1 Elektromagnetische Wellen

1.1 Wellengleichung

Ausgangspunkt zur Herleitung der Wellengleichung sind die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ Ladungen als Quellen elektrischer Felder

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ keine magnetischen Quellen

Die Definition von Polarisierung und Magnetisierung erfolgt über die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

mit

$\vec{E}(\vec{r},t)$	elektrisches Feld
$\vec{H}(\vec{r},t)$	magnetisches Feld
$\vec{D}(\vec{r},t)$	dielektrische Verschiebung
$\vec{B}(\vec{r},t)$	magnetische Flussdichte (magn. Induktion)
$\vec{P}(\vec{r},t)$	elektrische Polarisation (Polarisierung)
$\vec{M}(\vec{r},t)$	magnetische Polarisation (Magnetisierung)
ε_0	dielektrische Permeabilität (des Vakuums)
μ_0	magnetische Permeabilität (Feldkonstante)
$\vec{j}$	Stromdichte

Im Folgenden wird das elektromagnetische Feld in einem typischen Dielektrikum betrachtet, d.h. es gibt keine freien Ladungen bzw. Ströme ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) und das Material ist nicht magnetisch ($\vec{M} = 0$ bzw. $\mu = 1$)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

Falls ε ein Skalar ist, so gilt $\vec{P} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$ und man hat ein isotropes Medium. Wenn zusätzlich die Dielektrizitätskonstante ε unabhängig von $\vec{r}$ ist (d.h. $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$) ist das Medium homogene, und falls weiter ε unabhängig vom elektrische Feld $\left|\vec{E}\right|$ ist auch linear.

Für ein isotropes, homogenes, lineares Medium mit $\varepsilon\varepsilon_0$ (gebräuchlich ist auch die Bezeichnung $\varepsilon \equiv \varepsilon_r$) gilt also

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\,\varepsilon\,\vec{E} = \varepsilon_0\left(1+\chi\right)E$$

oder $$\vec{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E}$$

$$\chi = \varepsilon - 1 \qquad \text{elektrische Suszeptibilität}$$

Atome bzw. Moleküle eines Mediums sind allerdings niemals isotrop oder homogen. Falls aber viele Atome bzw. Moleküle im Volumen λ^3 vorhanden sind und falls sie gleichmäßig verteilt sind, ist die Anisotropie oder Inhomogenität im Mittel gleich Null.

Mit diesen Vereinfachungen ($\vec{j}$ = 0, ρ = 0, $\vec{M}$ = 0) bekommt man die Beziehungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} + \mu_0\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

↳ gilt für $\partial\varepsilon/\partial t = 0$, oder richtiger:
$\varepsilon\,(t)$ ändert sich viel langsamer als $E\,(t)$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\varepsilon_0\,\vec{E}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

Die Wellengleichung erhält man durch Einsetzen der Gleichungen ineinander mit Hilfe der Beziehung $\vec{\nabla}\times\vec{0} = \vec{0}$:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + \mu_0\,\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + \mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) = 0$$

Damit ergibt sich

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} + \mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} + \mu_0\,\varepsilon\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Für ein homogenes Medium gilt weiter

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \underbrace{\vec{\nabla}\varepsilon\varepsilon_0}_{\equiv\,0}\,\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon\varepsilon_0\,\vec{E}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

Man benutzt nun die Vektorrelation

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}\, \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\equiv 0} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

und erhält die Wellengleichung für quellenfreie ($\rho = 0$) und unmagnetische ($\mu = 1$) homogene Medien

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

In analoger Weise berechnet man eine Wellengleichung für das magnetische Feld

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

1.2 Monochromatische ebene Wellen

Monochromatische ebene Wellen erfüllen die Wellengleichung

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}) + c.c.$$

$$= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{H}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}) + c.c.$$

$$= \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

mit den Amplitudenvektoren $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ und dem Wellenvektor $\vec{k}$. Hier ist $\left|\vec{k}\right| = 2\pi n/\lambda$ die Wellenzahl mit dem Brechungsindex n und der (Vakuum-) Lichtwellenlänge λ.

Bei der Herleitung der Wellengleichung wurde benutzt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_0 \exp(i\omega\, t - i\vec{k}\cdot\vec{r})\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(E_{0,x} \exp(i\omega\, t - i[k_x x + k_y y + k_z z])\right) + \frac{\partial}{\partial y} \ldots$$

$$= (-i E_{0,x} k_x - i E_{0,y} k_y - i E_{0,z} k_z) \exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$= -i\vec{k}\cdot\vec{E}$$

Als Ergebnis erhält man die Beziehungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -i\vec{k}\cdot\vec{E}$ und in analoger Weise $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -i\vec{k}\cdot\vec{H}$. Aus $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$ und $\vec{k}\cdot\vec{H}_0 = 0$ folgt dann $\vec{k}\perp\vec{E}_0$ und $\vec{k}\perp\vec{H}_0$.

Ausgehend von der Maxwell-Beziehung

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

betrachtet man die rechte und linke Seite getrennt für den Fall einer ebenen Welle

$$-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\, i\omega\vec{H}_0\exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

und $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -i\vec{k}\times\vec{E}_0\exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$= -i\omega\mu_0\vec{H}_0\exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

Ein Vergleich liefert als Ergebnis

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k}\times\vec{E}_0$$

Die drei Vektoren $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ und $\vec{k}$ bilden demnach ein orthogonales System

$$\vec{E}_0\perp\vec{H}_0\ ,\ \vec{E}_0\perp\vec{k}\ ,\ \vec{H}_0\perp\vec{k}$$

Setzt man die Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ gleich der Ausbreitungsrichtung, so folgt, dass ebene Wellen in homogenen, isotropen, nicht-magnetischen Medien keine Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung haben. Dies gilt sowohl für lineare (ε = *const.*) als auch für nichtlineare ($\varepsilon = \varepsilon(|E|)$) Materialien. Diese Lösungen der Wellengleichung heißen TEM-Wellen. Schränkt man die Ausbreitungsbedingung z.B. wie bei optischen Wellenleitern zusätzlich ein, so erhält man als Folge auch Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung.

Es bleiben zwei Arten von Lösungen übrig für $\vec{k}\,\|\,\hat{z}$, $\vec{E}\perp\vec{H}$

(E_x, H_y) : Polarisation entlang $\hat{x}$

(E_y, H_x) : Polarisation entlang $\hat{y}$

Einsetzen in die Wellengleichung ($\hat{x}$ -Polarisation) liefert

$$\nabla^2\vec{E} \underset{E_y=E_z=0}{\underset{\uparrow}{=}} \nabla^2 E_x = \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}}_{\equiv 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}}_{\equiv 0} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Das Ergebnis lautet dann

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

Allgemeine Lösungen seien von der Form

$$E_x^{\pm}(z, t) = \frac{1}{2} E_{0,x}^{\pm} \exp(i\omega\, t \mp i\, k\, z)$$

Betrachtet wird die Lösung E_x^{+}. Ein mit der Welle mitbewegter Beobachter sehe immer die gleiche Feldamplitude (d.h. er sieht die gleiche konstante Phase). Dann muss für ihn gelten

$$\omega t - k\, z = const. = \varphi_0$$

d.h. φ_0 ist eine willkürliche Phase, die den Wert der konstanten Feldamplitude bestimmt.

Der Beobachter bewegt sich in positiver *z*-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit der Welle (Lichtgeschwindigkeit)

$$c = \frac{d\, z}{d\, t} = \frac{\omega}{k}$$

Für die Lösung E_x^{-} bekommt man ein anderes Vorzeichen von *k*. Die Welle läuft in negativer *z*-Richtung.

Bildet man die zweiten Ableitungen nach *z* und *t* und setzt diese in die Wellengleichung ein, so gelangt man zur Dispersionsrelation der Welle

$$\frac{\partial^2 E_x^{\pm}}{\partial z^2} = -\, k^2 \, E_x^{\pm} \quad , \quad \frac{\partial^2 E_x^{\pm}}{\partial t^2} = -\omega^2 \, E_x^{\pm}$$

$$-\, k^2 \, E_x^{\pm} = -\mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0 \, \omega^2 \, E_x^{\pm}$$

$$\Rightarrow \qquad k^2 = \mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0 \, \omega^2$$

oder

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0}} \quad \Rightarrow \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \, \varepsilon \, \varepsilon_0}$$

Im Vakuum $(\varepsilon = 1)$ beträgt die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

und in Medien mit $\varepsilon \neq 1$

$$c_n = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

mit dem Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon}$. Die Größe des Magnetfeldes $H_y^{\pm}$ erhält man durch

$$\frac{\partial H_y^{\pm}}{\partial z} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x^{\pm}}{\partial t}$$

Für den Fall "+" gilt

$$-ik H_y^{+} = -i\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_x^{+}$$

$$\Rightarrow \quad H_y^{+} = \frac{1}{\eta} E_x^{+} \qquad \text{mit} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}}$$

Im Vakuum ist η gleich der Vakuumimpedanz $\eta_0 = 377\ \Omega$.

Die Wellengleichung ist eine lineare Differentialgleichung, für deren Lösungen daher das Superpositionsprinzip gilt:

$$E_x(z,t) = E_{x,0}^{+} \exp(i\omega t - ikz) + E_{x,0}^{-} \exp(i\omega t + ikz)$$

$$H_y(z,t) = H_{y,0}^{+} \exp(i\omega t - ikz) + H_{y,0}^{-} \exp(i\omega t + ikz)$$

Die Amplituden $E_{x,0}^{+}$, $E_{x,0}^{-}$ bzw. $H_{y,0}^{+}$, $H_{y,0}^{-}$ werden durch Randbedingungen bestimmt.

1.3 Energiefluss, Poynting-Theorem

Das Ziel ist die Beschreibung der Energie (Energiedichte, d.h. Energie pro Volumen) einer elektromagnetischen Welle. Insbesondere ist die Frage zu klären, wo sich die Energie bei Ausbreitung in einem beliebigen dielektrischen Material befindet. Ausgangspunkt hierfür sind die Maxwell-Gleichungen sowie die Materialgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Einsetzen der Materialgleichungen in die Maxwell-Gleichungen liefert

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Aus diesen Gleichungen bildet man die Skalarprodukte mit dem elektrischen und magnetischen Feld

$$\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\mu_0 \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H}) - \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

Bildet man weiter die Differenz

$$\left[\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)\right] - \left[\vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right]$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{\mu_0}{2} \vec{H} \cdot \vec{H} \right)$$

$$+ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

und wendet auf die linke Seite die folgende Vektoridentität an

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

mit $\vec{c} \equiv \vec{\nabla}$, $\vec{a} \equiv \vec{H}$, $\vec{b} \equiv \vec{E}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) - \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)$$

so erhält man als Zwischenergebnis (*)

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{\mu_0}{2} \vec{H} \cdot \vec{H} \right) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

Die Einheit der Energiedichte ist Energie pro Volumen

$$\left[\left|\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right|\right]=\frac{1}{\mathrm{m}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}$$

Auf das Zwischenergebnis wird der Gaußsche Satz angewendet

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha})\, dV = \oint_{A(V)} \vec{\alpha}\cdot\hat{n}\; dA$$

Die Integration erfolgt über das Volumen V mit der zugehörigen Oberfläche A. Hier ist $\vec{\alpha}$ ein Vektorfeld (z.B. das $\vec{E}$ -Feld oder $\vec{H}$ -Feld) und $\hat{n}$ ein Normalenvektor, der senkrecht auf der Oberfläche A steht. Als Ergebnis erhält man so das Poynting-Theorem

$$-\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV = -\oint_{A(V)}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\; dA \equiv \int_V \text{rechte Seite von (*)}\;\, dV$$

Der gesamte Energiefluss in das Volumen V ist also

$$-\oint_{A(V)}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\; dA = -\oint_{A(V)}\vec{S}\cdot\hat{n}\; dA$$

mit dem Poynting-Vektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ (Energiefluss pro Einheitsfläche). Das zeitliche Mittel $<\vec{S}>$ ist proportional zur Intensität, wobei die Mittelung über große Zeiten $t >> 2\pi/\omega$ zu erfolgen hat

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(|<\vec{S}>|)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(|\vec{E}\times\vec{H}^*|)$$

Im elektromagnetischen Feld sind also die folgenden Energiebeiträge enthalten:

$$\int_V\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)dV \qquad \begin{cases}\text{Energie aus dem } \vec{E}\text{ - Feld für das Verschieben}\\ \text{freier Ladungen (Elektronen oder Ionen)}\end{cases}$$

$$\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\,\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{\mu_0}{2}\,\vec{H}\cdot\vec{H}\right)dV \qquad \begin{cases}\text{Materialunabhängig : Energie des}\\ \text{elektromagnetischen Feldes im Vakuum}\end{cases}$$

$$\int_V\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)dV \qquad \begin{cases}\text{Energie aus dem } \vec{E} \text{ – Feld für die Erzeugung}\\ \text{oder Verstärkung elektrischer Dipole im}\\ \text{Medium (Zunahme der potentiellen Energie)}\\ \text{Beschreibt WW von Licht mit Materie}\end{cases}$$

$$\int_V\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}\right)dV \qquad \begin{cases}\text{Energie aus dem } \vec{H}\text{ - Feld zur Verstärkung}\\ \text{oder Erzeugung von magn. Dipolen}\end{cases}$$

1.4 Dipole in harmonischen Feldern

Die Energiedichte aus dem elektrischen Feld, die im zeitlichen Mittel für die Änderung der Polarisierung des Mediums aufgewendet wird, lautet

$$< \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} > \; = \frac{< \text{Energie} >}{\text{Volumen}}$$

Zur Vereinfachung wird ein isotropes Medium mit $\vec{E} \| \vec{P}$ betrachtet

$$E(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left[E_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)\right]$$

$$P(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left[P_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)\right]$$

Der Zusammenhang von *E* und *P* wird durch die Suszeptibilität χ beschrieben

$$P = \varepsilon_0 \, \chi \, E$$

$$\Rightarrow \quad P = \mathrm{Re}\left[\underbrace{\varepsilon_0 \, \chi \, E_0}_{P_0} \; \exp(i\omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[i\omega P_0 \; \exp(i\omega t)\right]$$

Die Energiedichte ist dann

$$< \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} > \; = \frac{1}{2} \, \mathrm{Re}\left(\vec{E} \cdot (i\omega \vec{P})^*\right)$$

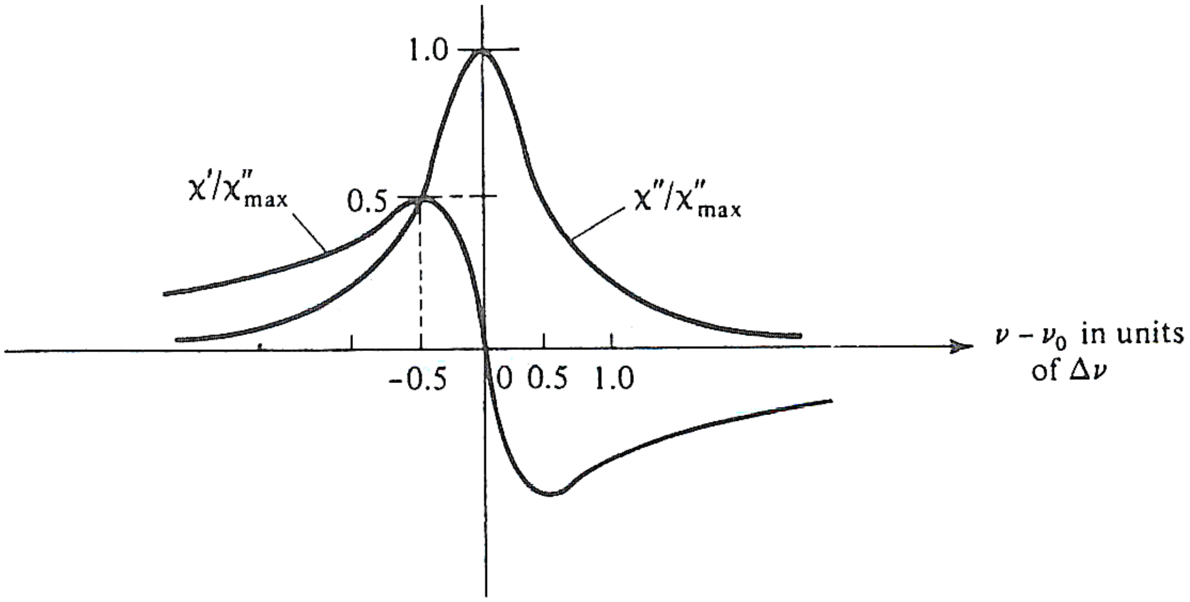
$$= \frac{1}{2} \, \mathrm{Re}\left(\vec{E} \cdot (i\omega \varepsilon_0 \, \chi \, \vec{E})^*\right)$$

$$= \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \left|\vec{E}\right|^2 \mathrm{Re}(-i\chi^*)$$

Im Allgemeinen ist χ komplex, d.h. das elektrische Feld *E* und die Polarisation *P* sind nicht in Phase (für ein rein imaginäres χ sind *E* und *P* genau um 90° phasenverschoben)

$$\chi = \chi' - i\chi''$$

mit den Zusammenhängen $\chi' = n^2 - 1$ und $\chi'' = nc\alpha/\omega$ der reellen Größen χ' und χ'' mit dem Brechungsindex *n* und dem Absorptionskoeffizienten α. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Suszeptibilität im Bereich einer atomaren Resonanz bei der Frequenz ν_0.



Als Ergebnis ergibt sich also die Energiedichte zur Änderung der Polarisierung des Mediums

$$<\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}> = \frac{\omega}{2}\,\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2\chi''$$

Eine Änderung der Polarisierung setzt also $\chi''\neq 0$ voraus: Die vom Mediums absorbierte Energie wird aufgewendet (in nicht-magnetischen Materialien mit $\mu = 1$) für (i) die Bewegung freier Ladungen (falls vorhanden) und die Anregung von Driftströmen $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ mit der Leitfähigkeit σ (die zugehörige Energiedichte ist $\int(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV$) und (ii) zur Anregung von elektrischen Dipolen (letztendlich thermische Relaxation, Erwärmung) mit der zugehörigen Energiedichte $1/2\,\omega\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2\chi''$. Alternativ lassen sich die Driftströme $\vec{j}$ auch direkt in der Größe von χ'' berücksichtigen.

Für die Intensität einer elektromagnetischen Welle erhält man aus dem Poynting-Vektor

$$I = <\vec{S}> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(|\,\vec{E}\times\vec{H}^*|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}\cdot\left(\frac{1}{\eta}\,\vec{E}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\,\eta}\left|\vec{E}\right|^2 \qquad \text{(gilt für TEM-Wellen)}$$

mit

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\,\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta_0$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega \qquad \text{(Vakuumimpedanz)}$$

Mit dem Brechungsindex $\sqrt{\varepsilon} = n$ des Mediums folgt

$$I = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left|\vec{E}\right|^2 = \frac{c\,n\,\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2$$

mit der Lichtgeschwindigkeit *c* im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}$$

Eine alternative Darstellung mit dem Magnetfeld $\vec{H}$ lautet

$$I = \frac{1}{2\,c\,n\,\varepsilon_0}\left|\vec{H}\right|^2$$

1.5 Wellenausbreitung in anisotropen Medien

Physikalische Eigenschaften eines Mediums sind im Allgemeinen richtungsabhängig oder anisotrop. Kristalle bestehen z.B. aus regelmäßig angeordneten Atome bzw. Ionen oder Gitterebenen. Damit verbunden ist fast immer eine anisotrope Elektronendichteverteilung, welche für einen Großteil der physikalischen Eigenschaften der Kristalle verantwortlich ist.

In anisotropen Materialien werden die Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen durch Tensoren ausgedrückt. Ein Beispiel ist der Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld. Für ein anisotropes Medium ist die Suszeptibilität ein Tensor 2. Stufe

$$\vec{P} = \varepsilon_0\,\vec{\chi}\,\vec{E}$$

$$\begin{aligned}
P_x &= \varepsilon_0\ (\chi_{11}\,E_x + \chi_{12}\,E_y + \chi_{13}\,E_z)\\
P_y &= \varepsilon_0\ (\chi_{21}\,E_x + \chi_{22}\,E_y + \chi_{23}\,E_z)\\
P_z &= \varepsilon_0\ (\chi_{31}\,E_x + \chi_{32}\,E_y + \chi_{33}\,E_z)
\end{aligned}$$

oder kurz $\quad P_i = \varepsilon_0\,\chi_{ij}\,E_j$

Hierbei gilt die Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes (hier: *j*) wird summiert. Der Tensor χ ist diagonalisierbar, d.h. es gibt ein Koordinatensystem (*x*', *y*', *z*'), in welchem die Außendiagonalelemente $(\chi_{ij}\,,\, i \neq j)$ verschwinden:

$$P_{x'} = \varepsilon_0\,\chi_{11}\,E_{x'}\ ,\quad P_{y'} = \varepsilon_0\,\chi_{22}\,E_{y'}\ ,\quad P_{z'} = \varepsilon_0\,\chi_{33}\,E_{z'}$$

Das System (*x*', *y*', *z*') heißt Hauptachsensystem. Im Folgenden wird immer von einem Hauptachsensystem ausgegangen. Entsprechendes gilt für den Zusammenhang von $\vec{D}$ und $\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\hat{\varepsilon}\,\vec{E}$$

mit dem Dielektrizitätstensor $\hat{\varepsilon}$:

$$D_{x'} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{11}\, E_{x'} \quad , \quad D_{y'} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{22}\, E_{y'} \quad , \quad D_{z'} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{33}\, E_{z'}$$

Mit $\vec{D} = \varepsilon_0\, \vec{E} + \vec{P}$ folgt

$$\varepsilon_{11} = (1 + \chi_{11}) \quad , \quad \varepsilon_{22} = (1 + \chi_{22}) \quad , \quad \varepsilon_{33} = (1 + \chi_{33})$$

Im Hauptachsensystem erzeugt eine Polarisation E_x der Lichtwelle entlang der x-Richtung eine induzierte Polarisation P_x

$$P_x = \varepsilon_0\, \chi_{11}\, E_x = \varepsilon_0\, (\varepsilon_{11} - 1)\, E_x$$

Die zugehörige Phasengeschwindigkeit im Medium lautet

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0\, \varepsilon}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0\, \varepsilon_{11}}}$$

Als Konsequenz „sieht“ die Welle einen Brechungsindex $n_1 \equiv \sqrt{\varepsilon_{11}}$. In anisotropen Kristallen können $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ und ε_{33} verschieden sein. Die Doppelbrechung ist eine direkte Konsequenz aus den anisotropen dielektrischen Eigenschaften. Beispiel Kalkspat mit $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 2.75,\ \varepsilon_{33} = 2.21$ (Wellenlänge 589 nm, Na-D-Linie).

Im Hauptachsensystem lassen sich aus den Diagonalelementen des dielektrischen Tensors die jeweiligen Brechungsindizes ableiten. Für einen optisch einachsigen Kristall sind dies

$$n_o = \sqrt{\varepsilon_{11}} = \sqrt{\varepsilon_{22}} \qquad \text{ordentlicher Brechungsindex}$$

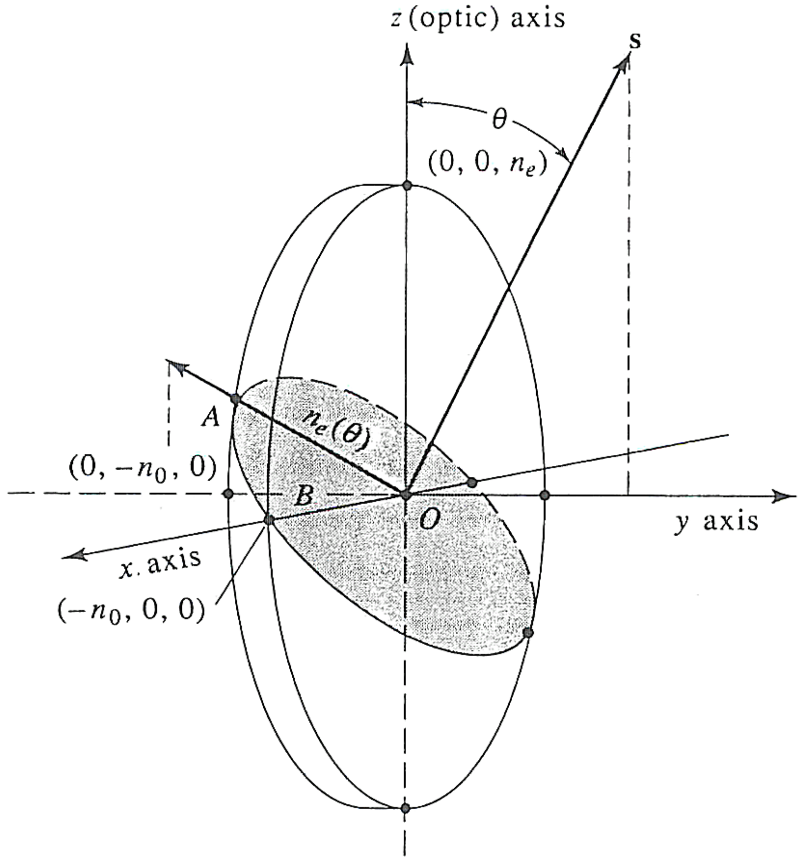
$$n_e = \sqrt{\varepsilon_{33}} \qquad \text{außerordentlicher Brechungsindex}$$

Ein Material ist negativ doppelbrechend wenn $n_e < n_o$ gilt.

Ein Brechungsindexellipsoid ist ein Hilfsmittel zur Bestimmung von n bzw. ε für eine Welle mit beliebiger Ausbreitungsrichtung $\vec{s}$ im Kristall. Die zugehörige Ellipsengleichung (für einen einachsigen Kristall) lautet

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{11}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{22}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{33}} = 1 \;=\; \frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$

Dies ist eine Ellipse mit den Hauptachsen a, b, c entlang x, y, z und den Hauptachsenlängen $2a = 2b = 2n_o$ sowie $2c = 2n_e$.



Die beiden Halbachsen der Ellipse senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{s}$ der Lichtwelle sind die Brechungsindizes der ordentlichen bzw. außerordentlichen Welle, n_o und $n_e(\theta)$. Demnach ist n_o unabhängig vom Winkel θ; die Welle ist senkrecht zur z-Achse ("optische Achse") polarisiert. Dagegen hängt $n_e = n_e(\theta)$ von der Ausbreitungsrichtung ab über die Beziehung

$$n_e^2(\theta) = y^2 + z^2$$

$$\sin\theta = z / n_e(\theta)$$

Die Ellipsengleichung in der yz-Ebene lautet

$$\frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}$$

Die Größe der Doppelbrechung $n_o - n_e(\theta)$ geht vom Maximalwert $n_o - n_e$ für θ = 90° (Ausbreitung senkrecht zu optischer Achse) bis auf Null für θ = 0° (Entartung, Ausbreitung entlang der optischen Achse) zurück. Dies ist von Bedeutung für die notwendige Phasenanpassung bei der Frequenzverdopplung.