi a^2$ sowie $r \equiv a$) sofort

$$H = \frac{I}{2a}$$

Dies ist eine wichtige Formel zur Berechnung des $\vec{H}$-Feldes von atomaren Kreisströmen.

7.7.3 Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

Wir betrachten eine sogenannte Stromschaukel. Wir bringen einen Draht der Länge l, der von I durchflossen wird, in das Magnetfeld $\vec{H}$. Wir messen eine Kraft $\vec{F}$, die von der Richtung der Stromdichte $\vec{j}$ relativ zu $\vec{H}$ abhängt. Sie ist maximal, wenn der Draht senkrecht zu $\vec{H}$ hängt. Das quantitative Ergebnis lautet:

$$|\vec{F}| = \mu_0 \cdot |\vec{H}| \cdot I \cdot l$$

Definition 7.47: MAGNETISCHE INDUKTION

> *Das Produkt aus der magnetischen Feldkonstante und dem magnetischen Feld heißt magnetische Induktion oder magnetische Flußdichte $\vec{B}$ (im Vakuum):*

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \tag{7.23}$$

Es ist $I = A \cdot q \cdot n \cdot |\vec{v}|$. Für beliebige Winkel zwischen $\vec{j}$ und $\vec{H}$ gilt

$$\vec{F} = q \cdot A \cdot n \cdot l \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

mit A dem Leiterquerschnitt, n der Ladungsträgerdichte, $\vec{v}$ der Strömungsgeschwindigkeit und q der Ladung (der Elektronen). Dabei kann man das Produkt $A \cdot l$ zum Volumen V zusammenfassen. Weiterhin gilt für die Anzahl N der Ladungsträger, die sich im Feld $\vec{B}$ bewegen der Zusammenhang $N = n \cdot V$. Damit erhält man für die Kraft

$$\vec{F} = N \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Die Kraft auf einen einzelnen Ladungsträger der Ladung q, der sich mit $\vec{v}$ in $\vec{B}$ bewegt, ist die

Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{7.24}$$

Die Richtung von $\vec{F}_L$ lässt sich durch eine Drei-Finger-Regel bestimmen. Man hält Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger wie ein orthogonales Koordinatensystem. Zeigt der Daumen in die Richtung des $\vec{B}$-Feldes und der Zeigefinger in die $\vec{v}$-Richtung des bewegten Teilchens, so deutet der Mittelfinger in Richtung $\vec{F}_L$.

Bewegung von Ladungen im homogenen Magnetfeld

Die Kräftebilanz ergibt

$$|\vec{F}_L| = e \cdot v \cdot B$$

Die Grundgleichung der Dynamik besagt, dass das Elektron durch $\vec{F}_L$ eine Radialbeschleunigung v^2/R und somit eine Radialkraft mv^2/R erfährt.

$$\frac{mv^2}{R} = e \cdot v \cdot B$$

Für den Kreisradius R folgt

$$R = \frac{mv}{eB}$$

Der Zusammenhang zwischen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit $v = \omega \cdot R$ liefert hier für ω

$$\omega = -\frac{e}{m} \cdot B$$

ω ist unabhängig vom Bahnradius R. Diese Überlegungen finden ihre Anwendung im Bau von Kreisbeschleunigern (Zyklotron-Typ).

Definition 7.48: ZYKLOTRON-FREQUENZ

Man bezeichnet

$$\omega_c = -\frac{e}{m} \cdot B$$

als Zyklotron-Frequenz.

ω_c ermöglicht z.B. auch die Bestimmung der effektiven Masse m^* von Ladungsträgern in Festkörpern.

Massenspektrometer:

Ionen der Ladung e und der Masse m werden durch eine Spannung U auf die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

gebracht. Sie durchlaufen ein homogenes magnetisches Sektorfeld und treten nach Durchlaufen eines Halbkreises wieder aus dem $\vec{B}$-Feld aus. Offenbar ist der Bahnradius

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

Treten Ionen verschiedener Masse m_i beim selben Punkt S in das $\vec{B}$-Feld ein, so durchlaufen sie Halbkreise mit verschiedenen Radien $R_i(\propto \sqrt{m_i})$ und treten an verschiedenen Orten aus dem Sektorfeld aus. Bei bekannter Ladung kann somit die Masse der Ionen bestimmt werden.
Das Spektrometer hat jedoch eine endliche Massenauflösung $(\Delta m/m)$, weil Ionen, die unter unterschiedlichen Winkeln bei S in das Feld eintreten auf einen Bereich endlicher Breite b abgebildet werden.

$$b \approx R \cdot \alpha^2$$

Zwei Massen m_1 und m_2 können noch getrennt werden, wenn ihre Bilder einen Abstand $> \frac{1}{2}R\alpha^2$ haben oder

$$R_1 - R_2 > \frac{1}{2}R\alpha^2 \tag{7.25}$$

Für die relative Massenauflösung $\Delta m/m$ gilt (wegen $m_i \propto R_i^2$)

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R^2} = \frac{2R \cdot (R_1 - R_2)}{R^2}$$

Mit Gleichung (7.25) wird

$$\frac{\Delta m}{m} \geq \alpha^2$$

Die Massenauflösung hängt also quadratisch, d.h. stark, vom Öffnungswinkel des Ionenbündels ab.

Hall-Effekt

Wir betrachten einen stromdurchflossenen Leiter (mit Querschnitt $b \cdot d$) im Magnetfeld $\vec{B}$. $\vec{B}$ sei senkrecht zu $\vec{v}_e$. Die Ablenkung der Ladungsträger erfolgt durch $\vec{F}_L$ senkrecht zu $\vec{v}_e$ und senkrecht zu $\vec{B}$. Das führt zu einer Anhäufung negativer Ladungen an der Unterseite des Leiters und damit zum Aufbau eines elektrischen Feldes $\vec{E}$. Kräftegleichgewicht tritt ein, wenn

$$e \cdot \vec{v}_e \times \vec{B} = ev_eB \stackrel{!}{=} eE$$

Es bildet sich die sogenannte Hall-Spannung aus

$$U_H = \int_0^b \vec{E} \cdot \vec{ds} = b \cdot E = b \cdot v_e \cdot B$$

Unter Verwendung von $j = e \cdot n \cdot v_e$ und $I = j \cdot b \cdot d$ erhalten wir

$$\begin{aligned} U_H &= \frac{b \cdot j}{e \cdot n} \cdot B = \frac{b \cdot d \cdot j \cdot B}{d \cdot e \cdot n} \\ U_H &= \frac{I \cdot B}{e \cdot n \cdot d} \end{aligned}$$

U_H ist proportional zu 1/n. Sie wächst also mit abnehmender Ladungsträgerdichte. Grund dafür ist die Driftgeschwindigkeit v_e, die dann bei konstanter j_e größer wird. Halbleiter haben ca. 10^6-mal kleinere n-Werte als Metalle. Deshalb ist die Hallspannung für Halbleiter wesentlich größer ($\approx \mu V$). Über den Halleffekt wird B bestimmt.

Stromschleife im Magnetfeld

Eine z.B. rechteckige stromführende Leiterschleife erfährt im homogenen $\vec{B}$-Feld ein Drehmoment $\vec{M}$. Dieses rührt vom Kräftepaar her, welches von den beiden Längsseiten stammt, die in umgekehrter Richtung Strom führen. Das Drehmoment $\vec{M} = 2 \cdot \vec{r}_0 \times \vec{F}_L$ ist streng proportional zum Strom I. Dies ist das Prinzip des Drehspul-Ampèremeters zur Messung von Strömen.

Kräfte zwischen parallelen stromführenden Leitern

Zwei parallele, stromführende Drähte üben aufeinander Kräfte aus, da sich jeder im Magnetfeld des anderen befindet. Die Kraft $\vec{F}_{12}$ vom Leiter 1 auf Leiter 2 beträgt

$$|\vec{F}_{12}| = \mu_0 \cdot I_2 \cdot l \cdot |\vec{H}_1|$$

Nach dem 3. Newton'schen Axiom wirkt auf I_1 die gleich große, aber entgegen gesetzte Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Gleichgerichtete Ströme ziehen sich also an, entgegengerichtete Ströme stoßen sich ab.

Definition 7.49: Ampère

> *Die Basiseinheit 1 Ampère ist die Stärke des Stromes I, der, wenn er durch zwei im Abstand vom 1 m befindlichen Leitern fließt, zwischen diesen Leitern pro 1 m Leiterlänge die Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7}\,N$ hervorruft. Die Anordnung ist im Vakuum aufzubauen und der Drahtquerschnitt muss vernachlässigbar klein gegen den Drahtabstand sein.*

7.7.4 Atomistische Deutung des Magnetismus

Wir führen den Magnetismus makroskopischer Stoffe auf die Kreisströme zurück, welche die Elektronen in Atomen/Molekülen darstellen.
Das einfachste Beispiel ist das H-Atom. Ein Elektron umläuft ein Proton auf einer Kreisbahn. Wir wissen, dass jeder Kreisstrom I mit einem magnetischen Moment $\vec{p}_m$ verknüpft ist

$$|\vec{p}_m| = I \cdot A$$

Dabei ist A die Fläche, die von I umschlossen wird. Wir haben mit Hilfe des Biot-Savart-Gestzes das zum Kreisstrom gehörende $\vec{H}$-Feld berechnet. Das Ergebnis war, dass im Zentrum des Kreisstroms das Feld senkrecht auf A steht und den Wert

$$H = \frac{I}{2a}$$

hat ($a =$ Kreisbahnradius). Im Bereich der Quantenmechanik ist die Verknüpfung zwischen $\vec{p}_m$ und dem Drehimpuls, den ein Atom besitzt, sehr wichtig.
Das magnetische Verhalten makroskopischer Körper wird auf jenes der Bestandteile, also der Atome, zurückgeführt. Zum qualitativen Verständnis beachten wir, dass jedes um einen Atomkern kreisende Elektron einen Kreisstrom darstellt.

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{e}{\tau}$$

τ ist die Umlaufzeit. Mit $\tau = 2\pi/\omega$ ($\omega =$ Kreisfrequenz) ergibt sich

$$I = -\frac{e \cdot \omega}{2\pi}$$

Zu dem Kreisstrom I gehört auch ein Bahndrehimpuls $\vec{L}$

$$\vec{L} = m_e \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m_e \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

Damit kann man nun schreiben

$$I = -\frac{e \cdot \omega}{2\pi} = -\frac{e}{2\pi} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m_e \cdot r^2}$$

Mit einem Kreisstrom ist das magnetische Moment $|\vec{\mu}| = I \cdot A$ verknüpft. Dabei ist A die Fläche der Kreisbahn des Elektrons: $A = \pi r^2$.

$$|\vec{mu}| = -\frac{e}{2m_e} \cdot |\vec{L}|$$

Für die Richtung von $\vec{\mu}$ gilt $\vec{\mu} \parallel -\vec{L}$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{L}$$

Definition 7.50: GYROMAGNETISCHES VERHÄLTNIS

$$\gamma = \frac{e}{2m_e}$$

heißt gyromagnetisches Verhältnis.

Das gesamte magnetische Moment einer makroskopischen Probe ist die vektorielle Überlagerung aller seiner Elementarmagneten (in Form von Kreisströmen), charakterisiert durch ihre magnetischen Momente.
Im H-Atom läuft ein Elektron auf einer Kreisbahn um das Proton. Wir messen seinen Bahndrehimpuls $\vec{L}$ in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantum $\hbar$, also

$$|\vec{L}| = L = l \cdot \hbar \qquad l = 1, 2, \ldots$$

Der Drehimpuls ist, wie die Elementarladung, gequantelt. $\vec{p}_m$ wird damit zu

$$\begin{aligned} \vec{p}_m &= -\frac{e}{2m} \cdot \vec{L} \\ \Rightarrow |\vec{p}_m| &= -\frac{e \cdot \hbar}{2m} \cdot l \end{aligned}$$

Definition 7.51: Bohr'sches Magnetron

Das magnetische Bahnmoment für l=1 ist

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m}$$

und heißt Bohr'sches Magnetron.

7.7.5 Relativistischer Charakter der Lorentz-Kraft

Das Kraftgesetz der Elektrodynamik lautet

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \cdot \vec{a}$$

Auffällig ist, dass die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der betrachteten Ladung in der Gleichung vorkommt: Machen wir eine Galilei-Transformation, so verschwindet die Lorentz-Kraft. An der Beschleunigung $\vec{a}$ ändert sich aber nichts! Das heißt, die Kraft $\vec{F_L}$ ist nicht Galilei-invariant und zwar auch nicht im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten. Dieses Problem kann aufgelöst werden, wenn bei der Transformation zwischen Bezugssystemen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ miteinander verknüpft werden, d.h. wenn $\vec{B}$ zum Verschwinden gebracht wird, erscheint ein Beitrag zu $\vec{E}$.
Betrachten wir einen stromführenden Leiter, der von einem $\vec{B}$-Feld umgeben ist. Parallel zum Leiter bewege sich ein Elektron mit derselben Geschwindigkeit wie die Leiter-Elektronen. Das Elektron erfährt die Kraft $\vec{F_L}$ radial in Richtung auf den Leiter

$$\vec{F_L} = -e \cdot v \cdot B \cdot \hat{r} = \frac{e \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot v \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \hat{r}$$

Nun erfolgt der Wechsel des Bezugssystems von S nach S'. Das neue Bezugssystem S' bewegt sich mit dem Elektron mit, d.h. die Elektronen ruhen. In S' ist aber der Abstand, und somit die Dichte, der Gitter-Ionen verändert. Der Abstand ist um $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (Lorentz-Kontraktion) verkürzt. Die Dichte erhöht sich auf

$$\rho^+(S') = \frac{\rho^+}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dagegen verkleinert sich ρ^- zu

$$\rho^-(S') = \rho^- \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

In S waren die beiden Dichten gleich. Somit besteht in S' eine resultierende Ladungsdichte

$$\Delta\rho' = \rho^+(S') + \rho^-(S') > 0$$

Zu diesem $\Delta\rho'$ gehört ein $\vec{E}$-Feld, das auf die Elektronen die Kraft $\vec{F}_e = e \cdot \vec{E}$ (Gauß'scher Satz) ausübt. $\vec{F}_e$ hat in S' genau den Wert und die Richtung von $\vec{F}_L$ im ursprünglichen Bezugssystem. Die Lorentz-Kraft, die bewegte Ladungen erfahren, ist also ein relativistischer Effekt.