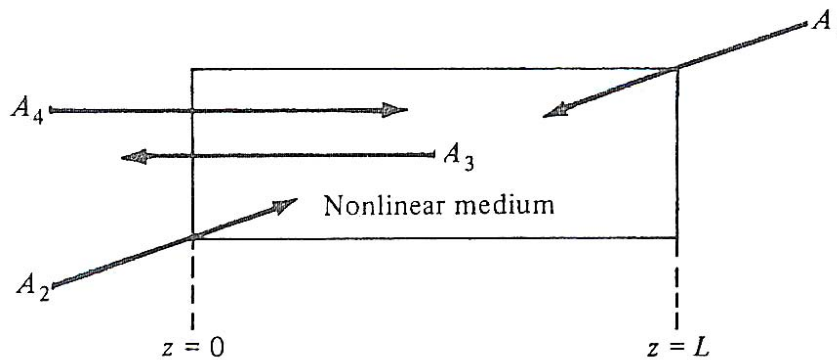


6 Anwendungen des intensitätsabhängigen Brechungsindex

6.1 Vier-Wellen-Mischen

Die Wechselwirkung von vier Lichtwellen wird als "Four-Wave Mixing" (FWM) bezeichnet. Ein häufiger Fall ist der, dass alle Wellen die gleiche Frequenz ω besitzen, die Wechselwirkung also entartet ist (DFWM, "Degenerate Four-Wave Mixing"). Die optische Phasenkonjugation stellt eine wichtige Anwendung des Vier-Wellen-Mischens dar. Durch Einstrahlen zweier gegenläufiger Pumpwellen und einer Signalwelle lässt sich eine zur Signalwelle räumlich konjugierte Welle erzeugen. Diese so genannte phasenkonjugierte Welle läuft den Weg der Signalwelle exakt zurück und kann damit z.B. zuvor erfolgte Phasenstörungen der Signalwelle wieder aufheben. Eine typische Geometrie der Wechselwirkung zeigt die folgende Abbildung mit den Pumpwelle $A_{1,2}$, der Signalwelle A_4 und der phasenkonjugierten Welle A_3 .



Die phasenkonjugierte Welle wird häufig auch als formal zeitumgekehrte Welle bezeichnet. Die Signalwelle sei

$$E_4 = \frac{1}{2} \left(A_4 e^{i(\omega t - \vec{k}_3 \vec{r})} + A_4^* e^{-i(\omega t - \vec{k}_3 \vec{r})} \right)$$

Hieraus ergibt sich die phasenkonjugierte Welle entweder durch Konjugation der räumlichen Anteile oder aber durch die hierzu gleichwertige formale Zeitumkehr $t \rightarrow -t$:

$$E_3 = E_4(t \rightarrow -t) = \frac{1}{2} \left(A_4^* e^{i(\omega t + \vec{k}_4 \vec{r})} + A_4 e^{-i(\omega t + \vec{k}_4 \vec{r})} \right)$$

Die phasenkonjugierte Welle läuft also in entgegengesetzter Richtung zur Signalwelle (Ausbreitungskonstante $\vec{k}_3 = -\vec{k}_4$) und hat komplex konjugierte Amplituden $A_3 = A_4^*$.

Die oben angesprochene Kompensation von Phasenstörungen lässt sich folgendermaßen zeigen. Läuft eine Welle $E_1(\vec{r})$ von links nach rechts durch ein phasenstörendes Medium und generiert man hinter dem Medium an einer Stelle $z = z_0$ die hierzu phasenkonjugierte Welle $E_2(\vec{r})$, so läuft diese rückwärts und entspricht an jeder Stelle der phasenkonjugierten von $E_1(\vec{r})$. Vor dem störenden Medium werden dann alle Störungen kompensiert.

Es sei $E_4 = A_4(\vec{r}) e^{i(\omega t - kz)}$ und erfülle die Wellengleichung mit dem durch $\varepsilon(\vec{r})$ beschriebenen Medium:

$$\nabla^2 E_4 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) E_4 = 0$$

Einsetzen liefert

$$\nabla^2 A_4 + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) - k^2) A_4 - 2ik \frac{\partial A_4}{\partial z} = 0$$

Die komplex konjugierte Gleichung hierzu lautet

$$\nabla^2 A_4^* + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon^*(\vec{r}) - k^2) A_4^* + 2ik \frac{\partial A_4^*}{\partial z} = 0$$

In entgegengesetzter Richtung laufe die Welle $E_3(\vec{r})$ mit

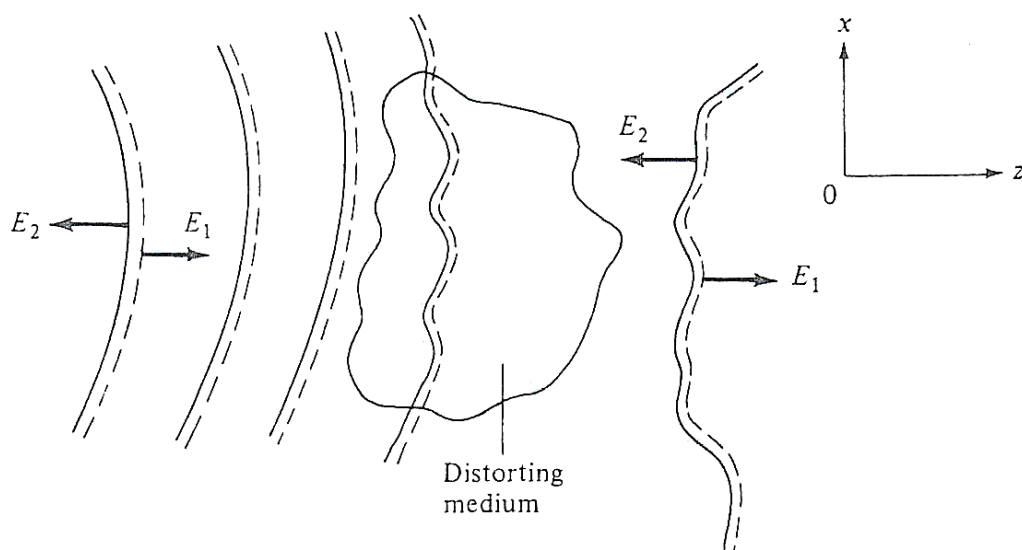
$$E_3 = A_3(\vec{r}) e^{i(\omega t + kz)}$$

und man erhält entsprechend

$$\nabla^2 A_3 + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) - k^2) A_3 + 2ik \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0$$

Das Medium sei verlustfrei, d.h. es gilt $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon^*(\vec{r})$.

Die Wellen E_4 und E_3 erfüllen die gleiche Differentialgleichung. Falls also die Bedingung $E_4^*(\vec{r}_0) = c E_3(\vec{r}_0)$ an einem bestimmten Ort $\vec{r} = \vec{r}_0$ erfüllt ist mit einer beliebigen Konstante c , so gilt automatisch $E_4^*(\vec{r}) = E_3(\vec{r})$ für beliebige Orte \vec{r} . In der folgenden Abbildung entsprechen die Wellen $E_{1,2}$ den Wellen $E_{4,3}$.



Im Folgenden wird die formale Beschreibung der Vier-Wellen-Mischung betrachtet. Das gesamte elektrische Feld im nichtlinearen Medium besteht aus den vier Komponenten

$$E = \sum_{s=1}^4 E_s = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 A_s(\omega_s) e^{i(\omega_s t - \vec{k}_s \vec{r})} + c.c.$$

Dieses Feld wird in die nichtlineare Wellengleichung (s. Kap. 3) eingesetzt, wobei dann für jede Komponente die folgende Gleichung gilt

$$\nabla^2 E_s(\omega_s) - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_s(\omega_s) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL}$$

mit der nichtlinearen Polarisation

$$P_{NL}(t) = \varepsilon_0 \sum_{q,r,l=\pm 1,\pm 2,\pm 3} \chi^{(3)} A(\omega_q) A(\omega_r) A(\omega_l) e^{i((\omega_q + \omega_r + \omega_l)t + (\vec{k}_q + \vec{k}_r + \vec{k}_l)\vec{r})}$$

d.h. $P_{NL}(t)$ ist eine Summe von $6^3 = 216$ Termen.

Man wählt daher einen bestimmten resonanten Term aus, so dass die Kombination dreier Frequenzen die vierte ergibt, z.B.

$$P_{NL}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) = 6 \varepsilon_0 \chi^{(3)} E(\omega_3) E(\omega_4) E^*(\omega_1)$$

Ein Vertauschen der Reihenfolge ergibt die sechs möglichen Permutationen.

Dieses Beispiel enthält weiter die Phasenanpassbedingung

$$\vec{k}_3 + \vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

Die Beziehung $\omega_s^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_s = k_s^2$ und die Annahme langsam veränderlicher Amplituden,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_s \ll k_s \frac{\partial}{\partial z} A_s$$

führt auf

$$-i k_s \frac{\partial}{\partial z} A_s e^{i(\omega_s t - k_s z)} + c.c. = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL,s}$$

Für die Phasenkongjugation seien alle Frequenzen ω und Polarisierungen gleich und weiter

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad , \quad \vec{k}_3 + \vec{k}_4 = 0$$

Wir interessieren uns zunächst für die Amplitude A_4 der Signalwelle, für die der folgende Polarisationsterm eine mögliche Quelle mit der gleichen Frequenz ω_4 bildet:

$$P_{NL,i} = 6 \varepsilon_0 (\chi_{ijkl} A_1 A_2 A_3^* + \chi_{ijji} A_1 A_1^* A_4 + \chi_{ikki} A_2 A_2^* A_4 + \chi_{iiii} A_4 A_4^* A_4 + \chi_{illi} A_3 A_3^* A_4) e^{i(\omega t - k_4 z)} + c.c.)$$

Alle Polarisationen seien gleich, d.h. nur χ_{iii} trägt bei, so dass

$$P_{NL,4} = 6 \varepsilon_0 \left(\chi_{iii} (A_1 A_2 A_3^* + A_1 A_1^* A_4 + A_2 A_2^* A_4) e^{i(\omega t - k_4 z)} + c.c \right)$$

Signal- und phasenkonjugierte Welle sind schwach im Vergleich zu den Pumpwellen, $A_3, A_4 \ll A_1, A_2$, d.h. die Terme $A_4 A_4^* A_4$ und $A_3 A_3^* A_4$ sind vergleichsweise klein und werden vernachlässigt

Damit erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d A_4}{d z} = -i \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon}} \chi^{(3)} (|A_1|^2 + |A_2|^2) A_4 - i \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \chi^{(3)} A_1 A_2 A_3^*$$

mit der Suszeptibilität $\chi^{(3)} = 6 \chi_{iii}$. Der erste Term auf der rechten Seite ändert die Ausbreitungskonstante k der Signalwelle 4 in der Form

$$k \rightarrow k + \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon}} \chi^{(3)} (|A_1|^2 + |A_2|^2)$$

und beschreibt damit den optischen Kerr-Effekt. Zur weiteren Vereinfachung werden daher neue Amplituden \tilde{A} eingeführt, die diesen zusätzlichen Phasenfaktor enthalten

$$A_s = \tilde{A}_s e^{-i(\omega/2 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 / \varepsilon} \chi^{(3)} (|A_1|^2 + |A_2|^2)) z}$$

mit $s = 1, 2, 3, 4$. Diese Notation impliziert den Fall ohne Pumpwellenerschöpfung, d.h. die Amplituden $A_{1,2}$ werden im Folgenden als konstant angesehen. Die Differentialgleichungen für die Signalwelle 4 und die phasenkonjugierte Welle 3 lauten dann

$$\frac{d \tilde{A}_3^*}{d z} = -i \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon}} \chi^{(3)*} \tilde{A}_1^* \tilde{A}_2^* \tilde{A}_4$$

$$\frac{d \tilde{A}_4}{d z} = -i \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon}} \chi^{(3)} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3^*$$

Führt man weiter die Kopplungskonstante κ ein,

$$\kappa = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon}} \chi^{(3)} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2$$

so lauten die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{d \tilde{A}_3}{d z} = i \kappa^* \tilde{A}_4^*$$

$$\frac{d \tilde{A}_4^*}{d z} = i \kappa \tilde{A}_3$$

Die allgemeinen Lösungen mit den Startwerten $\tilde{A}_3(L)$ und $\tilde{A}_4^*(0)$ sind

$$\tilde{A}_3(z) = \frac{\cos(|\kappa|z)}{\cos(|\kappa|L)} \tilde{A}_3(L) + i \frac{\kappa^*}{|\kappa|} \frac{\sin(|\kappa|(z-L))}{\cos(|\kappa|z)} \tilde{A}_4^*(0)$$

$$\tilde{A}_4(z) = -i \frac{|\kappa|}{\kappa} \frac{\sin(|\kappa|z)}{\cos(|\kappa|L)} \tilde{A}_3(L) + \frac{\cos(|\kappa|(z-L))}{\cos(|\kappa|z)} \tilde{A}_4^*(0)$$

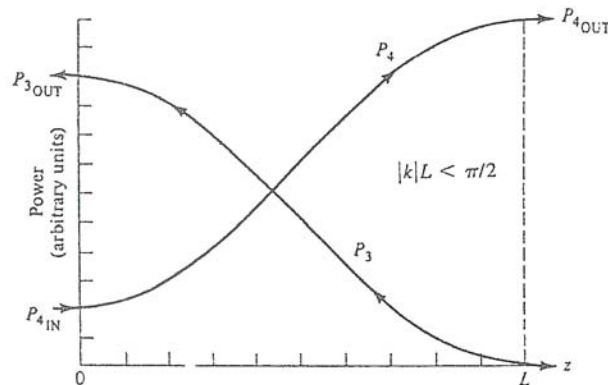


Figure 17-3 The intensity distribution inside the interaction region corresponding to the amplifier case $\pi/4 < |\kappa|L < \pi/2$.

Setzt man weiter $\tilde{A}_3(L) = 0$, so beträgt die Amplitude der resultierenden phasenkonjugierten Welle auf der Eintrittsfläche $z = 0$

$$\tilde{A}_3(0) = -i \frac{\kappa^*}{|\kappa|} \tan(|\kappa|L) \tilde{A}_4^*(0)$$

und die Signalwelle

$$\tilde{A}_4(L) = \frac{1}{\cos(|\kappa|L)} \tilde{A}_4(0)$$

d.h. neben der phasenkonjugierten Welle wird auch die Signalwelle verstärkt. Die Reflektivität des phasenkonjugierenden Spiegels lautet dann

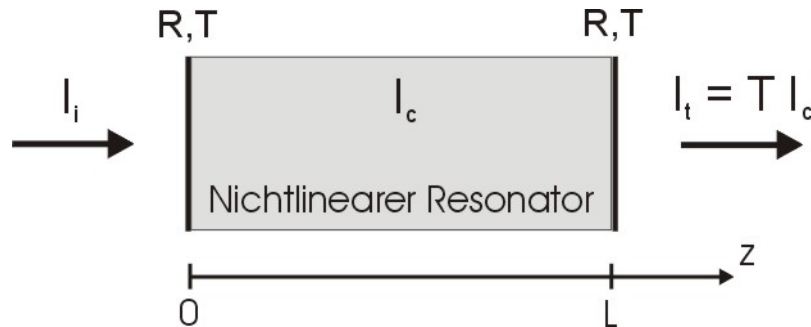
$$R_{pc} = \frac{I_3(0)}{I_4(0)} = \tan^2(|\kappa|L)$$

Die Werte der Reflektivität können damit größer als eins werden.

Von besonderem Interesse ist der Fall $|\kappa|L = \pi/2$. In diesem Fall werden sowohl die Verstärkung der Signalwelle als auch die der phasenkonjugierten Welle unendlich groß. Es kommt wie schon bei der parametrischen Rückwärtsverstärkung (siehe Kap. 4.5) zu einer Selbstoszillation ohne zusätzliche Spiegel.

6.2 Optische Bistabilität

Betrachtet wird ein Fabry-Perot-Resonator, der mit einem Material mit intensitätsabhängigem Brechungsindex gefüllt ist.



Für die Reflektivität R und Transmission T der Resonatorspiegel gilt $R + T = 1$. Für den Fabry-Perot-Resonator findet man allgemein die Transmissionsfunktion („Airy-Kurve“) als Verhältnis von transmittierter zu eingestrahelter Intensität

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{T^2 + 4R \sin^2(\varphi/2)}$$

mit der Phase φ für einen vollständigen Umlauf im Resonator der Länge L

$$\varphi = \frac{2\pi n}{\lambda} 2L$$

Für den nichtlinearen Brechungsindex gilt wieder $n = n^0 + n_2^I I_c$ mit der Intensität I_c im Resonator. Die Phase hängt damit von der Intensität ab

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} (n^0 + n_2^I I_c) \right) 2L \\ &= \varphi_0 + 2a I_t \end{aligned}$$

mit
$$a = \frac{2\pi n_2^I L}{\lambda T}$$

und der Phase φ_0 für den linearen Resonator. Für die relative Transmission ergibt sich somit das Verhältnis

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{T^2 + 4R \sin^2(\varphi_0/2 + a I_t)}$$

Die Funktion $I_t/I_i(I_t)$ beschreibt also eine intensitätsabhängige Airy-Kurve.

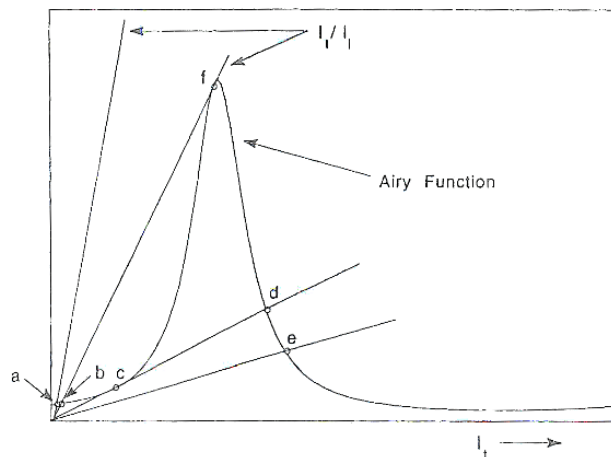


Figure 20 A graphical solution of intensity transmitted through a nonlinear Fabry-Perot étalon, illustrating optical bistability.

Die in der obigen Abbildung eingezeichneten Geraden beschreiben feste Verhältnisse $I_t/I_i = const.$. Die Schnittpunkte sind Lösungen der obigen Gleichung für eine bestimmte Intensität I_i . Zwei Schnittpunkte bedeutet hierbei Bistabilität: Für einen Wert von I_i sind zwei Quotienten I_t/I_i möglich.

Ein alternativer Lösungsansatz beruht auf dem Zeichnen der Funktion $I_i(I_t)$ und anschließendes Invertieren der Achsen. Dabei treten, je nach Wahl der Größe von φ_0 , die drei verschiedenen Lösungsarten Leistungsbegrenzung (a), differentielle Verstärkung (b) und Bistabilität (c) auf.

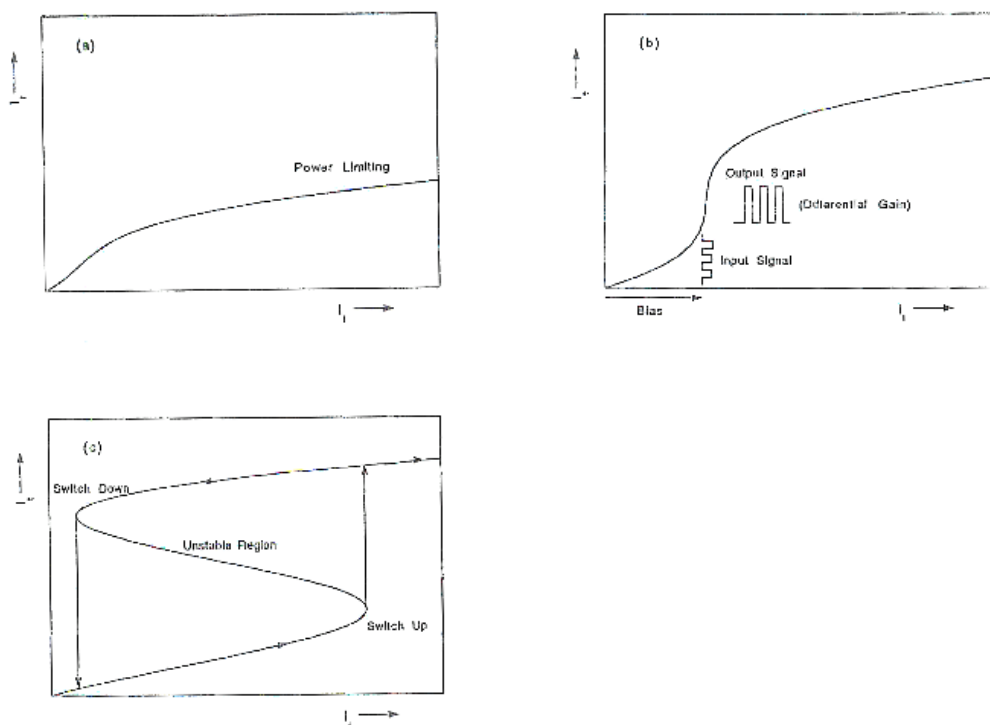


Figure 21 Transmitted intensity as a function of incident intensity for a nonlinear Fabry-Perot étalon for various detunings from resonance. (a) Power limiter. (b) Optical transistor. (c) Optical switching and bistability.

6.3 Selbstfokussierung und räumliche Solitonen

Wenn ein fokussierter Lichtstrahl auf ein nichtlineares Medium fällt mit der Eigenschaft $\Delta n(I) > 0$ des Materials, so kann eine lichtinduzierte Linse $\Delta n(I(x)) \equiv \Delta n(x)$ entstehen, die den Strahl fokussiert und der natürlichen räumlichen Dispersion eines gaußschen Strahls entgegenwirkt. Ein Spezialfall ist die Situation, wenn die räumliche Dispersion exakt durch Selbstfokussierung kompensiert wird. Man erhält so eine dispersionsfreie Wellenausbreitung oder eine solitäre Welle. Das solche Wellen unter bestimmten Voraussetzungen teilchenähnliche Eigenschaften aufweisen, werden sie als Solitonen bezeichnet.

Zur formalen Beschreibung räumlicher Solitonen wird die Wellenausbreitung in einem nichtlinearen Dielektrikum betrachtet. Das elektrische Feld der Welle sei

$$E(x, z, t) = \frac{1}{2} \left(E_0(x, z) e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \right)$$

Zur Vereinfachung wird nur eine transversale Dimension in x -Richtung zugelassen, so dass $\partial/\partial y = 0$ gilt. Die Welle läuft entlang der z -Richtung, wobei die Amplitude x und z abhängt. Diese Feld soll die nichtlineare Wellengleichung erfüllen, also

$$(\Delta + k'^2) E = 0$$

mit der Wellenzahl $k' = k_0 n$ und dem nichtlinearen Brechungsindex $n = n^0 + \Delta n(E)$:

$$\begin{aligned} k'^2 &= k_0^2 \left((n^0)^2 + 2n^0 \Delta n(E) + \Delta n^2(E) \right) \\ &\approx k_0^2 \left((n^0)^2 + 2n^0 \Delta n(E) \right) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung erhält man

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \underbrace{(k_0 n^0)^2}_{k^2} + k_0^2 2n^0 \Delta n(E) \right) E_0(x, z) e^{i(\omega t - kz)} = 0 \\ &\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}}_{\text{sehr klein}} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 + k^2 E_0 + k_0^2 2n^0 \Delta n(E) E_0 = 0 \\ &\frac{\partial E_0}{\partial z} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = \frac{i}{2k} k_0^2 2n^0 \Delta n(E) E_0 \end{aligned}$$

Es wird der Kerr-Fall betrachtet mit

$$\Delta n(E) = \frac{1}{2} n_2 |E_0|^2$$

wodurch man die folgende so genannte nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLS) erhält

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = \frac{ikn_2}{4} |E_0|^2 E_0$$

Es ist weiter bekannt, dass die nichtlineare Schrödinger-Gleichung solitäre Lösungen besitzt, z.B. die sech-Funktion:

$$E_0(x, z) = \hat{E}_0 \operatorname{sech} \left(\frac{x}{x_0} \right) \exp(i \kappa z)$$

mit
$$|\hat{E}_0|^2 = \frac{n^0}{2n_2} \left(\frac{1}{\kappa x_0} \right)^2 \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{1}{k x_0^2}$$

sowie
$$\operatorname{sech} \left(\frac{x}{x_0} \right) = \frac{2}{\exp(x/x_0) + \exp(-x/x_0)}$$

Hier ist x der Strahlradius der einfallenden Welle und x_0 eine Längeneinheit zur Normierung der vorkommenden Größen. Für eine solitäre Welle ändert sich die Größe von x bei Ausbreitung der Welle in dem nichtlinearen Medium nicht.

In einem selbstkonsistenten Bild zur Erzeugung räumlicher Solitonen erzeugt die Lichtwelle einen optischen Wellenleiter mit dem Brechzahlprofil $n(x)$. Dieser Wellenleiter besitzt als Grundmode gerade eine Intensitätsverteilung $I(x)$, welche wiederum die nichtlineare Brechungsindexänderung $n(x)$ erzeugt. Die Lichtwelle wird also in dem von ihr selbst erzeugten Wellenleiter eingefangen und geführt.

Solitonen in Kerr-Medien haben interessante Eigenschaften. Ihre Ausbreitung ist stabil gegenüber äußeren Störungen, es sind theoretisch beliebig lange, nur durch die Dämpfung begrenzte Ausbreitungsdistanzen möglich, und mehrere Kerr-Solitonen können sich gegenseitig durchdringen, ohne dass sie sich gegenseitig beeinflussen.

Eine analoge und formal gleiche Rechnung liefert ebenfalls zeitliche Solitonen. Als Resultat für den Kerr-Fall erhält man so eine mathematisch gleichwertige nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = i \frac{2\omega_0 n_2}{c} |E_0|^2 E_0$$

mit k_2 als Dispersion der Gruppengeschwindigkeit v_g

$$k_2 = \left. \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = - \left. \frac{1}{v_g} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$$

Eine interessante Anwendung ist die Signalübertragung in Glasfasern. Hier erhält man für den Wellenlängenbereich oberhalb einer Wellenlänge $1.3 \mu\text{m}$ eine negative Dispersion, also $k_2 < 0$, und gleichzeitig einen Kerr-Effekt mit $n_2 > 0$. Hierdurch kommt es bei passend eingestellter Intensität zu einer Balance von negativer Dispersion und Selbstphasenmodulation durch den Kerr-Effekt. Man erhält zeitliche Solitonen, d.h. Pulse, die sich bei Ausbreitung in der Faser nicht verbreitern und ihre Pulsform über theoretisch beliebig lange Strecken (bei verschwindender Dämpfung). Dieser Effekt wird zurzeit im Labormaßstab zur Datenübertragung über große Distanzen von einigen tausend Kilometern ohne Signalaufbereitung („Repeater“) benutzt.