Zusatzvorlesungen:

Z-6 Berechnung von Magnetfeldern

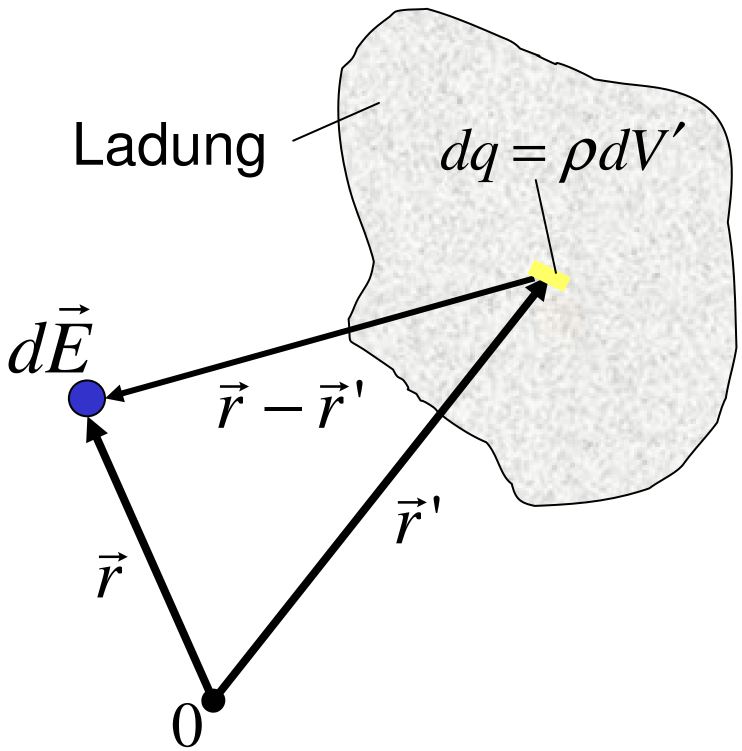
Z-6.1 Einführung

Im Falle des elektrischen Feldes lieferte das Superpositionsprinzip:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

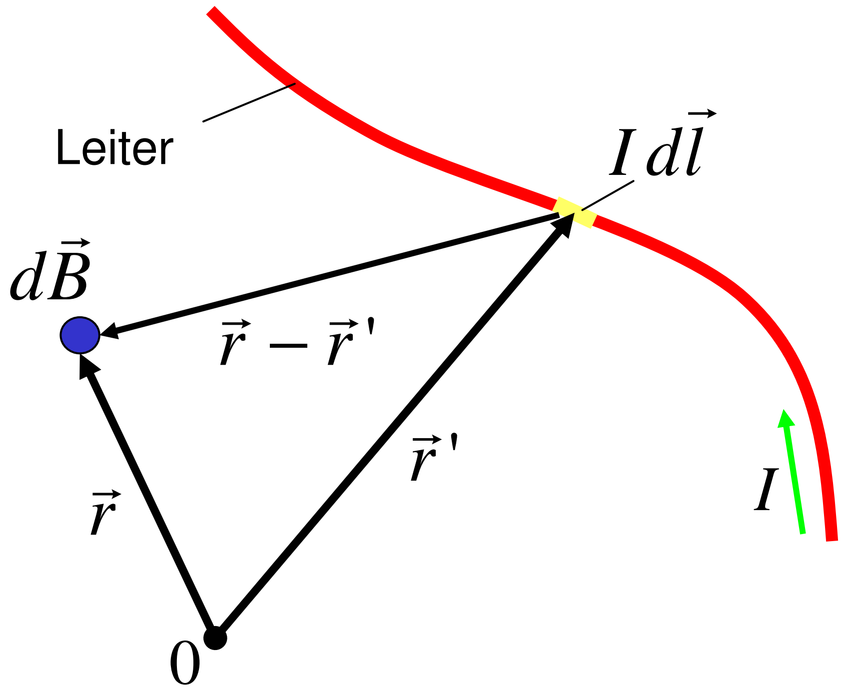
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} dV'$$



Aus der Ladungsdichte (den "Quellen") kann mit Hilfe eines Volumenintegrals direkt das elektrische Feld berechnet werden.

- Da es keine magnetischen Ladungen gibt, wird zur Berechnung des Magnetfeldes das Feld von „kleinen Dipolen“ überlagert werden.

Wir betrachten jetzt ein von einem Strom I durchflossenes Leiterelement $d\vec{l}$, dass sich am Ort $\vec{r}\,'$ befindet und am Ort $\vec{r}$ das Magnetfeld $d\vec{B}$ erzeugt.



Das Biot-Savartsche Gesetz besagt, dass sich für $d\vec{B}$ das Folgende ergibt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

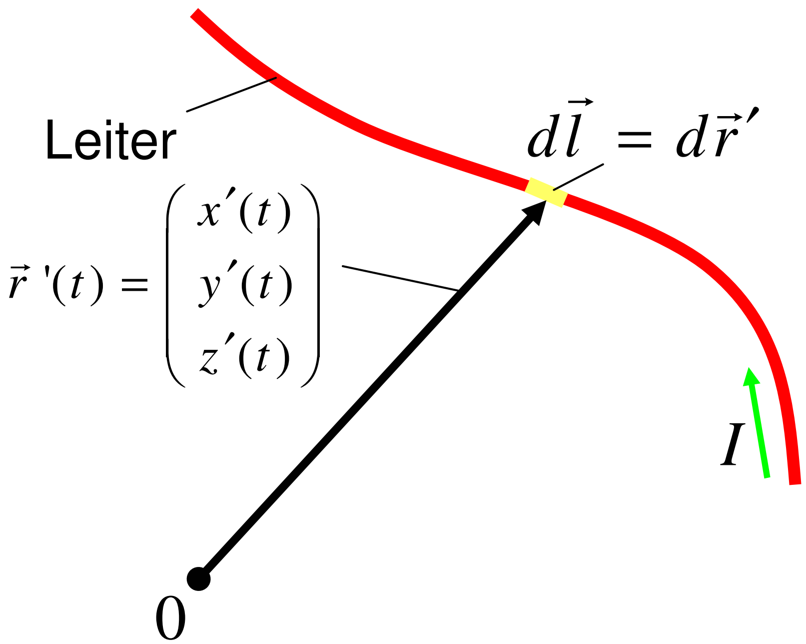
Das Feld eines stromdurchflossenen Leiters ergibt sich dann durch Integration:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

Dabei ist das Integral entlang der Linie des Verlaufes des Leiters zu berechnen.

Z-6.2 Linienintegral & Kreuzprodukt

Das vorherige Integral ist kein Linienintegral: das Resultat ist hier ein Vektor. Trotzdem kann, ähnlich wie bei der Berechnung der Arbeit, die Verlaufslinie des Leiters parametrisiert werden:



$$d\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}dt = \begin{pmatrix} \frac{dx'(t)}{dt} \\ \frac{dy'(t)}{dt} \\ \frac{dz'(t)}{dt} \end{pmatrix} dt$$

$$t \in [t_1, t_2]$$

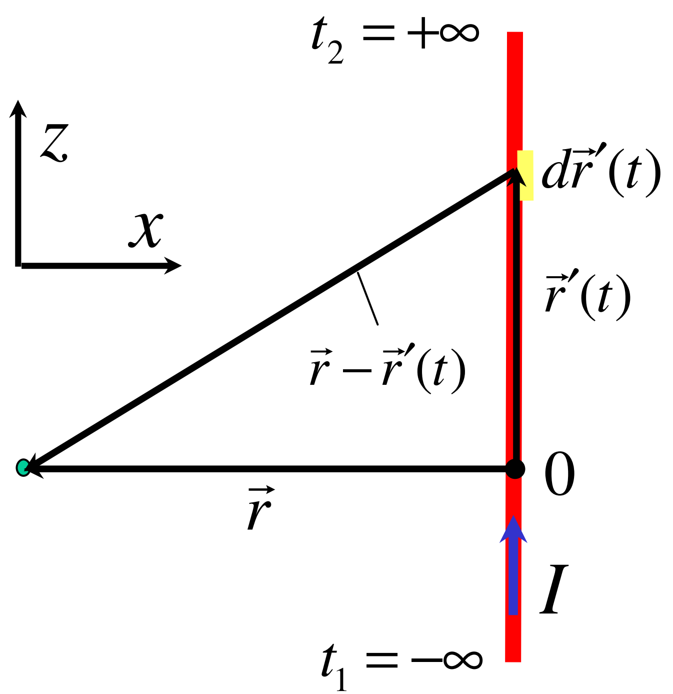
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'(t)}{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|^3} dt$$

Hiermit kann das magnetische Feld für jeden beliebigen Strom, der entlang einer Kurve im Raum fließt, berechnet werden. Dies wird nun anhand der „üblichen“ Beispiele erläutert.

Z-6.3 Unendlich langer stromdurchflossener Draht

Das magnetische Feld im Abstand r von einem unendlich langen stromdurchflossenen Draht wird nun berechnet. Aus der Grafik folgt:



$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'(t)\right|^3 = \left(x^2 + y^2 + t^2\right)^{3/2}$$

Damit ergibt sich:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'(t)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'(t)\right|^3} = \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + t^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ -t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + t^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dies muss jetzt in die Formel für das Linienintegral mit Kreuzprodukt eingesetzt werden. Als Grenzen für den Parameter t ergeben sich $t_2 = +\infty$ und $t_1 = -\infty$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'(t)}{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|^3} dt$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + y^2 + t^2)^{3/2}}$$

Es ist (z.B. Bronstein)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

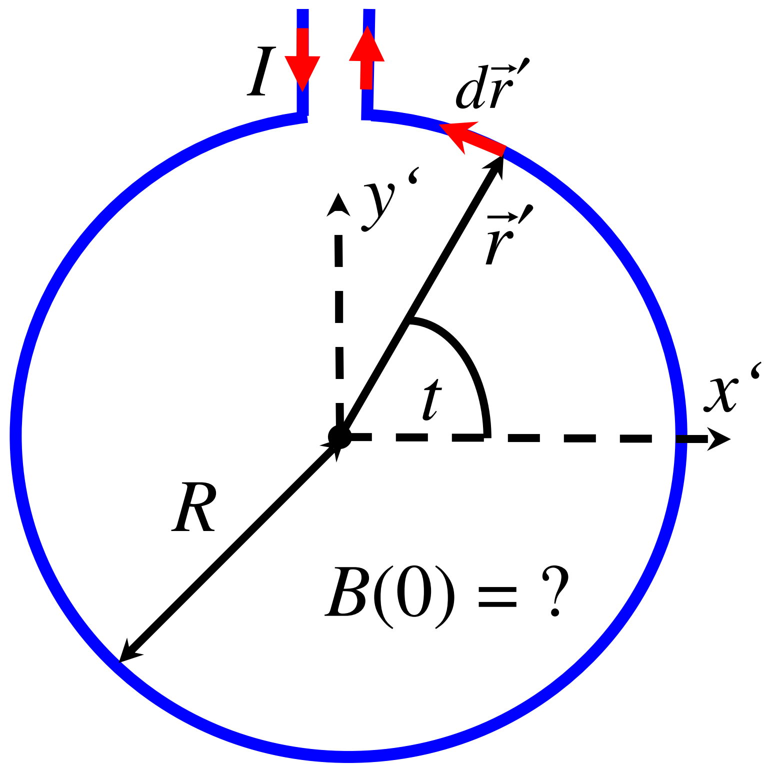
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + y^2 + t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Z-6.4 Zentrum einer kreisförmigen Leiterschleife

Das magnetische Feld im Zentrum einer kreisförmigen Leiterschleife soll nun auch mit diesem Schema berechnet werden. Aus der Abbildung liest man ab:



$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{0}, \; \vec{r} - \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\cos(t) \\ -R\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{r} - \vec{r}\,'(t)\right| = R$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'(t)\right|^3}$$

$$= \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos(t) \\ -R\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{R^3}$$

$$= \frac{1}{R^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für das Feld im Ursprung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\,dt = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z$$

Z-6.5 Vergleich elektr./magn. Feld

Elektr. Feld: $$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

Magn. Feld: $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

also

$$dq = \rho\, dV \quad \Leftrightarrow \quad I\,d\vec{l}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0$$

Beispiel: Feld eines unendlich langen Leiters ist ($dq = \lambda\, dl \;\Leftrightarrow\; I\, dl$):

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$