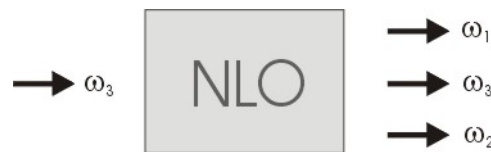


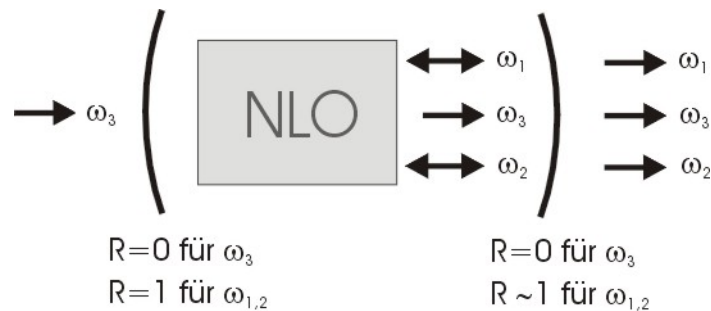
4. Parametrische Verstärkung und Oszillation

Bei der parametrischen Verstärkung wird eine Pumpwelle mit der Frequenz ω_3 eingestrahlt, wobei die Bedingung $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ erfüllt ist mit der Signalwelle der Frequenz ω_1 und der Idlerwelle der Frequenz ω_2 . Die Vorgehensweise zur mathematischen Beschreibung ist analog zur Frequenzverdopplung, nur dass hier der Energiefluss in umgekehrter Richtung erfolgt, d.h. von der Welle 3 in die beiden Wellen 1 und 2. Für den Fall $\omega_1 = \omega_2$ erhält man die exakte Umkehrung der Frequenzverdopplung, die so genannte entartete parametrische Verstärkung.

i) Optische Parametrische Verstärkung



ii) Optische parametrische Oszillation (OPO)



4.1 Parametrische Verstärkung

Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung der optischen parametrischen Verstärkung und Oszillation ist das Differentialgleichungssystem aus Kap. 3.1, wobei wieder zur Vereinfachung der folgende Ansatz gewählt wird:

$$A_l = \sqrt{\frac{n_l}{\omega_l}} E_l \quad , \quad l = 1, 2, 3$$

$$\frac{d A_1}{d z} = -\frac{\alpha_1}{2} A_1 - i \kappa A_2^* A_3 e^{-i \Delta k z}$$

$$\frac{d A_2^*}{d z} = -\frac{\alpha_2}{2} A_2^* + i \kappa A_1 A_3^* e^{i \Delta k z}$$

$$\frac{d A_3}{d z} = -\frac{\alpha_3}{2} A_3 - i \kappa A_1 A_2 e^{i \Delta k z}$$

mit der Phasendifferenz $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$, der Absorptionskonstante $\alpha_l = \sigma_l \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0 \epsilon_l}$ und der einheitlichen Kopplungskonstante

$$\kappa = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}}$$

Gesucht ist eine Lösung für den Fall der Phasenanpassung $\Delta k = 0$, vernachlässigbarer Absorption $\alpha_i = 0$ und in der Näherung ohne Pumpwellenerschöpfung, d.h. $A_3(z) = A_3(0)$.

Zur weiteren Vereinfachung definiert man die Kopplungskonstante

$$g = \kappa A_3(0)$$

$$\frac{d A_1}{d z} = -i g A_2^*$$

$$\frac{d A_2^*}{d z} = i g A_1$$

Das Gleichungssystem ist zu lösen mit den Randbedingungen

$$A_1(z=0) = A_1(0) \quad \text{und} \quad A_2(z=0) = A_2(0)$$

und dem frei wählbaren Phasenbezugspunkt

$$A_3(0) = A_3^*(0)$$

Die zugehörigen Lösungen sind

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh(gz) - i A_2^*(0) \sinh(gz)$$

$$A_2^*(z) = A_2^*(0) \cosh(gz) + i A_1(0) \sinh(gz)$$

Betrachtet wird eine Situation, wo die einfallende Pumpwelle 3 stark ist und die Signalwelle 1 schwach ist; die Idlerwelle sei Null, d.h. $A_2(0) \approx 0$.

$$|A_1(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \cosh^2(gz) \xrightarrow{gz \gg 1} \frac{1}{4} |A_1(0)|^2 e^{2gz}$$

$$|A_2(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \sinh^2(gz) \xrightarrow{gz \gg 1} \frac{1}{4} |A_1(0)|^2 e^{2gz}$$

d.h. sowohl die Signal- als auch die Idlerwelle werden exponentiell verstärkt.

Wenn nur die Pumpwelle in den Kristall eingestrahlt wird, kommt es aufgrund der optischen Fluoreszenz zu nicht verschwindenden Anfangsamplituden $A_{1,2}(0) \neq 0$. Ein einfallendes Photon der Frequenz ω_3 zerfällt spontan in zwei Photonen der Frequenzen ω_1 und ω_2 :

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

Dabei treten im Prinzip alle Frequenzen $0 \leq \omega_{1,2} \leq \omega_3$ auf.

Als Zahlenbeispiel wird die parametrische Verstärkung in LiNbO_3 betrachtet mit dem nichtlinearen Koeffizienten $d_{311} = d_{31} = 5 \times 10^{-23} \text{ As/V}^2$. Die Intensität des gepulsten Pumpasers sei $I_3 = 5 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$ und die Brechungsindizes $n_1 = n_2 = n_3 = 2.2$. Damit erhält man für die Amplitude E_3 des Pumplichtes der Frequenz ω_3

$$E_3 = \sqrt{2I_3 / (cn_3\epsilon_0)} \approx 4,1 \times 10^6 \text{ V/m}$$

und hieraus den Verstärkungskoeffizienten g

$$\begin{aligned} g &= \kappa A_3(0) = \sqrt{\frac{n_3}{\omega_3}} E_3 \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}} \\ &= \frac{d}{2} E_3 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\omega_1^2}{n_1^2}} \\ &= 0,33 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

Bei einer Kristalllänge von $L = 1 \text{ cm}$ ergibt dies eine moderate Verstärkung von $e^{2gL} \approx 2$.

Falls die Phasenanspassbedingung verletzt wird, so ergibt eine analoge Rechnung mit $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \left\{ A_1(0) \left[\cosh(bz) + \frac{i\Delta k}{b} \sinh(bz) \right] - \frac{ig}{b} A_2^*(0) \sinh(bz) \right\} e^{-\frac{i\Delta kz}{2}} \\ A_2^*(z) &= \left\{ A_2^*(0) \left[\cosh(bz) - \frac{i\Delta k}{b} \sinh(bz) \right] + \frac{ig}{b} A_1(0) \sinh(bz) \right\} e^{\frac{i\Delta kz}{2}} \end{aligned}$$

mit der Kopplungskonstante

$$b = \sqrt{g^2 - (\Delta k)^2}$$

Wichtig ist hierbei, dass nun der Parameter b von Δk abhängt. Dies bedeutet, erst wenn die Verstärkung $g \geq \Delta k$ wird, kann effektiv Energie von der Pumpwelle auf die Signal- und Idlerwelle übertragen werden. Falls dagegen $g < \Delta k$ ist, so ist b rein imaginär, d.h. die Energie bei den Frequenzen $\omega_{1,2}$ oszilliert mit der Ausbreitungsordinate z .

4.2 Parametrische Oszillation

Bei der parametrischen optischen Oszillation (OPO) unterscheidet man zwei Fälle, bei denen die Resonatorbedingung entweder gleichzeitig für ω_1 und ω_2 erfüllt ist (doppelt-resonanter OPO) oder nur für die Signalwelle ω_1 (einfach-resonanter OPO). In beiden Fällen sind die Resonatorspiegel in der Regel für die Pumpfrequenz ω_3 transparent.

Sobald die Verstärkung die internen Verluste im Resonator übersteigt, wie z.B. durch Reflexionsverluste oder die Absorption im nichtlinearen Kristall auftreten, oszilliert der Resonator mit den Frequenzen ω_1 und/oder ω_2 . Optisch parametrische Oszillatoren haben für die Wissenschaft eine große Bedeutung, da sie eine Konversion von kohärenter Strahlung des Pumplasers in kohärente Strahlung mit den Frequenzen ω_1 bzw. ω_2 und damit eine über einen großen Bereich abstimmbare kohärente Lichtquelle bilden. Anwendungen liegen insbesondere im Bereich der Spektroskopie, etwa im nahen infraroten Spektralbereich. Die beiden Abbildungen zeigen Beispiele für OPO's mit diskret aufgebautem Resonator sowie in monolithischer Bauweise.

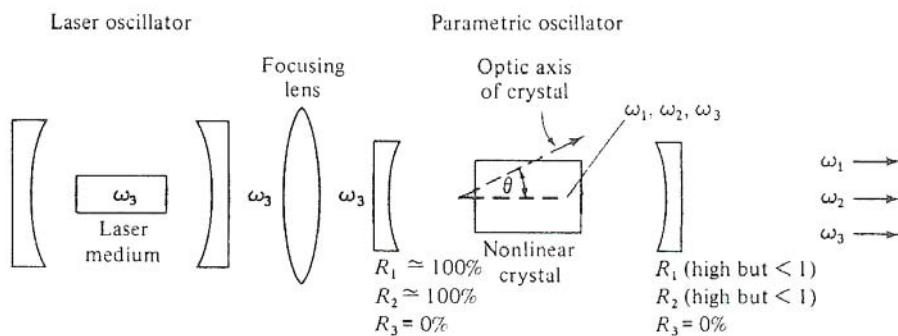


Figure 8-16 Schematic diagram of an optical parametric oscillator in which the laser output at ω_3 is used as the pump, giving rise to oscillations at ω_1 and ω_2 (where $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) in an optical cavity that contains the nonlinear crystal and resonates at ω_1 and ω_2 .

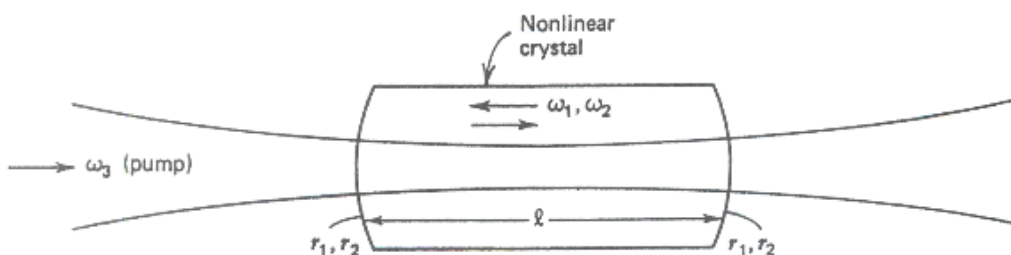


FIGURE 17.2 A crystal parametric oscillator.

Eine wichtige Größe eines optisch parametrischen Oszillators ist die notwendige Eingangsleistung, bei der die Oszillation der Wellen 1 und 2 einsetzt, d.h. die Größe der Pumpschwelle. Diese soll im Folgenden in einem stark vereinfachten Modell berechnet werden.

Gesucht ist also eine Lösung von

$$\frac{d A_1}{d z} = -\frac{\alpha_1}{2} A_1 - i g A_2^* e^{-i \Delta k z}$$

$$\frac{d A_2^*}{d z} = -\frac{\alpha_2}{2} A_2^* + i g A_1 e^{i \Delta k z}$$

mit
$$g = \kappa A_3(0) = \frac{d}{2} E_3(0) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2}}$$

für den Fall der Phasenanpassung $\Delta k=0$ und im stationären Zustand $d / dz=0$.

Die gekoppelten Differentialgleichungen mit dem Schwellwert g_t der Mindestverstärkung für Oszillation lassen sich in Matrixform schreiben,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_1}{2} A_1 - i g_t A_2^* &= 0 \\ i g_t A_1 - \frac{\alpha_2}{2} A_2^* &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha_1/2 - i g_t \\ i g_t - \alpha_2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2^* \end{pmatrix} = 0$$

die sich durch Null setzen der Determinante lösen lässt:

$$(-\alpha_1/2)(-\alpha_2/2) - (-i g_t)(i g_t) = 0$$

$$g_t^2 = \frac{1}{4} \alpha_1 \alpha_2 \cong \frac{1}{4 L^2} (1 - R_1)(1 - R_2)$$

Bei der hier gemachten Näherung kleiner Absorptionsverluste wurden die Dämpfungen $\alpha_{1,2}$ in den Reflektivitäten $R_{1,2}$ der Spiegel berücksichtigt. In einem Resonator der Länge L_R sei der Verlust pro Durchlauf

$$e^{-\alpha_i L_R} = R_i$$

Mit der Entwicklung der exp-Funktion für kleine Argumente, $\exp(x) \approx 1 - x$ erhält man dann

$$\alpha_i L \approx 1 - R_i$$

Für eine selbstkonsistente Lösung für den OPO muss zusätzlich die Phasenbeziehung der Wellen bei einem Umlauf im Resonator berücksichtigt werden. An den Resonatorspiegel werden Signal-/Idlerwelle reflektiert; die Reflexion bezüglich der Feldamplituden A_i sei M_i , also

$$(M_i)^2 = R_i e^{2i\phi_i}, \quad i = 1, 2$$

mit dem Phasensprung ϕ_i bei Reflexion.

Die Reflexion ist Null für die Pumpwelle, also $M_3 = 0$. Für die Amplituden der Signalwelle 1 und der Idlerwelle 2 erhält man somit

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) e^{-ik_1 z} \\ A_2^*(z) e^{+ik_2 z} \end{pmatrix}$$

mit
$$k_i = \frac{2\pi n_i}{\lambda_i} = \frac{\omega_i n_i}{c}$$

Als Lösung für den Fall der exakten Phasenanpassung $\Delta k = 0$ erhält man wie schon bei der parametrischen Verstärkung die Lösung

$$A(L) = \begin{pmatrix} \cosh(gL) e^{-ik_1 L} & -i \sinh(gL) e^{-ik_1 L} \\ i \sinh(gL) e^{ik_2 L} & \cosh(gL) e^{ik_2 L} \end{pmatrix} A(0)$$

In einem Resonator muss sich die Amplitude $A(L)$ nach einem kompletten Umlauf selber reproduzieren, d.h. es ist $A'(L) = A(L)$ mit $A'(L)$ als Amplitude nach einem Umlauf.

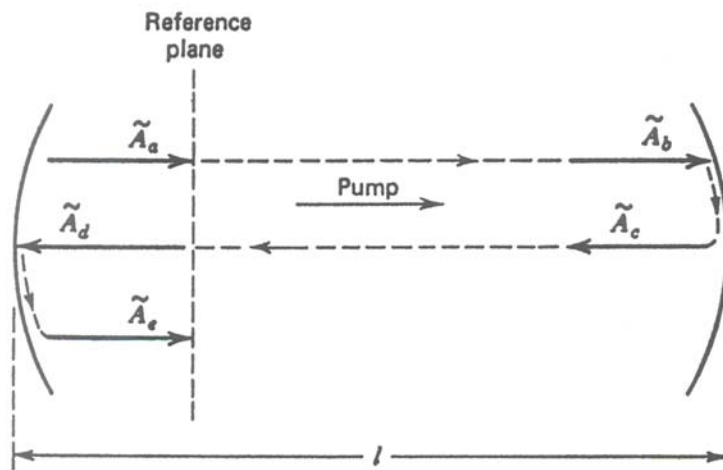


FIGURE 17.3 The round-trip propagation of the idler-signal vector \tilde{A} is used in deriving the oscillation condition (17.2-12).

Die Amplitude nach einem Umlauf lautet dann

$$A'(L) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(gL) e^{-ik_1 L} & -i \sinh(gL) e^{-ik_1 L} \\ i \sinh(gL) e^{ik_2 L} & \cosh(gL) e^{ik_2 L} \end{pmatrix} A(L)$$

Reflexion linker Spiegel
Durchlauf von rechts nach links ($g=0$)
Reflexion rechter Spiegel
Durchlauf von links nach rechts mit $g \neq 0$

oder $A'(L) = M A(L)$ mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} M_1^2 \cosh(gL) e^{-2ik_1 L} & -i M_1^2 \sinh(gL) e^{-2ik_1 L} \\ i (M_2^*)^2 \sinh(gL) e^{2ik_2 L} & (M_2^*)^2 \cosh(gL) e^{2ik_2 L} \end{pmatrix}$$

Die Bedingung zur Selbstkonsistenz lautet

$$A_L^i(L) = M A(L) \quad \text{oder} \quad (M - I) A(L) = 0$$

mit
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also
$$\det(M - I) = 0$$

Damit erhält man die Oszillationsbedingung für den OPO

$$(M_1^2 \cosh(gL) e^{-2ik_1L} - 1) \left((M_2^*)^2 \cosh(gL) e^{2ik_2L} - 1 \right) = M_1^2 (M_2^*)^2 \sinh^2(gL) e^{2i(k_2 - k_1)L}$$

Wir nehmen weiter an, dass sowohl ω_1 als auch ω_2 Moden des Resonators sind und damit die Phase ein Vielfaches von 2π beträgt:

$$-2\phi_1 + 2k_1L = 2m\pi$$

$$-2\phi_2 + 2k_2L = 2n\pi$$

mit den ganzen Zahlen m und n . Mit den komplexen Reflexionskoeffizienten

$$(M_{1,2})^2 = R_{1,2} e^{2i\phi_{1,2}}$$

erhält man das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} M_{1,2}^2 e^{-2ik_{1,2}L} &= R_{1,2} e^{2i\phi_{1,2}L} e^{-2ik_{1,2}L} \\ &= R_{1,2} e^{2i(m\pi + k_{1,2}L)} e^{-2ik_{1,2}L} \\ &= R_{1,2} e^{i2m\pi} = R_{1,2} \end{aligned}$$

und damit

$$(R_1 \cosh(gL) - 1)(R_2 \cosh(gL) - 1) = R_1 R_2 \sinh^2(gL)$$

Mit der Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ lautet die Amplitudenbedingung für Oszillation

$$\cosh(gL) = \frac{1 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter nähern mit $\cosh(x) \approx 1 + x^2/2$

$$(gL)^2 = \frac{2}{R_1 + R_2} (1 - R_1)(1 - R_2) \approx (1 - R_1)(1 - R_2)$$

Die notwendige Verstärkung für Oszillation ist dann

$$g = g_t = \frac{1}{L} \sqrt{(1 - R_1)(1 - R_2)}$$

Betrachtet wird das folgende Zahlenbeispiel für die Berechnung der Pumpschwelle eines optisch parametrischen Oszillators in monolithischer Bauweise in LiNbO₃ mit dem nichtlinearen Koeffizienten $d_{31} = 5 \times 10^{-23} \text{ As/V}^2$. Die Brechungsindizes betragen $n_1 = n_2 = n_3 = 2.2$, die Frequenzen $\omega_1 = \omega_2 = 6\pi \times 10^{14} \text{ Hz}$ (Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$), die Kristalllänge $L = 5 \text{ cm}$ und die Reflektivitäten $R_1 = R_2 = 98 \%$. Dies lässt sich z.B. erreichen mit einer Pumpwellenlänge $\lambda_3 = 514 \text{ nm}$ eines Ar⁺-Lasers. Damit gilt für die Pumpschwelle

$$g_{th} = \frac{1}{L} \sqrt{(1-R_1)(1-R_2)} = \frac{d}{2} E_{3,th}(0) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2}}$$

$$I_{3,th} = \frac{cn_3 \varepsilon_0}{2} |E_{3,th}(0)|^2$$

$$= \frac{cn_3 \varepsilon_0}{2} \frac{4}{L^2 d^2} (1-R_1)(1-R_2) \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \frac{n_1 n_2}{\omega_1 \omega_2}$$

$$= 1.4 \times 10^7 \text{ W/m}^2 = 1400 \text{ W/cm}^2$$

Dies entspricht einer vergleichsweise geringen Intensität und bedeutet damit eine niedrige Pumpschwelle für den optischen parametrischen Oszillator. Ein Vorteil von OPO's ist daher, dass sie mit vergleichsweise günstigen PumpLasern (z.B. Ar⁺-Laser oder frequenzverdoppelte Nd:YAG-Laser) mit moderater Pumpleistung im Wattbereich betrieben werden können.

Nun soll die Ausgangsleistung bzw. die Effizienz eines optisch parametrischen Oszillators berechnet werden. Analog zum Laser gilt hierbei, dass oberhalb der Pumpschwelle g_{th} die Verstärkung immer konstant auf der Wert der Pumpschwelle verharrt, dass also gilt $g = g_{th} = const.$. Gleichzeitig ist aber die Pumpschwelle auch proportional zur Amplitude der Pumpwelle

$$g = g_{th} \sim E_3 = E_{3,th} = const.$$

Man spricht hierbei von Pumpsättigung oder ‚pump saturation‘. Als direkte Folge der Energieerhaltung wird die überschüssige Leistung der Pumpwelle zur Verstärkung von Signal- und Idlerwelle aufgewendet. Mit der Energie W der Welle mit $W = N \hbar \omega$ erhält man das Ergebnis, dass die Anzahl N der Photonen proportional zum Quotienten aus Leistung P und Frequenz ω der Welle ist

$$N = \frac{W}{\hbar \omega} \sim \frac{P}{\omega}$$

Teilchenzahlerhaltung, d.h. der ‚Zerfall‘ eines überschüssigen Pumpphotons in je ein Signal- und Idlerphoton, ist dann gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{P_3 - (P_3)_{th}}{\omega_3}$$

$$= \frac{(P_3)_{th}}{\omega_w} \left(\frac{P_3}{(P_3)_{th}} - 1 \right)$$

Eine hohe Verstärkung erfordert also eine große Pumpüberhöhung

$$\frac{P_3}{(P_3)_{th}} \gg 1$$

Das Pumpverhalten eines OPO's ist in der folgenden Abbildung dargestellt für den zeitlichen Verlauf eines Pumpulses sowie des erzeugten Signalpulses. Deutlich zu sehen ist das gleiche Zeitverhalten der überschüssigen Pumpleistung $P_3 - (P_3)_{th}$ und der darauf normierten Leistung des Signalpulses.

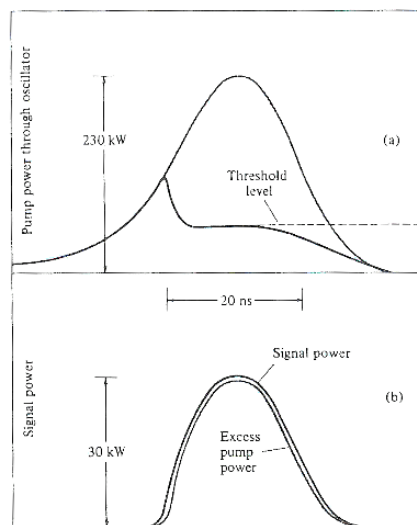


Figure 8-19 Power levels and pumping in a parametric oscillator. (a) Waveforms of P_3 , the pump power passing through the oscillator. The gray waveform was obtained when the crystal was rotated so that oscillation did not occur; the solid waveform was obtained when oscillation took place. (b) Signal power and excess pump power. The gray waveform is the normalized difference between the waveforms in (a). (After Reference [19].)

Die folgende Diskussion soll zeigen, dass an die Stabilität des Resonators beim doppelt resonanten OPO hohe Anforderungen gestellt werden müssen. Für den Betrieb des OPO müssen gleichzeitig die Energieerhaltung (1), die Phasenanpassungsbedingung (2) sowie die Bedingung, dass sowohl Signal- als auch Idlerwelle Resonatormoden sind (3), erfüllt sein:

$$(1) \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$(2) \quad k_3 = k_1 + k_2$$

bzw.
$$n_3 \omega_3 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$$

$$(3) \quad 2k_i L = \frac{2\omega_i n_i L}{c} = 2\phi_i + 2m\pi$$

bzw.
$$\frac{\omega_i n_i L}{c} = m\pi + \phi_i = \text{const.}$$

Energieerhaltung ist demnach gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\Delta\omega_1 = -\Delta\omega_2$$

Ableitung der Frequenz ω_i in der Beziehung für die Resonatormoden nach der Resonatorlänge L führt aber auf

$$\frac{d\omega_1}{\omega_1} = \frac{d\omega_2}{\omega_2} = -\frac{dL}{L}$$

wobei hier $d\omega_i$ eine infinitesimal kleine Frequenzänderung sein soll. Beide Bedingungen sind nur für $\Delta\omega \gg d\omega$ simultan zu erfüllen. Dies bedeutet, dass bei einer kleinen Änderung der Resonatorlänge (z.B. aufgrund von Vibrationen oder thermischer Ausdehnung) die Frequenz der Signal- und Idlerwelle um den Betrag $\Delta\omega$ springen, bis das nächste passende Paar Resonanzfrequenzen $\Delta\omega = \Delta\omega_1 = -\Delta\omega_2$ getroffen wird. Die Größe von $\Delta\omega$ wird durch den longitudinalen Modenabstand des Resonators bestimmt:

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{L} \frac{1}{(n_1 - n_2)}$$

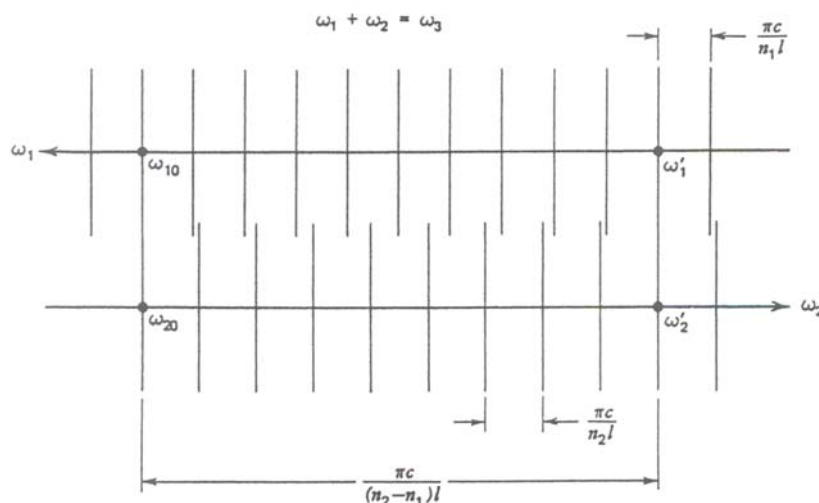


FIGURE 17.4 A construction illustrating how the oscillation phase conditions (17.2-18) can be satisfied simultaneously at both (ω_1, ω_2) and at (ω'_1, ω'_2) . Note that the ω_1 scale and ω_2 scale increase in opposite directions so that at any position on this diagram $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. The vertical lines correspond to the individual longitudinal resonances of the idler and signal frequencies.

Die Frequenzabstimmung eines OPO's erfolgt über die Änderung der Phasenanpassungsbedingung. Wie auch bei der Frequenzverdopplung stehen hierbei wieder die Möglichkeiten zur Einstellung eines Phasenanpasswinkels über ein Drehen des nichtlinearen Kristalls (Typ I und II) oder einer Temperaturänderung zur Verfügung. Allerdings müssen hierbei wieder stets Energieerhaltung, Phasenanpassbedingung und die Resonatorbedingung für ω_1 und ω_2 erfüllt sein. Der Abstimmbereich beträgt hierbei theoretisch $\omega_3 > \omega_1 > 0$.

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen Beispiele für die Abstimmöglichkeit über eine Winkeländerung sowie über Temperaturänderung.

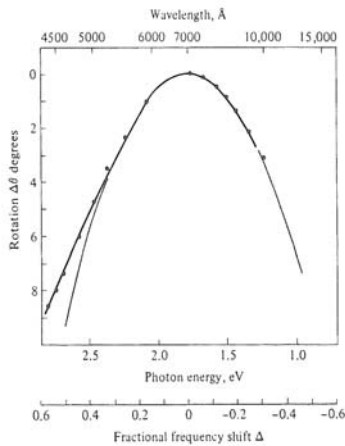


Figure 8-17 Dependence of the signal (ω_1) frequency on the angle between the pump propagation direction and the optic axis of the ADP crystal. The angle θ is measured with respect to the angle for which $\omega_1 = \omega_j/2$. $\Delta = (\omega_1 - \omega_j/2)/(\omega_j/2)$. (After Reference [17].)

SECOND-HARMONIC GENERATION AND PARAMETRIC OSCILLATION

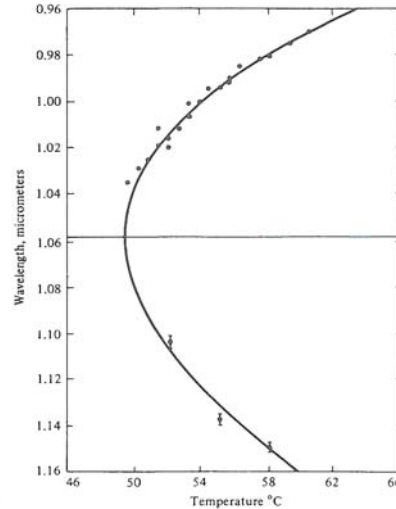


Figure 8-18 Signal and idler wavelength as a function of the temperature of the oscillator crystal. (After Reference [15].)

Die untere Abbildung zeigt ein kommerzielles OPO-System MOPO-HF der Firma Spectra-Physics. Im gepulsten Betrieb mit einer Pumpwellenlänge von $\lambda_p = 355$ nm, einer Pumpimpulsdauer $\tau = 3$ ns, einer Wiederholrate $f = 10$ Hz und einer Pulsenergie von 475 mJ pro Puls erhält man eine Ausgangsleistung bzw. -energie von 0.7 W (zeitlicher Mittelwert) bzw. 70 mJ pro Puls bei einer Signalwellenlänge von 500 nm. Damit beträgt die nur auf die Signalwellenlänge bezogene Effizienz ca. 15 %. Der Abstimmbereich des Systems liegt bei Wellenlängen von 400 nm bis 2 μ m.



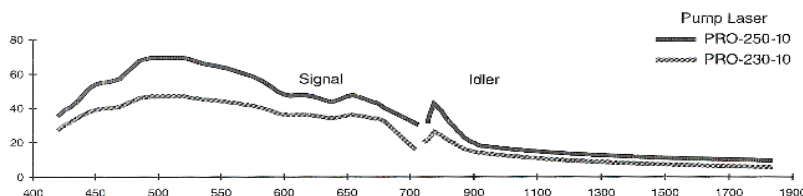
MOPO Series Optical Parametric Oscillator MOPO-HF

MOPO Output Characteristics	MOPO-HF
Polarization	Horizontal > 97%
Beam Diameter (typical) ²	> 5 mm
Beam Shape (typical) ³	Round $\pm 20\%$
Beam Divergence ⁴	< 1 mrad
Pointing Stability ⁵	< 200 μ rad
Pulse Width (typical)	2 ns Less Than Pump
Recastability	< 1 x Linewidth
Electronic Readout Accuracy (typical)	< 10 x Linewidth
Long-Term Stability	< 1 x Linewidth/°C/hr
Pulse-to-Pulse Stability ⁶	$\pm 10\%$
Timing Jitter ⁷	< 2 ns
Mean Linewidth ⁸	< .075 cm^{-1}

Pump Laser (with BeamLok option)	Output Energy ⁹
PRO-290-10	75 mJ
PRO-290-20	45
PRO-270-10	70
PRO-270-20	40
PRO-250-10	60
PRO-250-20	35
PRO-230-10	40

Tuning Characteristics ¹⁰	
Signal Tuning Range (typical)	450-705 nm
Idler Tuning Range (typical)	715-1800 nm

MOPO-HF Tuning Curve



Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch der Fall eines einfach resonanten optischen parametrischen Oszillator diskutiert, bei dem nur die Signalwelle ist eine Mode des Resonators ist. Die Idlerwelle breitet sich dagegen wie die Pumpwelle nur in Vorwärtsrichtung aus.

Dies ermöglicht eine nicht kollineare Phasenanpassung, bei der sich alle drei Wellen in verschiedenen Richtungen im nichtlinearen Kristall ausbreiten.

Die Phasenanpassbedingung lautet dann in vektorieller Schreibweise

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$$

Man nutzt dabei aus, dass sich zum einen die Größe von $|\vec{k}_1|$ (d.h. die Frequenz ω_1) und zum anderen die Größe $|\vec{k}_2|$ und Richtung $\vec{k}_2/|\vec{k}_2|$ der Idlerwelle automatisch einstellen. Die Richtung von \vec{k}_1 wird durch den Resonator vorgegeben. Die folgende Abbildung zeigt schematisch die Geometrie, wobei das zusätzliche Prisma eine Veränderung der Richtung der Pumpwelle ω_3 gestattet. Hierüber kann die Frequenz ω_1 der Signalwelle eingestellt werden.

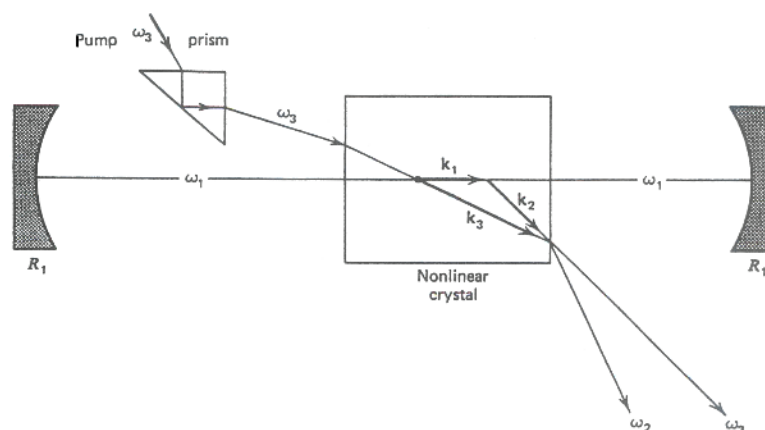


FIGURE 17.5 Singly resonant optical parametric oscillator with noncollinear phase matching.
 Source: Reference 7.

Zur Berechnung der Pumpschwelle geht man aus vom Ergebnis für den doppelt resonanten Fall,

$$\left(M_1^2 \cosh(gL) e^{-2ik_1L} - 1 \right) \left((M_2^*)^2 \cosh(gL) e^{2ik_2L} - 1 \right) = M_1^2 (M_2^*)^2 \sinh^2(gL) e^{2i(k_2 - k_1)L}$$

und setzt nun $M_2 = 0$, da die Idlerwelle nicht reflektiert wird. Damit lautet die Transfermatrix

$$M = \begin{pmatrix} M_1^2 \cosh(gL) e^{-2ik_1L} & -iM_1^2 \sinh(gL) e^{-2ik_1L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und über die Bedingung $\det(M - I) = 0$ erhält man die Lösung

$$M_1^2 \cosh(gL) e^{-2ik_1L} = 1$$

oder
$$R_1 e^{2i\phi_1} \cosh(gL) e^{-2ik_1L} = 1$$

Die zugehörigen Amplituden- und Phasenbedingungen lauten dann

$$R_1 \cosh(gL) = 1$$

und
$$\phi_1 - k_1 L = m\pi$$

Die Phasenbedingung entspricht dem Fall beim doppelt resonanten Oszillator, nur dass nun keine gleichzeitige Bedingung für die Phase der Idlerwelle existiert. Damit wird das Problem der Phaseninstabilität stark vermindert; insbesondere vermeidet man die beim doppelt resonanten Fall auftretenden Frequenzsprünge.

Aus der Amplitudenbedingung erhält man für kleine Argumente der cosh-Funktion ($gL \ll 1$) die Pumpschwelle g_t

$$\cosh(g_t L) = \frac{1}{R_1} \approx 1 + (g_t L)^2 / 2$$

$$(g_t L)^2 = \frac{2}{R_1} - 2$$

Für den Fall $R_1 \approx 1$ erhält man

$$g_t L \approx \sqrt{2} \sqrt{1 - R_1}$$

Interessant ist ein Vergleich der Pumpschwellen im einfach und doppelt resonanten Oszillator

$$\left(\frac{g_t L_{\text{einfach res.}}}{g_t L_{\text{doppelt res.}}} \right)^2 = \frac{2(1 - R_1)}{(1 - R_1)(1 - R_2)} = \frac{2}{1 - R_2}$$

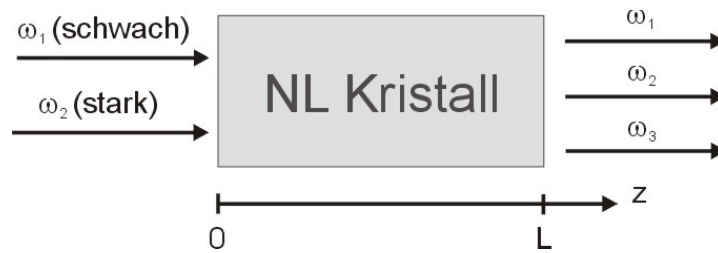
Da üblicherweise $R_2 \approx 1$ gilt, ist dieses Verhältnis groß gegen eins. Aufgrund der geringen totalen Verstärkung im einfach resonanten Fall ist die Pumpschwelle also um ein Vielfaches höher. Die Effizienz zur Erzeugung der Signalwelle ω_1 kann jedoch vergleichbar groß sein wie im doppelt resonanten Fall.

4.3 Frequenz Auf-Konversion

Bisher wurde nur der klassische Fall eines OPO's mit der Beziehung $\omega_3 > \omega_1, \omega_2$ behandelt, d.h. die Erzeugung kleinerer Frequenzen bzw. größerer Wellenlängen mit Hilfe einer starken Pumpwelle. Ebenfalls möglich ist aber die Konversion einer kleinen Frequenz ω_1 in eine größere Frequenz ω_3 mit Hilfe einer starken Pumpwelle ω_2 , so dass wieder gilt

$$\omega_3 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{schwache} \\ \text{Signalwelle}}}{\omega_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pumpwelle}}}{\omega_2}$$

Diesen Fall bezeichnet man als ‚Frequenz-Auf-Konversion‘.



Eine Anwendung der Auf-Konversion („Frequency Up-Conversion“) ist die Detektion von IR-Strahlung, d.h. die Umwandlung von infrarotem Licht in sichtbares Licht der Frequenz ω_3 . Dies erlaubt zur Detektion die Benutzung von schnellen Halbleiterdetektoren.

Die theoretische Analyse erfolgt wieder mit dem bekannten Differentialgleichungssystem für den Fall ohne Pumpwellenerschöpfung, d.h. $A_2 = const.$, vernachlässigbarer Absorption $\alpha_i = 0$ und exakter Phasenanpassung $\Delta k = 0$:

$$\frac{d A_1}{d z} = -i g A_3$$

$$\frac{d A_3}{d z} = -i g A_1$$

mit
$$g = \frac{d}{2} E_2(0) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_3}{n_1 n_3}}$$

und
$$E_2(0) = A_2(0) \sqrt{\frac{\omega_2}{n_2}}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$A_1(z) = A_1(0) \cos(gz) - i A_3(0) \sin(gz)$$

$$A_3(z) = A_3(0) \cos(gz) - i A_1(0) \sin(gz)$$

Im Normalfall gilt $A_3(0) = 0$

$$|A_1(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \cos^2(gz)$$

$$|A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \sin^2(gz)$$

mit der Nebenbedingung der Energieerhaltung

$$|A_1(z)|^2 + |A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2$$

Intensität ist Leistung pro Fläche, $I = P/A$, also

$$\frac{P_i}{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \omega_i |A_i|^2$$

mit der (effektiven) Querschnittsfläche A . Damit erhält man

$$P_1(z) = P_1(0) \cos^2(gz)$$

$$P_3(z) = \frac{\omega_3}{\omega_1} P_1(0) \sin^2(gz)$$

Die Konversionseffizienz für einen Kristall der Länge L ist dann

$$\eta = \frac{P_3(L)}{P_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \sin^2(gL)$$

mit dem Maximalwert für $gL = \pi/2$

$$\eta_{\max} = \frac{\omega_3}{\omega_1} > 1$$

Dies bedeutet, dass alle Photonen mit der Frequenz ω_1 konvertiert werden in Photonen der Frequenz ω_3 . Typische experimentelle Werte für die Effizienz sind $\eta \ll 1$, d.h. man kann die Sinus-Funktion entwickeln mit $\sin(x) \approx x$, $x \ll 1$ und erhält

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_3(L)}{P_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} (gL)^2 \\ &= 8L^2 d^2 \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{3/2} \frac{\omega_3^2}{n_1 n_2 n_3} \frac{P_2}{A} \end{aligned}$$

Als Beispiel wird die Detektion der Strahlung eines CO₂-Lasers mit der Wellenlänge $\lambda_1 = 10.6 \mu\text{m}$ gewählt. Für diesen Wellenlängenbereich existieren nur sehr eingeschränkt schnelle Detektoren. Stattdessen benutzt man meist langsame pyroelektrische Detektoren mit typischen Zeitkonstanten im Bereich von $\tau \approx 0.1 - 1 \text{ s}$. Alternativ lassen sich Halbleiterdetektoren mit geringer Bandlücke benutzen, die allerdings zur Verringerung des Eigenrauschens mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden müssen. Zur Detektion über Auf-Konversion wird als Pumplaser ein Nd:YAG- bzw. Nd:YVO₄-Laser der Wellenlänge $\lambda_2 = 1064 \text{ nm}$ benutzt. Die generierte Welle ω_3 hat dann die Wellenlänge

$$\lambda_3 = \frac{2\pi c}{\omega_1 + \omega_2} = 960 \text{ nm}$$

Diese Wellenlänge ist mit Hilfe von schnellen Halbleiter-Si-Detektoren sehr gut detektierbar.

Ein geeigneter nichtlinearer Kristall für den infraroten Spektralbereich ist das Material Proustit (Ag_3AsS_3) dessen Absorption bis zu Wellenlängen von über $10\ \mu\text{m}$ vernachlässigbar gering ist. Die Pumpintensität des Nd:YAG-Laser sei $P_2/A = 10^8\ \text{W}/\text{cm}^2$, die Kristalllänge betrage $L = 1\ \text{cm}$, die Brechungsindizes seien $n_1 = n_2 = n_3 = 2.6$ und der effektive nichtlineare Koeffizient ist $d_{\text{eff}} = 1.1 \times 10^{-22}\ \text{As}/\text{V}^2$. Damit erhält man die Effizienz

$$\eta = \frac{P_3(L)}{P_1(0)} \approx 1\ \%$$

Entsprechende Experimente mit dem Kristall Lithiumjodat (LiIO_3) und einem Rubinlaser ($\lambda_2 = 694.3\ \text{nm}$) als Pumplaser zur Detektion der Wellenlänge $\lambda_3 = 3.39\ \mu\text{m}$ ergeben eine sehr hohe Effizienz von $\eta \approx 100\ \%$.

4.4 Parametrische Rückwärts-Verstärkung und Oszillation

Bei der parametrischen Rückwärtsverstärkung oder kurz BPO, "Backward Parametric Oscillation" laufen Signal- und Idlerwelle in entgegengesetzten Richtungen:

$$A_1(z,t) = A_1(z) e^{i(\omega_1 t + k_1 z)}$$

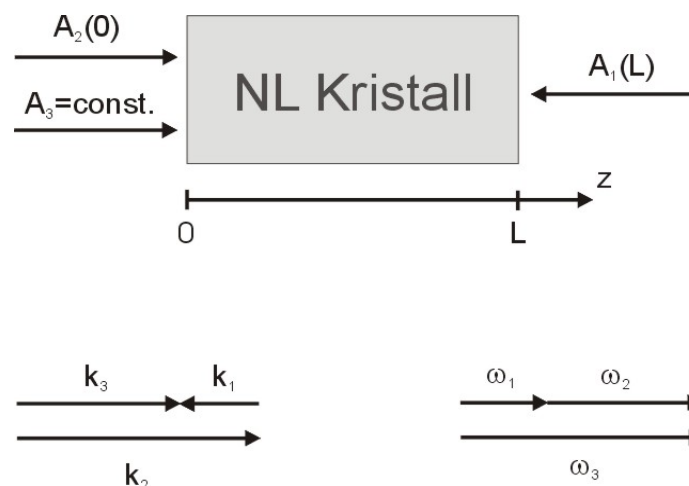
$$A_2(z,t) = A_2(z) e^{i(\omega_2 t - k_2 z)}$$

Die Amplitude A_3 der Pumpwelle wird wieder konstant gesetzt (einfacher Fall ohne Pumpwellenerschöpfung). Die Signalwelle breitet sich in $-z$ -Richtung aus ($k_1 \rightarrow -k_1$):

$$\frac{d A_1}{d z} = + \frac{\alpha_1}{2} A_1 + i g A_2^* e^{-i \Delta k z}$$

$$\frac{d A_2^*}{d z} = - \frac{\alpha_2}{2} A_2^* + i g A_1 e^{i \Delta k z}$$

mit der Energieerhaltung $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ und der veränderten Phasen Anpassbedingung $\Delta k = k_3 - k_2 + k_1$. Die folgende Abbildung zeigt den schematischen Aufbau.



Als Randbedingungen werden $A_2(0), A_1(L)$ vorgegeben. Die Lösung für den einfachsten Fall $\alpha_i = 0, \Delta k = 0$ lautet dann

$$A_1(z) = \frac{A_1(L)}{\cos(gL)} \cos(gz) + i \frac{A_2^*(0)}{\cos(gL)} \sin(g(z-L))$$

$$A_2^*(z) = i \frac{A_1(L)}{\cos(gL)} \sin(gz) + \frac{A_2^*(0)}{\cos(gL)} \cos(g(z-L))$$

Die resultierenden Felder an den Endflächen sind

$$A_1(0) = \frac{A_1(L)}{\cos(gL)} - i A_2^*(0) \tan(gL)$$

$$A_2^*(L) = i A_1(L) \tan(gL) + \frac{A_2^*(0)}{\cos(gL)}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall $gL = \pi/2$ bzw. $\cos(gL) = 0$. Für diesen Fall geht der Nenner gegen Null und es ist

$$\lim_{gL \rightarrow \pi/2} A_1(0) = \infty$$

$$\lim_{gL \rightarrow \pi/2} A_2^*(L) = \infty$$

für jeden beliebigen Anfangswert $A_1(L) > 0, A_2^*(0) > 0$. Falls die Anfangsamplituden gleich Null sind, d.h. $A_1(L) = 0, A_2^*(0) = 0$, so erhält man trotzdem endliche Werte für $A_1(0)$ und $A_2^*(L)$.

Für den Fall $gL \rightarrow \pi/2$ und $A_1(L) = A_2(0) = A$ lauten die Feldamplituden

$$A_1(z) = i A \sin(g(z-L))$$

$$A_2^*(z) = A \cos(g(z-L))$$

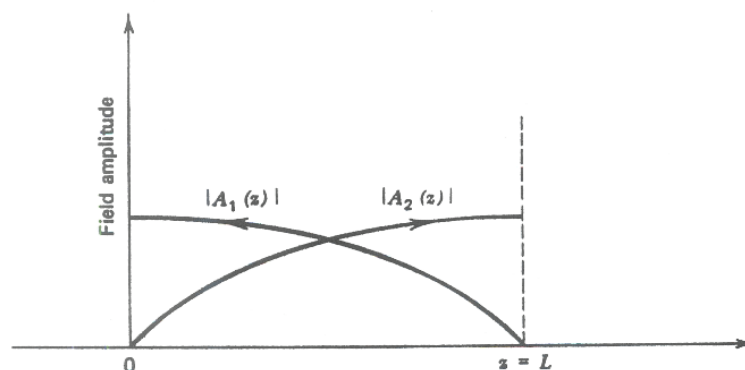


FIGURE 17.17 The signal A_1 and idler A_2 fields in a contradirectional parametric oscillator.

Es kommt hierbei zu einer Oszillation ohne äußere Spiegel ("Mirror-less oscillation"). Die Rückkopplung erfolgt über die entgegengesetzt laufenden Wellen ("BPO", Backward Parametric Oscillator), analog zum DFB-Laser.

Ein nicht unwichtiges Problem ist, dass sich ein solcher Oszillator bisher (zumindest optisch) nicht realisieren lässt. Für den Betrieb sind zwei Bedingungen zu erfüllen, zum einen die Energieerhaltung, die $\omega_3 > \omega_2$ fordert, und die Phasenanpassbedingung $k_2 > k_3$, was gleichbedeutend mit der Bedingung $n_2 \omega_2 > n_3 \omega_3$ ist. Man benötigt also Materialien mit genügend großer Doppelbrechung, so dass trotz des Frequenzunterschieds $\omega_3 > \omega_2$ immer noch $n_2 > n_3$ ist. Eine Realisierung ist daher am ehesten für den Fall $\omega_2, \omega_3 \gg \omega_1$ denkbar. Quasi-Phasenanpassung lässt sich in diesem Fall ebenfalls nicht verwenden, da die erforderlichen Periodenlängen im Sub-Mikrometerbereich liegen würden und technisch nicht herstellbar sind.