

3 Ausgewählte Wellenleiter

Ausgangspunkt für die Beschreibung geführter optischer Wellen sind die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

sowie die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \mu_0 \vec{H}$$

mit dem elektrischen Feld \vec{E} , dem magnetischen Feld \vec{H} , der dielektrischen Verschiebung \vec{D} , der magnetischen Flussdichte \vec{B} , der elektrischen Polarisation \vec{P} , der magnetischen Polarisation \vec{M} , der Stromdichte \vec{j} , den dielektrischen und magnetischen Permeabilitäten ε_0 und μ_0 bzw. ε und μ .

Für optische Materialien betrachtet man meist typische Dielektrika mit $\vec{j} = 0$ bzw. $\rho = 0$ (keine freien Ströme bzw. Ladungen) und $\vec{M} = 0$ bzw. $\mu = 1$ (nicht-magnetische Materialien).

Zur Wellengleichung gelangt man, wenn man auf die erste Maxwell-Gleichung die Operation *rot* anwendet:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Nun benutzt man die Vektorrelation

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

und erhält so mit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (da $\rho = 0$)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

als Wellengleichung für quellenfreie ($\rho = 0$) und unmagnetische ($\mu = 1$) homogene Medien.

In analoger Weise findet man für das magnetische Feld

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Je nach Wellenleitertyp ist die Wellengleichung unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen für \vec{E} und \vec{H} für die jeweiligen Brechzahlprofile $\varepsilon(\vec{r}) = n^2(\vec{r})$ zu lösen.

3.1 Schichtwellenleiter

In planaren Wellenleitern oder Schichtwellenleitern wird Licht nur in einer Dimension geführt. Im einfachsten Fall besteht ein solcher Wellenleiter aus drei verschiedenen homogenen Schichten mit jeweils konstanten Brechungsindizes n_1, n_2 und n_3 (s. Kap. 2.2).

Die Lichtausbreitung erfolge entlang der z -Richtung und die Flächennormalen zeigen in die x -Richtung. Wegen der Symmetrie gilt $\partial/\partial y = 0$. Die geführten Moden haben die Form

$$\vec{E}(x, z, t) = \vec{E}(x) \exp(i(\omega t - \beta z))$$

mit der Ausbreitungskonstante $\beta = k_0 n_{\text{eff}}$. Für homogene, verlustfreie und nicht leitende Medien ergibt sich durch Einsetzen in die Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 (n^2(x) - n_{\text{eff}}^2) \vec{E} = 0$$

Das Brechzahlprofil habe dabei die Form

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & ; x \leq -d \\ n_2 & ; 0 \leq x \leq -d \\ n_3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

wobei weiter gilt $n_2 > n_1, n_3$. Die Wellengleichung in den Schichten $j = 1, 2, 3$ lautet dann

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_{0,j}(x)}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) \vec{E}_{0,j}(x) = 0$$

Mit den drei Abkürzungen wie in Kap. 2.2,

$$u^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2$$

$$v^2 = \beta^2 - k_0^2 n_1^2$$

$$w^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2$$

gelten für die drei Medien dann die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{01}(x)}{\partial x^2} - v^2 \bar{E}_{01}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{02}(x)}{\partial x^2} + u^2 \bar{E}_{02}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{03}(x)}{\partial x^2} - w^2 \bar{E}_{03}(x) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichungen zerfallen in zwei Klassen: TE-Moden und TM-Moden

TE-Moden : transversal elektrische Polarisation

$$E_x = E_z = 0 \quad , \quad E_y \neq 0$$

$$H_y = 0 \quad , \quad H_x \neq 0 \quad , \quad H_z \neq 0$$

TM-Moden : transversal magnetische Polarisation

$$E_y = 0 \quad , \quad E_x \neq 0 \quad , \quad E_z \neq 0$$

$$H_x = H_z = 0 \quad , \quad H_y \neq 0$$

Im Folgenden soll das elektrische Feld $E_y(x)$ für die TE-Moden berechnet werden. Aus dieser Feldkomponente lassen sich dann über die Maxwell-Gleichungen die Feldkomponenten H_x und H_z berechnen. Als Lösungsansatz wählt man in der wellenleitenden Schicht ein harmonisch oszillierendes Feld, welches im Substrat und Superstrat (meist Luft) exponentiell abklingt:

$$E_{y1} = A \exp(+v x) \quad ; \quad x \leq -d$$

$$E_{y2} = B \cos(u x) + C \sin(u x) \quad ; \quad -d \leq x \leq 0$$

$$E_{y3} = D \exp(-w x) \quad ; \quad 0 \leq x$$

An den Grenzflächen bei $x = 0$ und $x = -d$ muss die Tangentialkomponente E_y stetig sein, so dass unmittelbar folgt

$$x = 0 : \quad D = B$$

$$x = -d : \quad A \exp(-u d) = B \cos(u d) - C \sin(u d)$$

Weiter muss die Tangentialkomponente H_z stetig sein, die sich aus der Maxwell-Gleichung $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ ergibt zu

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_z$$

Damit erhält man den allgemeinen Lösungsansatz für H_z aus dem Ansatz für E_y , und die Stetigkeitsbedingungen lauten

$$x = 0 : \quad -w D = u C$$

$$x = -d : \quad v A \exp(-u d) = u (B \sin(u d) + C \cos(u d))$$

Aus den vier Gleichungen erhält man nach einigen Umformungen die Bestimmungsgleichung

$$\tan(ud) = \frac{u(v+w)}{u^2 - vw}$$

Die hier aus der elektromagnetischen Theorie abgeleitete Gleichung stimmt also mit dem geometrischen Modell aus Kap. 2.2 überein, wenn man zusätzlich noch die Periodizität der Tangensfunktion (also $\tan(x) = \tan(x - N\pi)$) berücksichtigt.

Für die TM-Moden findet man in analoger Weise die Bestimmungsgleichung

$$\tan(ud) = \frac{\frac{u}{n_2^2} \left(\frac{v}{n_1^2} + \frac{w}{n_3^2} \right)}{\frac{u^2}{n_2^4} - \frac{v}{n_1^2} \frac{w}{n_3^2}}$$

Das Feld für die TE-Moden lässt sich mit den Abkürzungen $B = E_{\max} \cos \varphi$, $C = E_{\max} \sin \varphi$ und $\tan \varphi = -w/u$ darstellen als

$$E_{y1} = E_{\max} \cos(ud + \varphi) \exp((x+d)v)$$

$$E_{y2} = E_{\max} \cos(ux - \varphi)$$

$$E_{y3} = E_{\max} \cos(\varphi) \exp(-wx)$$

Hier ist E_{\max} die maximale Feldamplitude.

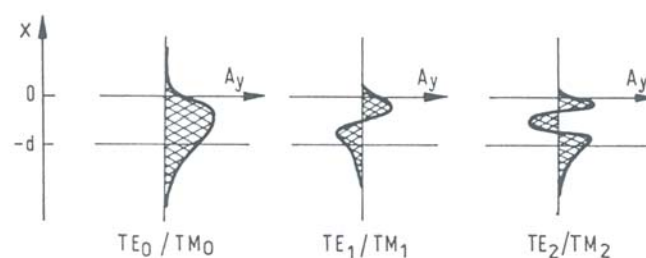


Abbildung 3.3.
 Feldverteilungen der niedrigsten drei TE- bzw. TM-Moden
 ($A_y = E_y$ für TE-, $A_y = H_y$ für TM-Moden)

Die in einer Wellenleitermode geführte Leistung P lässt sich über die Komponente S_z des Poynting-Vektors berechnen

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{\infty} S_z \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* \, dx \\
 &= \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 \, dx \\
 &= \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \frac{E_{\max}^2}{2} \underbrace{\left(d + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right)}_{d_{\text{eff}}}
 \end{aligned}$$

Die Größe d_{eff} ist die effektive Wellenleiterdicke, enthält also neben der Filmdicke d auch die Eindringtiefen v^{-1} und w^{-1} des elektrischen Feldes in das Substrat und in die Deckschicht bzw. in Luft.

Die oben abgeleitete Bestimmungsgleichung kann nur numerisch oder graphisch gelöst werden. Zweckmäßig ist eine Darstellung in normierter Form mit den folgenden Parametern für die TE-Moden:

Strukturkonstante :
$$V = d \sqrt{u^2 + v^2} = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$$

normierter Wellenleiterindex :
$$b = \frac{v^2}{u^2 + v^2} = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}$$

Symmetrieparameter :
$$a = \frac{w^2 - v^2}{u^2 + v^2} = \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}$$

Damit lautet die Bestimmungsgleichung in normierter Form

$$\tan \left(V \sqrt{1-b} - N\pi \right) = \frac{\sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{a+b}{1-b}}}{1 - \sqrt{\frac{b}{1-b} \cdot \frac{a+b}{1-b}}}$$

In der folgenden Abbildung sind die ersten drei TE-Moden für $N = 0, 1, 2$ dargestellt für verschiedene Asymmetrieparameter: $a = 0 \Leftrightarrow n_1 = n_3$, symmetrischer Wellenleiter; $a = 1$ und $a \rightarrow \infty$, leicht bzw. extrem asymmetrischer Wellenleiter.

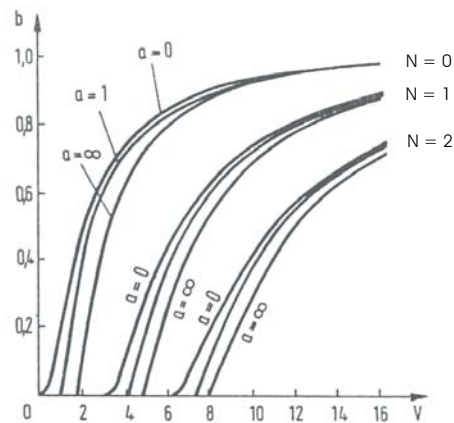


Abbildung 3.2.
 Dispersionsrelation $b(V)$ mit dem Parameter a für TE-Moden im Schichtwellenleiter mit stufenförmigem Brechzahlprofil

Die Strukturkonstante V beschreibt hier bei vorgegebenem Brechzahlprofil die Wellenlängen- bzw. Frequenzabhängigkeit, da $V \sim f \sim \lambda^{-1}$ gilt. Mit zunehmender Größe von V sind also mehr Moden des Wellenleiters ausbreitungsfähig. Für symmetrische Wellenleiter ($a = 0$) wird immer (d.h. auch für $V \rightarrow 0$) mindestens eine Mode geführt; für asymmetrische Wellenleiter erhält man für jede Mode eine Grenzfrequenz (englisch: "cut-off") mit

$$\tan(V - N\pi) = \sqrt{a}$$

unterhalb der keine Ausbreitung der Mode möglich ist.

Durch formale Auflösung dieser Gleichung lässt sich für einen durch a und V bestimmten Wellenleiter die Anzahl N geführter Moden bestimmen:

$$N = \text{Int} \left(\frac{1}{\pi} \left(V - \arctan(\sqrt{a}) \right) \right)$$

In einem Wellenleiter aus Glas ($n_1 = 1.5$) mit $n_2 - n_1 = 0.01$, $n_3 = 1$ und $d = 10 \mu\text{m}$ werden so bei der Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$ je 3 TE- und TM-Moden geführt.

Für zwei verschiedene Moden l und m eines Wellenleiters gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}_l \times \vec{H}_m) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \text{für} \quad l \neq m$$

bzw. in skalarer Schreibweise in der hier behandelten Geometrie für TE-Moden

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_y H_z dx = 0 \quad \text{für} \quad l \neq m$$

Hieraus resultiert zum einen die Möglichkeit, bestimmte Feldverteilungen in einem (mehrmodigen) Wellenleiter nach seinen Moden zu entwickeln. Zum anderen bedeutet dies, dass eine Kopplung (z.B. Energietransfer) zwischen zwei Moden nur möglich ist, wenn zusätzlich eine passende "Störung" des Wellenleiters vorliegt.

Bisher wurde nur der einfachste Fall eines planaren Wellenleiters behandelt, bei dem die drei Schichten jeweils konstante Brechungsindizes besitzen. Solche Wellenleiter lassen sich z.B. durch epitaktische Verfahren herstellen, bei dem eine Schicht mit höherem Index auf einem Substrat mit niedrigerem Index aufwächst. Viele andere Verfahren zur Wellenleiterherstellung (z.B. durch Diffusion oder Implantation) führen jedoch zu Brechzahlverläufen, die vom stufenförmigen Verlauf abweichen. In der Wellengleichung wird dann entsprechend n durch $n(x)$ ersetzt. Für einige spezielle Verläufe von $n(x)$ sind analytische Lösungen möglich, z.B. für lineare, parabolische oder exponentiell abnehmende Profile.

Für allgemeine Profile ist man auf numerische Verfahren angewiesen. So lässt sich z.B. die Wellengleichung durch numerische Integration nach dem Runge-Kutta-Verfahren ohne größeren Aufwand lösen.

3.2 Streifenwellenleiter

In Streifenwellenleitern wird Licht in zwei Dimensionen geführt. Voraussetzung hierfür ist ein ebenfalls zweidimensionales Brechzahlprofil, so dass Licht wieder durch Totalreflexion an den Grenzschichten geführt werden kann. Man unterscheidet zwischen verschiedenen Grundformen, die aus den verschiedenen zur Verfügung stehenden Herstellungsmethoden resultieren.

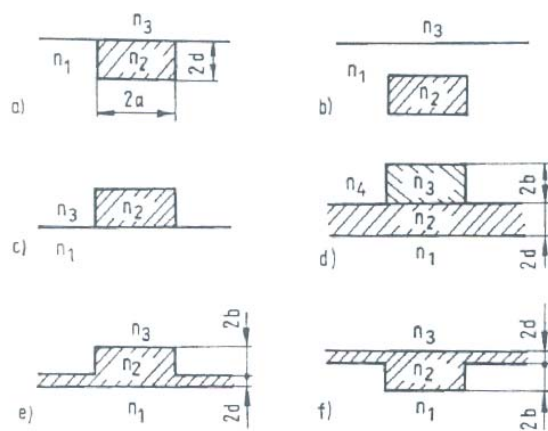


Abbildung 3.17.
 Querschnittsformen
 dielektrischer Streifenwellenleiter.
 a) eingebetteter; b) vergrabener;
 c) aufgesetzter;
 d) streifenbelasteter; e) Rippen-
 oder Firstwellenleiter;
 f) inverser Firstwellenleiter

Eine analytische Lösung zur Berechnung der Moden eines Streifenwellenleiters ist nicht möglich. Stattdessen ist man auf Näherungsverfahren oder aber auf numerische Lösungsmethoden angewiesen.

Ein häufig verwendetes Näherungsverfahren zur Berechnung der Moden ist die Methode des effektiven Indexes. Ausgangspunkt ist ein allgemeines Brechzahlprofil mit jeweils konstanten Werten, bei denen der Wellenleiter mit Index n_2 horizontal und vertikal von Medien mit den Indices n_4 und n_5 bzw. n_1 und n_3 umgeben ist (siehe Abbildung). Die Grundidee besteht in der Zerlegung des Problems in zwei senkrecht aufeinander stehende Schichtwellenleiter. Zunächst wird der effektive Index \tilde{n}_{eff} für die eine Schichtfolge berechnet. Dieser effektive Index bildet dann anschließend den Index der mittleren Schicht für die dazu senkrechte Schichtfolge. Für den so berechneten effektiven Index n_{eff} des Streifenwellenleiters erhält man eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Die Methode lässt sich ebenfalls auf Brechzahlprofile mit nicht stufenförmigem Verlauf anwenden.

3.2. Streifenwellenleiter

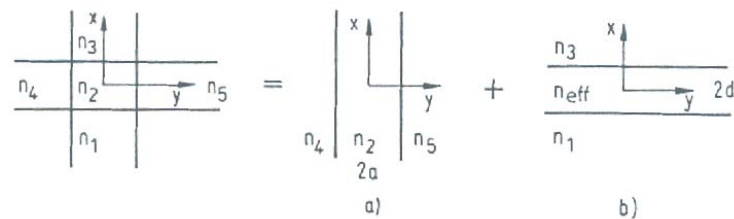


Abbildung 3.19.
 Zerlegung des Streifenwellenleiters in zwei Schichtwellenleiter bei der Methode des effektiven Brechungsindex

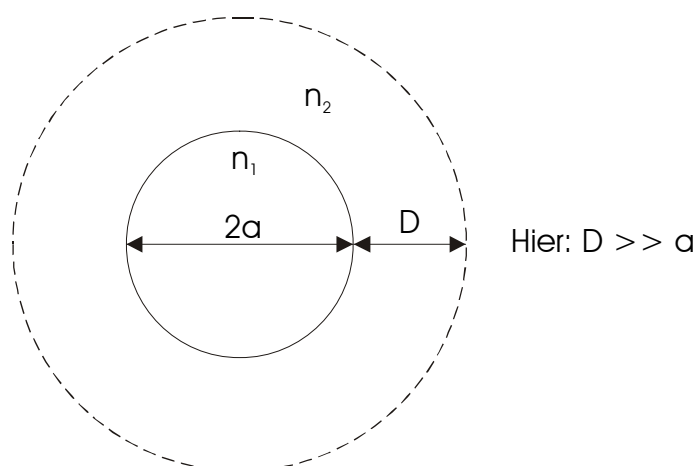
3.3 Kreiszyklindrische Wellenleiter

Zylindersymmetrische Wellenleiterquerschnitte spielen eine herausragende Rolle bei den Lichtwellenleitern, insbesondere durch ihren Einsatz in der optischen Nachrichtentechnik. Hauptvorteil ist die einfache und kostengünstige Herstellung durch Ziehen der Fasern aus Glasrohlingen.

Entscheidender Grund, sich in der Integrierten Optik mit Glasfasern zu beschäftigen, ist die notwendige Ankopplung von Glasfasern an integriert-optische Schaltungen.

Unter der Voraussetzung, dass die Ummantelung des Faserkerns ("cladding") hinreichend groß ist, so dass das evaneszente Feld geführter Moden nahezu vollständig in der Ummantelung abklingt, lautet das Brechzahlprofil für eine Stufenindexfaser mit dem Kerndurchmesser $2a$

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & r \leq a \\ n_2, & r \geq a \end{cases}$$



Das elektrische Feld der Moden muss die Wellengleichung (in Zylinderkoordinaten) erfüllen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} + k_0^2 n^2(r) \vec{E} = 0$$

Für eine sich in z -Richtung ausbreitende Mode wählt man den Separationsansatz

$$\bar{E}(r, \varphi, z) = \bar{E}_0 f(r) \exp(-il\varphi) \exp(-i\beta z)$$

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$: Azimutalindex

β : Ausbreitungskonstante

\bar{E}_0 : Amplitude

Geführte Moden findet man wie üblich für Ausbreitungskonstanten

$$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$$

Man führt wieder die Abkürzungen u und w ein mit

$$u^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_{eff}^2)$$

$$w^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 = k_0^2 (n_{eff}^2 - n_2^2)$$

Einsetzen des Feldansatzes für \bar{E} in die Wellengleichung liefert zwei Differentialgleichungen für den Kern- und den Mantelbereich

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(u^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) \right] f(r) = 0 \quad ; \quad r \leq a$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(w^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right] f(r) = 0 \quad ; \quad r \geq a$$

Lösungen sind die Bessel-Funktionen

$$f(r) = \begin{cases} J_l(ur) & ; \quad r \leq a \\ K_l(wr) & ; \quad r \geq a \end{cases}$$

wobei $J_l(ur)$ die Besselfunktionen erster Ordnung und $K_l(wr)$ die modifizierten Besselfunktionen zweiter Ordnung sind.

Für große Argumente gilt näherungsweise

$$J_l(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos \left(x - \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right) \quad ; \quad x \gg 1$$

$$K_l(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{4l^2 - 1}{8x} \right) \exp(-x) \quad ; \quad x \gg 1$$

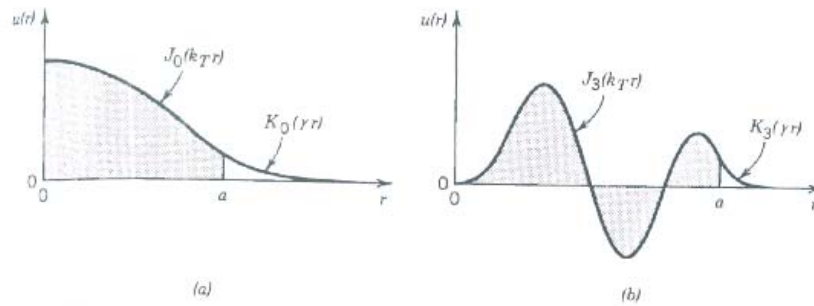


Figure 8.1-5 Examples of the radial distribution $u(r)$ given by (8.1-9) for (a) $l = 0$ and (b) $l = 3$. The shaded areas represent the fiber core and the unshaded areas the cladding. The parameters k_T and γ and the two proportionality constants in (8.1-9) have been selected such that $u(r)$ is continuous and has a continuous derivative at $r = a$. Larger values of k_T and γ lead to a greater number of oscillations in $u(r)$.

Die Strukturkonstante V beschreibt unter anderem die Anzahl der möglichen Moden einer Faser:

$$V^2 = a^2 (u^2 + w^2)$$

$$\Leftrightarrow V = a \sqrt{u^2 + w^2} = 2\pi \frac{a}{\lambda} NA$$

$NA = \sin \varphi_B$: numerische Apertur der Faser

φ_B : Öffnungswinkel des austretenden Strahlenbündels

Unterhalb eines Grenzwertes für V sind bestimmte höhere Moden einer Faser nicht mehr ausbreitungsfähig ("cut-off").

Zu jedem Azimutalindex l existiert eine Anzahl von diskreten Ausbreitungskonstanten β_{lm} , mit $m = 1, 2, \dots$. Die zugehörigen linear polarisierten Moden werden mit LP_{lm} bezeichnet; die Grundmode ist entsprechend LP_{01} .



Figure 8.1-7 Distributions of the intensity of the (a) LP_{01} and (b) LP_{34} modes in the transverse plane, assuming an azimuthal $\cos l\phi$ dependence. The fundamental LP_{01} mode has a distribution similar to that of the Gaussian beam discussed in Chap. 3.

Tabelle: Cut-off-Parameter V für die LP_{lm} -Moden

l :	m :	1	2	3
0	0	0	3.832	7.016
1	1	2.405	5.520	8.654

Für Werte $V < 2.405$ erhält man also einmodige Wellenleiter ("Singlemode").

Für Parameter $V \gg 1$ lässt sich die Anzahl der Moden abschätzen mit

$$N \approx \frac{4}{\pi^2} V^2$$

Beispiel: Glasfaser mit $NA = 0.2$, $n_1 = 1.452$, $\Delta n = n_1 - n_2 = 0.01$, $a = 25 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$:

$$\Rightarrow V = 37.9 \quad \Rightarrow N \approx 585 \text{ Moden}$$

Möchte man in dem gleichen Material einen Monomode-Wellenleiter herstellen, so ist

$$V < 2.405$$

$$\Leftrightarrow a < \frac{2.405}{\sqrt{u^2 + w^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow a < 1.91 \mu\text{m}$$