

Übungen zur Experimentalphysik III

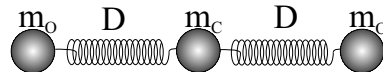
Prof. Dr. W. Daum

1 Überlagerung von Wellen

- (a) Zeigen Sie, dass die Überlagerung $\psi = f \pm g$ einer rechtslaufenden Welle $f(x - ct)$ und einer linkslaufenden Welle $g(x + ct)$ die Wellengleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ erfüllt.
- (b) Eine rechtslaufende harmonische Welle kann durch die Funktion $\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx - \omega t)$ beschrieben werden. Welcher Zusammenhang muss zwischen k , ω und der Phasengeschwindigkeit c gelten damit $\psi(x, t)$ die Wellengleichung erfüllt?
- (c) Zeichnen Sie qualitativ den räumlichen Verlauf der harmonischen Welle $\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx - \omega t)$ für die Zeiten $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $t = \frac{\pi}{\omega}$ und $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

2 Streckschwingung des CO₂-Moleküls

Das CO₂-Molekül, das für den Treibhauseffekt in der Atmosphäre hauptsächlich verantwortlich ist, ist im Gleichgewicht ein lineares Molekül, das wir wie folgt beschreiben wollen:



- (a) Das Molekül hat drei Eigenschwingungen. Warum?
- (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die drei Atome auf und ermitteln Sie die Eigenfrequenzen ω_s und ω_{as} der symmetrischen und der antisymmetrischen Streckschwingung entlang der Molekülachse. Die dritte Schwingung ist eine Biegeschwingung in der von der Atomen aufgespannten Ebene und soll hier nicht diskutiert werden.
- (c) Wie groß ist das Verhältnis ω_{as}/ω_s ? Vergleichen Sie das berechnete Verhältnis mit den experimentellen Werten $\nu_{as} = 7,04 \cdot 10^{13}$ Hz und $\nu_s = 4 \cdot 10^{13}$ Hz.

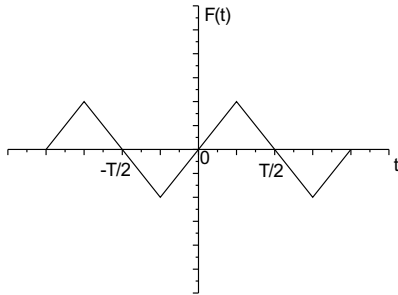
3 Fourierreihe

- (a) Sei $F(t) = F(t + T)$ eine periodische Rechteckfunktion mit der Eigenschaft:
 $F(t) = 0$ für $-T/2 < t < -T/a$
 $F(t) = 1$ für $-T/a < t < T/a$
 $F(t) = 0$ für $T/a < t < T/2$
 Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten A_n .
- (b) Untersuchen Sie die Abhängigkeit des Verhältnisses A_9/A_1 von der Breite $2T/a$ der Rechtecke für $a = 4$ und $a = 400$. Was geschieht mit A_n im Grenzfalle eines infinitesimal schmalen Rechtecksignals (Hilfe: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = n$)? Was kann aus diesem Ergebnis für die Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion verallgemeinert werden, wenn die Funktion starke zeitliche Strukturen auf der Zeitskala einer Periode besitzt?

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

4 Fourierreihe der periodischen Dreieckskurve



Stellen Sie die in der Abbildung gezeigte periodische Dreieckskurve als Fourierreihe in der Form

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

dar. Berechnen Sie dazu die Fourierkoeffizienten A_n sowie B_n und zeigen Sie, dass alle Koeffizienten A_n sowie alle Koeffizienten B_n mit geradem Index n ($n = 0, 2, 4, 6, \dots$) verschwinden.

5 Darstellung der Fourierreihe

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Darstellungen

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_n t} \quad \text{und} \quad F(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t)$$

der Fourierreihe äquivalent sind.

(b) Wie hängen die Koeffizienten f_n , A_n und B_n zusammen?

6 Frequenzspektrum einer schwach gedämpften Schwingung

(a) Berechnen Sie das Frequenzspektrum einer schwach gedämpften Schwingung mit der Funktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases},$$

indem Sie die Fouriertransformierte $\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt$ von $F(t)$ berechnen. Verwenden Sie dazu, dass es sich um eine schwach gedämpfte Schwingung mit $\gamma^2 \approx 0$ handelt. Zusätzlich sollen nur Frequenzen nahe der Eigenfrequenz ω_0 mit $(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0$ betrachtet werden.

(b) Stellen Sie nun $F(t)$ mit Hilfe von $\tilde{F}(\omega)$ in der Form

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} c(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

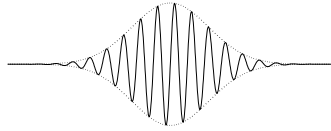
dar.

(c) Zeichnen Sie qualitativ $c(\omega)$ in Abhängigkeit von ω . Erläutern Sie außerdem, wie die Breite von $c(\omega)$ und die Dämpfungskonstante γ zusammenhängen.

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

7 Frequenzspektren kurzer Laserpulse

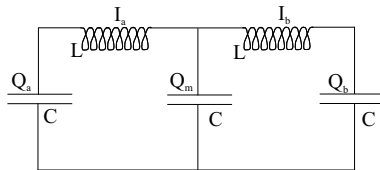


Laserpulse können durch eine mit einer Gaußkurve gefalteten ebenen Welle beschrieben werden. Die Funktion des zeitabhängigen Anteils dieser Pulse ist dann:

$$E(t) = E_0 \cdot \exp \left[-2 \ln 2 \frac{t^2}{\Delta T^2} \right] \cdot \exp[-i\omega_0 t]$$

- Zeigen Sie, dass das sogenannte Bandbreiteprodukt $\Delta T \Delta \omega$ für gaussförmige Laserpulse den Wert $4 \ln 2$ hat. ΔT ist dabei die FWHM-Halbwertsbreite der Pulse und entspricht der Pulsdauer. $\Delta \omega$ ist die FWHM-Halbwertsbreite des Frequenzspektrums der Pulse mit der Pulsdauer ΔT . *Hinweis:* Berechnen zur Bestimmung von $\Delta \omega$ die Fouriertransformierte $\tilde{E}(\omega)$ von $E(t)$.
- Wie groß ist die spektrale Bandbreite $\Delta \lambda$ für gaussförmige Laserpulse mit FWHM-Pulsdauern von 10 fs, 10 ps und 10 ns bei einer Zentralwellenlänge $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$?

8 Eigenschwingung zweier gekoppelter LC-Kreise



Diskutieren Sie für das angegebene System zweier gekoppelter LC-Kreise die beiden Eigenschwingungen

- Wenden Sie hierzu die Maschen- und Knotenregel an und stellen Sie die Differentialgleichungen für die Ströme in den beiden Teilkreisen auf.
- Bestimmen Sie die beiden Eigenfrequenzen des Systems.
- Geben Sie für beide Eigenschwingungen die Richtungen der Ströme in den beiden Teilkreisen und die Ladungsverhältnisse auf den Kondensatoren an.

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

9 Torsionspendelkette

In der Vorlesung wurde die Torsionspendelkette zur Demonstration von Wellenphänomenen verwendet. Die Torsionspendelkette besteht aus einer Vielzahl von identischen Schwebpendeln, die hintereinander im Abstand a an einem Torsionsdraht befestigt sind.

- (a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung der Winkelauslenkung $\psi_n(t)$ des n -ten Pendels aus seiner Ruhelage

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \sin \psi_n + \frac{D_T}{I}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{r_s mg}{I}}$$

lautet. r_s ist der Abstand zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt der Pendel, I das Trägheitsmoment der Pendel in Bezug auf ihren Aufhängepunkt und D_T die Torsionskonstante des Drahtes. (Hilfe: Eine Winkelverdrillung α des Drahtes führt zu einem rücktreibenden Drehmoment $M = D_T \alpha$).

- (b) Setzen Sie als Lösung für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ($\sin \psi_n \approx \psi_n$) eine harmonische Welle mit Wellenzahl k an und bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für die Torsionspendelkette. Welche Bewegungen führen die Pendel für $k = 0$ und für $k = \pi/a$ aus?

10 Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt: $v_{gr} = v_{ph} - \lambda \frac{d}{d\lambda} v_{ph}$. λ ist die Wellenlänge.

11 k -Spektrum eines Rechteckpulses

Ein Wellenpaket $\psi(x - ct)$ mit der Form eines Rechteckpulses, der räumlichen Breite b und der Amplitude ψ_0 bewege sich mit der Geschwindigkeit c dispersionslos in positiver x -Richtung.

Berechnen Sie das k -Spektrum $\tilde{\psi}(k)$ dieses Wellenpaketes. Hinweis:

$$\psi(x - ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(k) e^{ik(x-ct)} dk$$

Was geschieht mit dem k -Spektrum, wenn die Pulsbreite b gegen Null strebt, wobei die Fläche $b \cdot \psi_0$ unter dem Puls konstant bleiben soll?

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

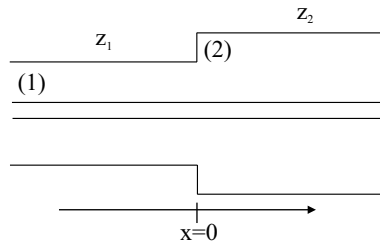
12 Koaxialkabel

Berechnen Sie für ein Koaxialkabel, dessen Volumen zwischen dem Innenleiter mit einem Radius r_i und einem Außenleiter mit dem Radius r_a mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ϵ_r gefüllt ist, die Kapazitätsbelegung C' (Kapazität/Länge), die Induktivitätsbelegung L' (Induktivität/Länge), die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ und den Wellenwiderstand Z . Die magnetische Permeabilität des Dielektrikums sei 1 und die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.

Lösungshinweise:

- Machen Sie sich anhand einer Querschnittszeichnung des Koaxialkabel den radial-symmetrischen Feldlinienverlauf der elektrischen und magnetischen Feldstärke klar.
- Berechnen Sie zur Bestimmung von C' die Spannung zwischen Außen- und Innenleiter als $U(x, t) = - \int_{r_i}^{r_a} \vec{E}(x, r, t) \cdot d\vec{r}$. Die Ortsabhängigkeit der elektrischen Feldstärke kann durch Anwendung des Gaußschen Gesetzes erhalten werden.
- Verwenden Sie zur Bestimmung von L' das Induktionsgesetz in der Form $\Delta U_{ind} = -L' \Delta x \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi_{magn}$, wobei Δx ein Längenelement entlang der Kabelachse ist. Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Delta \phi_{magn}$ durch ein Flächenelement der Länge Δx und der Breite $(r_a - r_i)$. Die Ortsabhängigkeit der magnetischen Feldstärke kann mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes erhalten werden.

13 Reflexionen im Koaxialkabel



Zwei Koaxialkabel (Kabel (1) und Kabel (2)) mit unterschiedlichen Außenleiterradien und den Wellenwiderständen Z_1 und Z_2 sind, wie in der Abbildung gezeigt, am Punkt $x = 0$ miteinander verbunden.

- (a) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten r und den Transmissionskoeffizienten t für den Strom $I(x - ct)$ bzw. für die Spannung $U(x - ct)$ am Übergang zwischen den beiden Kabeln. Verwenden Sie dazu die Stetigkeitsbedingungen für den Strom $I_1(t, x = 0) = I_2(t, x = 0)$ und für die Spannung $U_1(t, x = 0) = U_2(t, x = 0)$.

Berechnen Sie r und t für die folgenden Spezialfälle:

- (b) Kabel (1) mit einem offenen Ende
 (c) Kabel (1) ist am Punkt $x = 0$ kurzgeschlossen
 (d) Kabel (1) ist mit dem Wellenwiderstand $Z_2 = Z_1$ vom Kabel (2) abgeschlossen

Geben Sie jeweils an ob bei $x = 0$ ein Bauch oder ein Knoten für Strom und Spannung vorliegt.

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

14 Elektromagnetische Felder in Koaxialkabeln mit unterschiedlichen Dielektrika

Zwei Koaxialkabel mit gleichen Innen- und Außenleitern, aber unterschiedlichen Dielektrika ϵ_1 und ϵ_2 , sind an der Stoßstelle $x = 0$ miteinander verbunden.

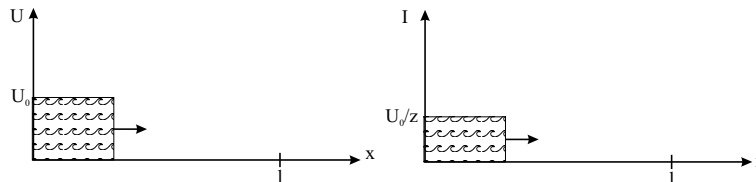
- (a) Drücken Sie den Amplitudenreflexionskoeffizienten r und den Amplitudentransmissionskoeffizienten t für die Spannung zwischen Außen- und Innenleiter an der Stoßstelle $x = 0$ durch die Größen $\sqrt{\epsilon_i}$ aus. Nehmen Sie dazu für beide Kabel gleiche magnetische Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$ an.
- (b) Was folgt aus der Stetigkeit von Spannung und Strom an der Stoßstelle für die Stetigkeit der elektromagnetischen Feldgrößen \vec{E} , \vec{D} und \vec{H} ? Nehmen Sie für diesen Teil der Aufgabe auch unterschiedliche Werte für μ in den Kabeln an.

Lösungshinweis für den Teil (b): Benutzen Sie die zur Lösung der Aufgabe 12 verwendeten Ausdrücke für $U(x, t)$, $E(x, t)$ und $B(x, t)$.

15 Verhalten von Spannung und Strom in einer Doppelleitung

Eine Doppelleitung der Länge l habe eine Impedanz z und einen vernachlässigbaren Widerstand R . Das Anlegen einer Gleichspannung U_0 führt zu einem Strom I . Spannung und Strom werden beide am Ende der Leitung, dann wieder am Anfang usw. reflektiert. Durch die angelegte Spannungsquelle U_0 wird die Spannung bei der Reflexion am Anfang immer wieder auf U_0 festgehalten. Die Zeit zum einmaligen Durchlaufen der Leitung sei t_0 .

- (a) Skizzieren Sie U und I als Funktionen der Leiterlänge für die Zeitpunkte $t_1 = t_0/3$, $t_2 = 4t_0/3$, $t_3 = 7t_0/3$, $t_4 = 11t_0/3$ und $t_5 = 14t_0/3$ für eine am Ende offene Leitung ($R = \infty$). Beispiel: $t_1 = t_0/3$

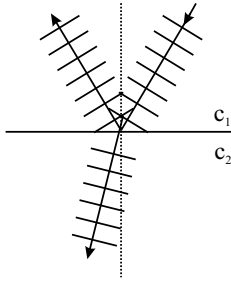


- (b) Wie Aufgabenteil (a) nur mit einem geschlossenen Ende der Leitung.

Die nächste Aufgabe befindet sich auf der Rückseite !

16 Huygensches Prinzip

Eine ebene Lichtwelle fällt, wie in der Abbildung gezeigt, unter dem Winkel α auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien. Die Phasengeschwindigkeiten der Welle sind jeweils $c_1 = c_0/n_1$ und $c_2 = c_0/n_2$.



(a) Leiten Sie mit Hilfe des Huygenschen Prinzips das Reflexionsgesetz "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" ab.

(b) Leiten Sie mit Hilfe des Huygenschen Prinzips das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ab.}$$

Hinweis: Die einfallenden Welle löst an der Grenzfläche Sekundärwellen aus, welche sich zu reflektierten bzw. gebrochenen Wellenfronten überlagern. Diese Wellenfronten bilden die Tangentialebenen an die Sekundärwellenberge.

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

17 Induktivität einer Zylinderspule

Zeigen Sie, dass für die Induktivität L einer langen Zylinderspule mit der Länge l , einem Kern der magnetischen Permeabilität μ , der Windungszahl N und der senkrecht zum magnetischen Feld stehenden Querschnittsfläche A gilt: $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 A}{l}$. Berechnen Sie dazu die magnetische Flussdichte B im Inneren einer langen und geraden Spule mit der Länge l und der Windungszahl N und berücksichtigen Sie, dass der Integrationsweg an den Spulenden senkrecht zum Magnetfeld steht und das das Magnetfeld im Außenraum vernachlässigbar klein gegenüber dem Feld im Inneren ist.

18 Elektromagnetische Energiedichte

Berechnen Sie die Energiedichte in einem geladenen Plattenkondensator mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ϵ_r und in einer langen stromdurchflossenen Zylinderspule mit einer magnetischen Permeabilität μ_r im Inneren der Spule in Abhängigkeit des E-Feldes bzw. B-Feldes. Gehen Sie dabei von den jeweiligen Energien $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ und $W_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$ aus.

19 Maxwell-Gleichungen und elektromagnetische Wellen

- Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen für monochromatische elektromagnetische Felder $\vec{E}(\vec{r}, t) \propto e^{-i\omega t}$ und $\vec{B}(\vec{r}, t) \propto e^{-i\omega t}$ in einem nicht leitenden Dielektrikum mit einer frequenzabhängigen $\epsilon(\omega)$ und mit einer frequenzabhängigen magnetischen Permeabilität $\mu(\omega)$ die Wellengleichung für das \vec{E} -Feld und das \vec{B} -Feld her.
- Zeigen Sie, dass für die Phasengeschwindigkeit c gilt: $c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$. Welche physikalische Bedeutung hat die Größe $\sqrt{\epsilon\mu}$?
- Setzen Sie für die Lösungen der Wellengleichung ebene Wellen an. Wie hängt der Betrag des Wellenvektors \vec{k} von der Kreisfrequenz ω ab?

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

20 Elektrische Feldstärken im Fokus eines Lasers

- (a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke, die ein fokussierter Dauerstrich-HeNe-Laser ($\lambda = 532,8 \text{ nm}$) mit einer Leistung von 1 mW in einem $1 \mu\text{m}$ großen Fokus erzeugt.
- (b) Berechnen Sie die maximale elektrische Feldstärke, die ein gepulster Titan-Saphir-Laser ($\text{Ti:Al}_2\text{O}_3; \lambda = 800 \text{ nm}$) mit einer Pulsdauer von 120 fs und einer Pulsenergie von 2 mJ erreicht, wenn er auf $1 \mu\text{m}$ fokussiert wird.

21 Dipolstrahlung

In der Vorlesung wurde für große Abstände zu den bewegten Ladungen (Fernfeldbereich, Wellenzone) folgender Ausdruck für den Poynting-Vektor hergeleitet:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}^2(t - \frac{r}{c}) \sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

\hat{r} ist der Einheitsvektor von \vec{r} , \vec{p} ist das Dipolmoment der Ladungen.

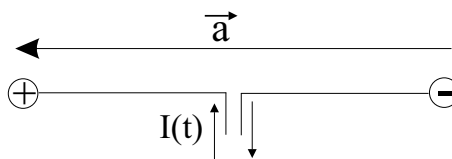
- (a) Zeigen Sie durch Integration über eine Kugeloberfläche im Abstand r zum Zentrum der Ladungsverteilung, dass für die abgestrahlte Leistung allgemein gilt:

$$P_{str} = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

- (b) Berechnen Sie für den Spezialfall eines elektrischen Dipols mit einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$ durch Mittelung über eine Schwingungsperiode die mittlere abgestrahlte Leistung \overline{P}_{str} .
- (c) Für das elektrische Dipolmoment einer Linearantenne der Länge a , in die ein Wechselstrom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ eingespeist wird, wurde in der Vorlesung gezeigt:

$$\dot{\vec{p}} = I(t) \vec{a}$$

Zeigen Sie, dass für die mittlere abgestrahlte Leistung gilt: $\overline{P}_{str} = R_s \overline{I^2}$ mit $R_s = \frac{2\pi}{3} Z_0 \frac{a^2}{\lambda^2}$ dem sogenannten Strahlungswiderstand der Antenne und $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$ dem Wellenwiderstand des Vakuums.



Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

22 Berechnung des Magnetfeldes mit Hilfe des Vektorpotentials

Ein unendlich langer zylindrischer Draht mit dem Radius R und der magnetischen Permeabilität $\mu_r = 1$ werde von einer konstanten Stromdichte $\vec{j}_0 = \frac{I}{\pi R^2} \hat{e}_z$ durchflossen.

- (a) Leiten Sie, wie schon in Aufgabe 12 gezeigt, einen Ausdruck für die radiale Ortsabhängigkeit des elektrischen Potentials im Außenraum eines langen geladenen Drahtes ab.
- (b) Nutzen Sie die Analogie zwischen dem elektrischen Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{und dem Vektorpotential}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{aus, um das Vektorpotential des}$$

stromdurchflossenen Drahtes zu bestimmen.

- (c) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential \vec{A} die Magnetfeldstärke $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
- (d) Zeichnen Sie die Richtung des Magnetfeldes sowie des Vektorpotentials in Abhängigkeit von der technischen Stromrichtung
- (e) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung mit Hilfe des Ampèresches Gesetzes.

23 Nahfelder des schwingenden elektrischen Dipols

- (a) Berechnen Sie im Nahfeldbereich ($r \ll \lambda$) eines schwingenden elektrischen Dipols das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ mit Hilfe des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{r}$.
- (b) Berechnen Sie ebenfalls im Nahfeld das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}$ mit Hilfe des Potentials $\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}(t) \cdot \vec{r}}{r^3}$.
- (c) Begründen Sie, warum im Nahfeld die elektrische und die magnetische Feldstärke ihre maximalen Werte jeweils um eine Viertelperiode zeitversetzt erreichen, also eine relative Phasenverschiebung von $\pi/2$ aufweisen.

EIN FROHES WEIHNACHTSFEST UND EIN GUTES NEUES JAHR 2006

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

24 Totalreflexion im Prisma

Ein Lichtstrahl fällt unter einem Winkel α so auf die Frontfläche eines optischen Prismas ein, dass der nach der Brechung durch das Prisma verlaufende Strahl die Rückfläche gerade unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion trifft und deshalb nicht mehr austreten kann. Berechnen Sie den Brechungsindex n des Glases als Funktion des Einfallswinkels α und des brechenden Winkels Φ des Prismas (Winkel zwischen den beiden Seitenflächen).

25 Konstruktion eines Achromaten

Für die Wellenlängen $\lambda_F = 486,1 \text{ nm}$ (blaugrün), $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$ (gelbe Na-Doppellinie) und $\lambda_C = 656,3 \text{ nm}$ (rot) haben die optischen Gläser Borkronglas BK1 und Flintglas F3 folgende Brechungsindizes:

Borkronglas BK1	$n_F = 1,5157$	$n_D = 1,5100$	$n_C = 1,5076$
Flintglas F3	$n_F = 1,6246$	$n_D = 1,6128$	$n_C = 1,6081$

Für die beiden Wellenlängen λ_F und λ_C soll ein farbkorrigiertes Linsensystem der Brennweite $f = 25 \text{ mm}$ konstruiert werden, welches aus einer Sammellinse aus Borkronglas BK1 und einer Zerstreuungslinse aus Flintglas F3 besteht. Wie groß müssen die Brennweiten der beiden Einzellinsen gewählt werden? Beziehen Sie jeweils alle Brennweiten bzgl. der gelben Na-Doppellinie.

Hinweis: Für die Brechkraft D einer Linse gilt:

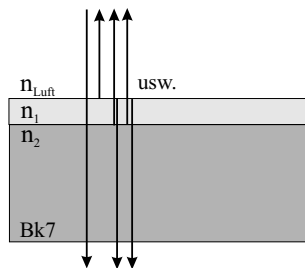
$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ,$$

wobei r_1 und r_2 die Krümmungsradien der beiden Linsenoberflächen sind.

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

26 Antireflexschichten



Die meisten Optiken wie z.B. Linsen, Brillen etc. werden mit Antireflexschichten versehen um eine maximale Transmission durch die Optik zu erreichen und gleichzeitig störende Reflexionen zu verhindern. Dazu werden auf einem Substrat (Dicke $d_s \gg \lambda$) verschiedene dünne Schichten ($d = \lambda/4, \lambda/2$) aufgebracht.

- (a) Zeigen Sie unter Verwendung von Mehrfachreflexionen, dass für das Reflexionsvermögen R des Schichtsystems gilt: $R = \left(\frac{-\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}}{1 + \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}} \right)^2$.
Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung $1/(1+x) \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ und die Amplitudenreflexionskoeffizienten

$$\sqrt{R_1} = \frac{n_{Luft} - n_1}{n_{Luft} + n_1} \quad \text{und} \quad \sqrt{R_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

für senkrechten Lichteinfall. Beachten Sie außerdem, dass bei Reflexion vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium die Feldamplitude das Vorzeichen wechselt (Phasensprung um π).

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den optimalen Brechungsindex n_1 für das in der Abbildung gezeigte Schichtsystem. Borkronglas BK7 hat einen Brechungsindex von $n_2 = 1,52$.
- (c) Warum zeigen die meisten Antireflexschichten blaue bis grüne Reflexe bei schrägen Lichteinfall ?

27 Planparallele Glasplatte

Auf eine planparallele Glasplatte fällt ein Lichtstrahl unter einem solchen Winkel ein, so dass der in die Luft reflektierte Strahl vollständig polarisiert ist. Beweisen Sie, dass auch der ins Glas hineingebrochene Strahl nach der Reflexion an der unteren Begrenzungsfläche vollständig polarisiert ist. Verwenden Sie dazu die Fresnelschen Formeln (siehe Vorlesungsskript):

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

28 Elliptisch polarisiertes Licht

Gegeben seien zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen der gleichen Frequenz ω und Wellenzahl k :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

- Berechnen Sie, auf welcher Kurve sich der Endpunkt des Vektors der elektrischen Feldstärke $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ in Abhängigkeit von α bewegt.
- Skizzieren Sie die Kurven für $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ und $\alpha = 45^\circ$ sowie $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ und $\alpha = 90^\circ$

Hinweis: Schreiben Sie E_y mit Hilfe eines Additionstheorems geeignet um und stellen Sie anschließend einen Zusammenhang zwischen E_x und E_y in Form einer Ellipsengleichung her. Zur Lösung von (b) müssen Sie diese auf Normalform bringen, so dass die entsprechenden Halbachsen abgelesen werden können.

29 Reflexion an Metalloberflächen

Ein Elektronenplasma, bei dem die Dämpfung der Elektronenbewegung vernachlässigbar klein ist, wird durch folgende dielektrische Funktion beschrieben: $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Hierbei ist $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ die sogenannte Plasmafrequenz und n die Elektronendichte im Plasma.

- Skizzieren Sie qualitativ die Frequenzabhängigkeit des Intensitätsreflexionskoeffizienten

$$R = \frac{I^{(r)}}{I^{(e)}} = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2$$

eines Elektronenplasmas bei senkrechten Einfall ($\tilde{n} = \sqrt{\epsilon(\omega)}$).

- Für welche Frequenzen elektromagnetischer Strahlung ist ein Metall, in dem die Elektronen so gut wie frei beweglich sind, ein nahezu perfekter Spiegel?
- Natrium hat eine atomare Konzentration von $N_{at} = 2,65 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Vergleichen Sie die experimentell bestimmte Plasmawellenlänge $\lambda_p = \frac{2\pi c_0}{\omega_p} = 210 \text{ nm}$ mit der Vorhersage des einfachen Modells.
- Wieso ist eine interkontinentale Rundfunkübertragung mit langen Radiowellen auch ohne Satelliten möglich?

Übungen zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. W. Daum

30 Verzögerungsplatten

Zwischen einem Polarisator und einem Analysator befindet sich eine Verzögerungsplatte aus Quarz, deren optische Achse senkrecht zur Strahlrichtung steht und die mit der Durchlassrichtung des Polarisators einen Winkel von 45° einschließt. Für die Wellenlänge der gelben Na-Doppellinie ($\lambda = 589,3 \text{ nm}$) hat Quarz die folgenden Hauptbrechungsindizes: $n_o = 1,5442$ und $n_{ao} = 1,5533$.

- Wie dick muss die Quarzplatte sein, damit sie bei dieser Wellenlänge als $\lambda/2$ - bzw. $\lambda/4$ -Platte nullter Ordnung funktioniert?
- Berechnen Sie für die $\lambda/2$ - bzw. $\lambda/4$ -Platte die Intensität $I(\phi)$ des durchgelassenen Lichtes als Funktion des Winkels ϕ zwischen den Durchlassrichtungen von Polarisator und Analysator. Die Intensität hinter dem Polarisator sei I_0 .
- Die Verzögerungsplatte ist eine $\lambda/4$ -Platte nullter Ordnung für $\lambda = 589,3 \text{ nm}$, die Durchlassrichtung des Analysator ist um 90° gegenüber dem Polarisator gedreht. Die gesamte Anordnung wird von weißem Licht durchstrahlt. Wie groß ist die Intensität $I(\lambda)$ von rotem und blauem Licht hinter dem Analysator, wenn hinter dem Polarisator $I_0(\lambda_{\text{blau}}) = I_0(\lambda_{\text{gelb}}) = I_0(\lambda_{\text{rot}})$ ist?

$$n_o(460 \text{ nm}) = 1,5516, \quad n_{ao}(460 \text{ nm}) = 1,5609$$

$$n_o(650 \text{ nm}) = 1,5420, \quad n_{ao}(650 \text{ nm}) = 1,5516$$

Warum erscheint das durchgelassenen Licht hinter dem Analysator farbig?