## Zusatzvorlesungen:

| | |
|---|---|
| Z-1 | Ein- und mehrdimensionale Integration |
| Z-2 | Gradient, Divergenz und Rotation |
| Z-3 | Gaußscher und Stokesscher Integralsatz |
| Z-4 | Kontinuitätsgleichung |
| Z-5 | Elektromagnetische Felder an Grenzflächen |
| Z-6 | Berechnung von Magnetfeldern |

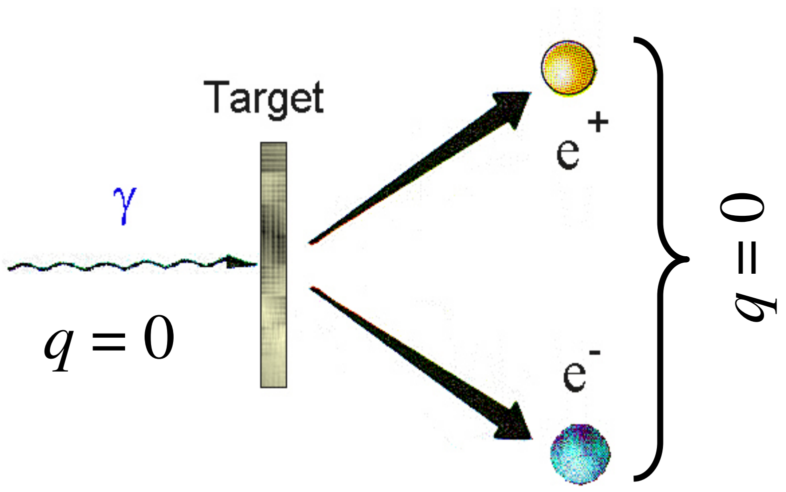
## Z-4 Kontinuitätsgleichung

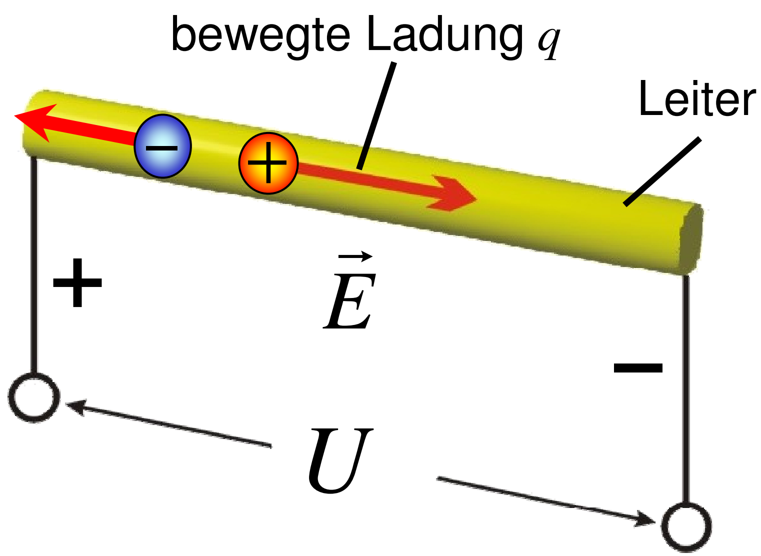
### Z-4.1 Einführung

In einem abgeschlossenen System gilt der Satz von der Erhaltung der Gesamtladung:

$$\sum_{i=1}^{N} q_{\mathrm{i}} = \text{const.}$$

Beispiel: Paarerzeugung




Wenn an einen Leiter eine Potentialdifferenz angelegt wird, dann bewegen sich die Ladungsträger.

Definition und Einheit des Stromes:

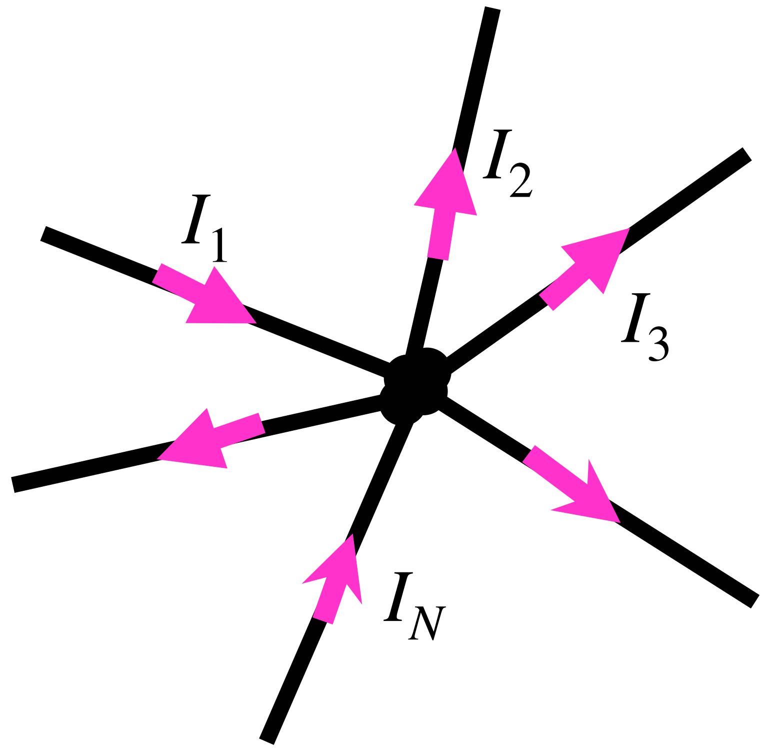
$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\,\text{Ampere}$$

## Z-4.2 Knotenregel

In jedem Knoten einer elektrischen Schaltung gilt die Ladungserhaltung, da sich in einem Leiter die Ladungen gleichmäßig verteilen und es somit nicht zu „Ladungsanhäufungen" kommen kann. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = q_{\text{Knoten}} = const.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_{\text{Knoten}}}{dt} = 0$$




In jedem Knoten verschwindet daher die Summe aller $N$ Ströme:

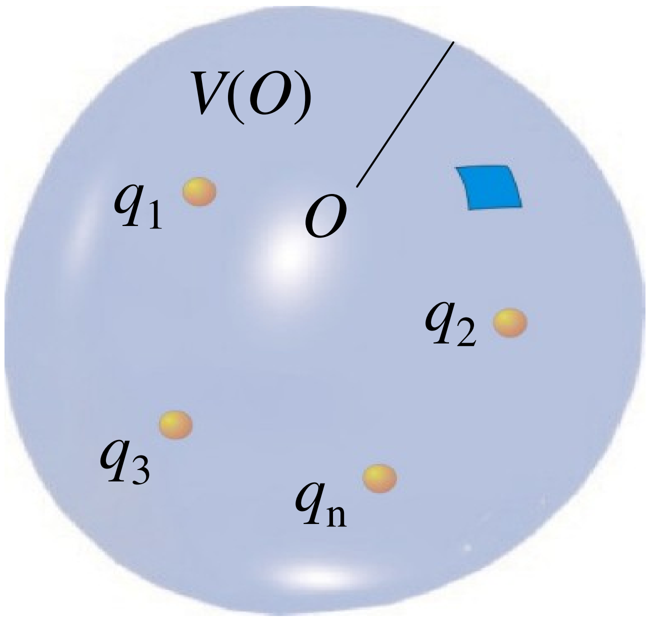
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

Die Kirchhoffsche Knotenregel ist also eine direkte Konsequenz aus der Ladungserhaltung. Wir werden die Ladungserhaltung jetzt noch allgemeiner formulieren.

## Z-4.3 Ladungsdichte

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung integriert man über alle Ladungselemente $dq$ im von der geschlossenen Oberfläche $O$ umschlossenen Volumen:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \quad \Rightarrow \quad \iiint_{V(O)} dq$$




Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$$

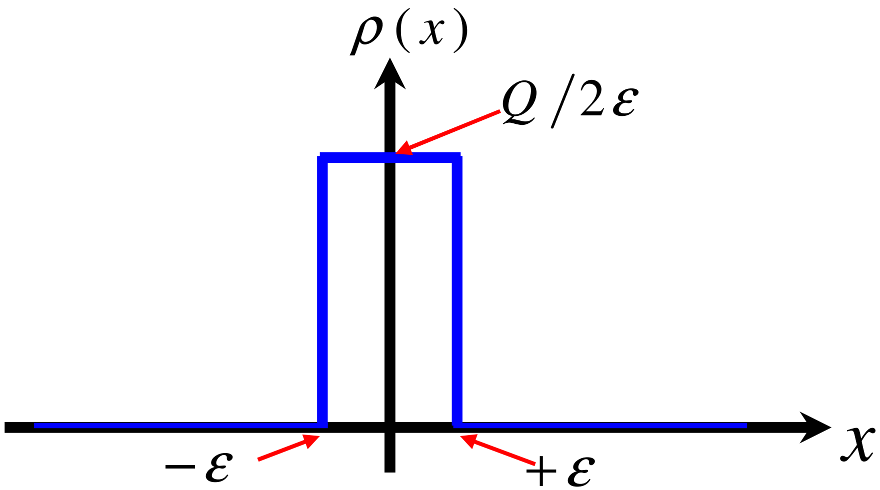
folgt das Volumenintegral:

$$\iiint_{V(O)} dq = \iiint_{V(O)} \rho(\vec{r})\, dV$$

Beispiel: Ladungsdichte einer Punktladung (eindimensional)

Wir betrachten eine Ladungsdichte (Ladung pro Länge):

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$$




Die Ladung $Q$ ist also im Raumbereich der Länge $2\varepsilon$ konzentriert. Die gesamte im Raum vorhandene Ladung $q_{\text{ges}}$ ergibt sich durch Integration über das Volumen (in 1D ist dies eine Länge):

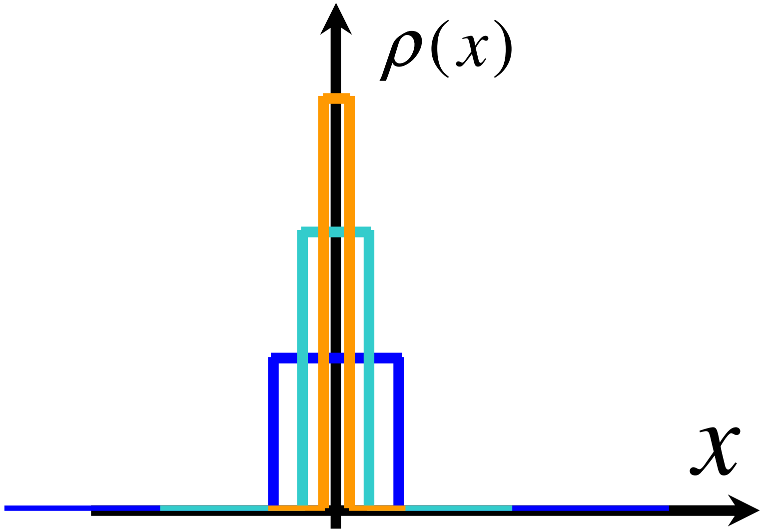
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{Q}{2\varepsilon}dx = \frac{Q}{2\varepsilon}2\varepsilon = Q$$

Für $\varepsilon \to 0$ ziehen sich die Kurven immer mehr zusammen, wobei aber natürlich die Fläche $Q$ unter der Kurve konstant bleibt.

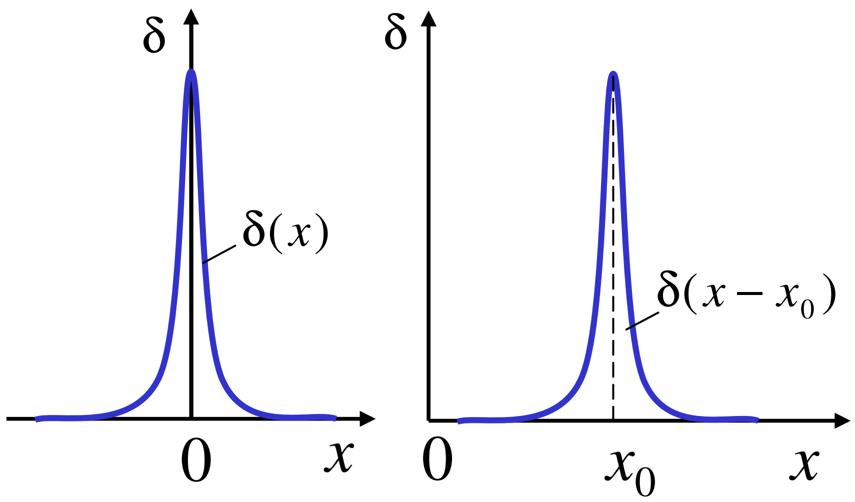
Die Ausdruck für $Q$ hängt nicht von der Intervalllänge $\varepsilon$ ab. Die Ladungsdichte

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

kann daher für $\varepsilon \to 0$ als Ladungsdichte einer Punktladung interpretiert werden.



- Dies kann auch mit kontinuierlichen Funktionen, die an einer Stelle einen „scharfen Reflex“ haben erreicht werden.




Die δ-Funktion (Delta-Funktion) ist eine infinitesimale „Nadelfunktion“, die am Argument $x_0$ über alle Grenzen wächst und außerhalb, d.h. für $x \neq x_0$, verschwindet. Dabei muss aber immer gelten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

Die δ-Funktion kann als „Grenzwert“ von kontinuierlichen, „normalen“ Funktionen aufgefasst werden. Diese Darstellung ist aber nicht eindeutig. Beispielsweise gilt:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \delta(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(Lx)}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right)$$

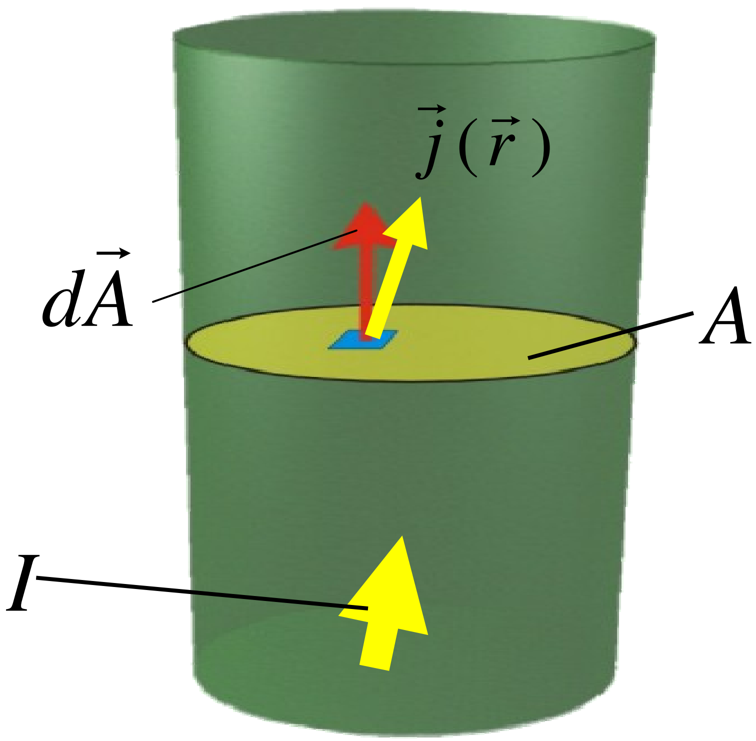
Für die Integrale über diese Funktionen ergibt sich jeweils:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(Lx)}{x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right) dx = 1$$

## Z-4.4 Stromdichte

Die Stromdichte $\vec{j}$ ist ein Vektor, der in Richtung des Stromflusses zeigt.




Der Strom $dI$, der durch eine Fläche $dA$ fließt ist gegeben durch:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Dieser Zusammenhang definiert den Vektor der Stromdichte. Dabei ist der Vektor des Flächenelementes wie vorher beim elektrischen Fluss definiert.

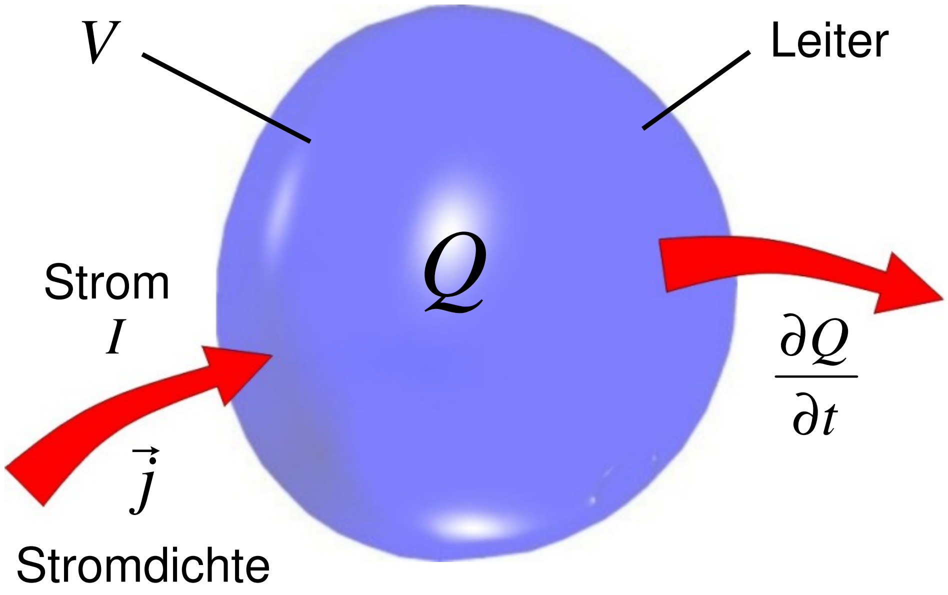
Der Gesamtstrom $I$, der durch eine Fläche $A$ fließt, lässt sich mit der Stromdichte dann folgendermaßen ausdrücken:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Wenn der Strom überall konstant ist und senkrecht durch die Fläche $A$ fließt, dann gilt einfach: $j = I/A$

## Z-4.5 Ladungserhaltung im abgeschlossenen Volumen

Wir betrachten ein abgeschlossenes Volumen $V$, in dem sich eine konstante Ladungsmenge $Q$ befindet, und in das ein Strom $I$ hineinfließt.




Die Ladung im Volumen ist:

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$

In das Volumen $V$ fließt der Strom:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Da die Gesamtladung $Q$ im abgeschlossenen Volumen $V$ erhalten bleiben soll, gilt für die Änderung der Ladung im Volumen:

$$I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Einsetzen für $Q$ und $I$ ergibt:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left( \iiint_V \rho(\vec{r},t) dV \right) = 0$$

Wegen des Gaußschen Satzes gilt:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right) dV$$

Einsetzen in die letzte Gleichung liefert:

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t)\right) dV + \iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} dV = 0$$

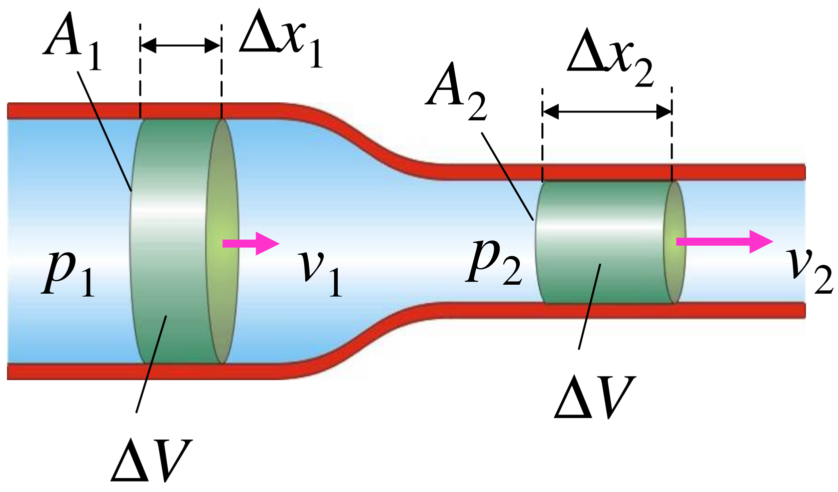
Da die Integranden gleich sein müssen, ergibt sich so die Kontinuitätsgleichung für den Zusammenhang zwischen der Strom- und der Ladungsdichte:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

Im Fall der Magnetostatik ($\partial/\partial t = 0$) gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

Für inkompressible Flüssigkeiten drückte die Kontinuitätsgleichung die Massenerhaltung aus:




Die Kontinuitätsgleichung besagte hier

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

Für 3D kompressible Flüssigkeitsströmungen gilt dagegen allgemein:

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$