Inhalt der Vorlesung Experimentalphysik I

Teil 1: Mechanik

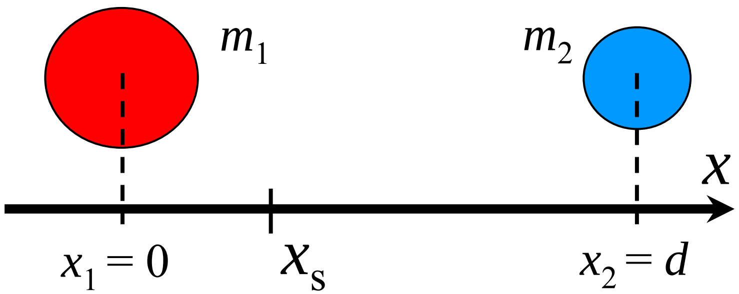
7. Massepunktsysteme und Stöße

Bisher haben wir die Dynamik von einzelnen Massepunkten untersucht. Dieses Kapitel behandelt die Wechselwirkung (Stöße) mehrerer Massepunkte, danach folgt in Kapitel 8 die Beschreibung der Dynamik solcher Systeme.

7.1 Starrer Körper, Schwerpunkt

Ein starrer Körper ist ein System aus Massepunkten m_i, welche untereinander feste Abstände $r_{ij} = r_j - r_i$ haben.

Wir betrachten zunächst zwei Massen



Der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt x_s ist in diesem Beispiel:

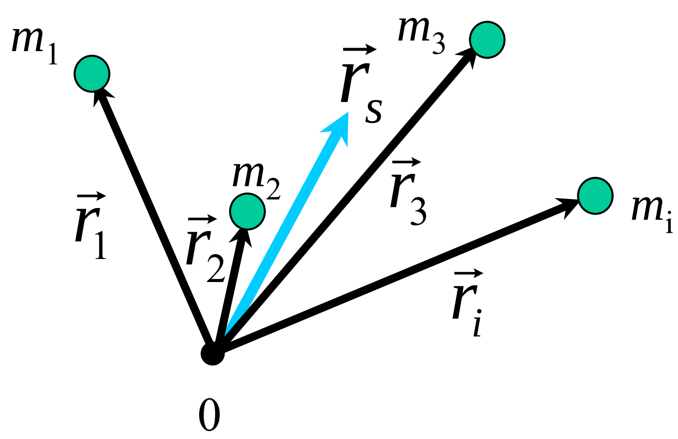
$$m_{ges} x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2 \;, \quad m_{ges} = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

Die allg. Zusammenhänge für Gesamtmasse M und Schwerpunkt r_s für ein System aus N Massepunkten lauten:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i$$



Bei kontinuierlichen Masseverteilungen muss der Schwerpunkt durch Integration über Massen dm bestimmt werden:

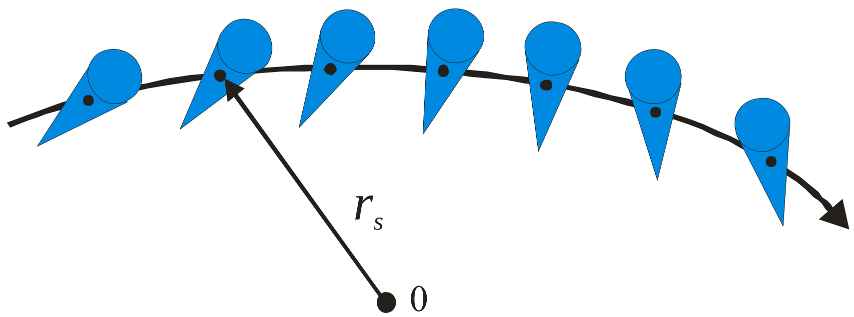
$$M = \int_{\text{Volumen}} dm$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r}\, dm = \frac{\rho}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r}\, dV$$

mit der Volumendichte $\rho = M/V = const.$.

7.2 Schwerpunktsystem, Relativkoordinaten und reduzierte Masse

Betrachtet wird die Flugbahn eines Kegels. Der Schwerpunktvektor beschreibt eine Parabelbahn:



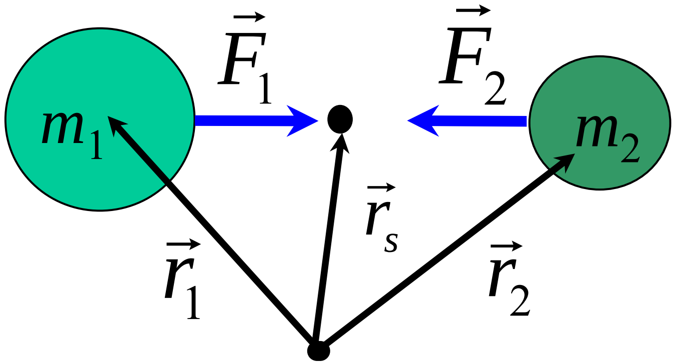
Die Berechnung (Übung!) des Schwerpunktvektors r_s in Zylinderkoordinaten ($dV = r\,dr\,d\varphi dz$) liefert das Ergebnis:

$$\vec{r}_s = \frac{3}{4} h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Bewegung von r_s lässt sich mit Hilfe der Dynamik für Massepunkte beschreiben. Für die Eigenbewegung (z.B. Rotation) des Kegels benutzt man ein sogenannte Schwerpunktsystem: Ein mit v_s bewegtes Koordinatensystem mit Ursprung in r_s. Vorteil: Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystems ist gleich Null.

Reduzierte Masse

Betrachtet werden 2 Körper der Massen $m_{1,2}$, die mit Kräften $F_{1,2}$ aufeinander wirken und ein abgeschlossenes System bilden (d.h. keine weiteren Kräfte).



Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{F_1}{m_1}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{F_2}{m_2} = -\frac{F_1}{m_1}$$

Die Differenz der Gleichungen liefert

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{F}_1$$

Mit der sogenannten reduzierten Masse μ und der Relativgeschwindigkeit v_{12}:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Die Beschreibung der Relativbewegung der Massen erfolgt als ein Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v_{12} im Schwerpunktsystem. Die zugehörige (kinetische) Energie ist $\frac{1}{2}\mu v_{12}^2$.

Beispiel: Wasserstoffatom

Ein Wasserstoffatom besteht aus Proton (m_p) und Elektron (m_e). Mit dem Massen $m_p \approx 1836\, m_e$. Die reduzierte Masse ist

$$\mu = 0.99946\, m_e \approx m_e$$

Es gilt für den Schwerpunkt:

$$r_s \approx \frac{1}{1837} r_B$$

mit dem sogenannten Bohrschen Radius $r_B = 0.5\times 10^{-10}$ m als mittlerer Abstand zwischen Elektron und Kern beim Wasserstoffatom.

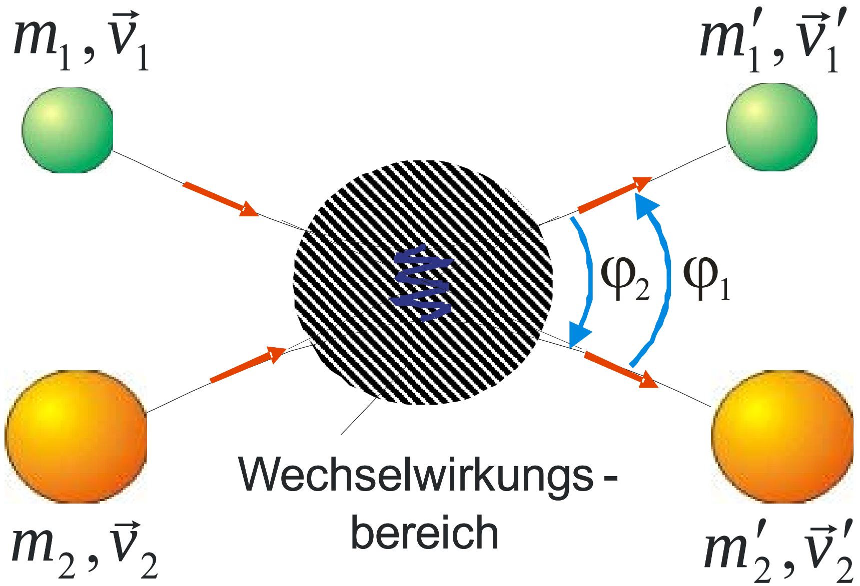
Es macht Sinn, die Bewegung bzw. Energie des Wasserstoffatoms aufzuteilen in (i) Translation des Schwerpunktes r_s mit Geschwindigkeit v_s und (ii) die Bewegung der Masse μ mit der Geschwindigkeit v_{12}.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(m_e + m_p)v_s^2 + \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$$

Der erste Beitrag (Bewegungsenergie) hat bei Raumtemperatur die Größenordnung 30 meV. Der zweite Beitrag (Innere Energie) ist deutlich größer und beträgt etwa 10 eV; er beschreibt die Bindungsenergie.

7.3 Elastische Stöße

Bewegte Körper können untereinander Stöße ausführen. Dabei ändert sich im allgemeinen deren Geschwindigkeit und Richtung.



Wirken keine äußeren Kräfte, so bleibt der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß konstant:

$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = const.$$

Von der Energiebilanz her lassen sich drei Fälle von Stößen unterscheiden:

Elastischer Stoß, mechanische Energie ($E_{pot} + E_{kin}$) bleibt erhalten.

Bsp.: Billiardkugeln

Inelastischer Stoß, mechanische Energie ($E_{pot} + E_{kin}$) ändert sich, z.B. durch Umwandlung in Wärme.

Bsp.: Autounfall (Verformungsarbeit)

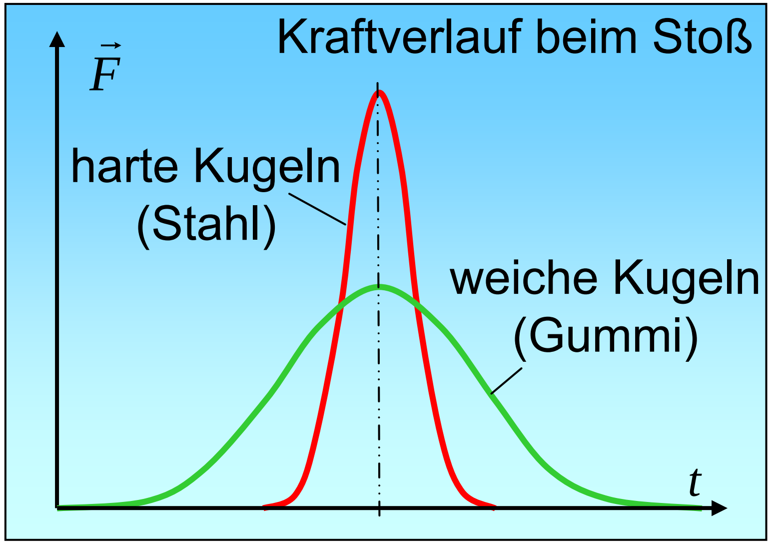
Superelastischer Stoß, ein Stoßpartner besitzt innere Energie, Zunahme der kinetischen Energie.

Bsp.: Stoß angeregter Elementarteilchen

Kraftstoß

In Kap. 3.2 wurde die Kraft F als zeitliche Änderung des Impulses p eingeführt. Integration dieser Beziehung führt auf die Interpretation des Impulses (genauer: Impulsänderung Δp) als „Kraftstoß“, d.h. das Einwirken einer Kraft F über eine (Wechselwirkungs-) Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \Delta \vec{p}$$

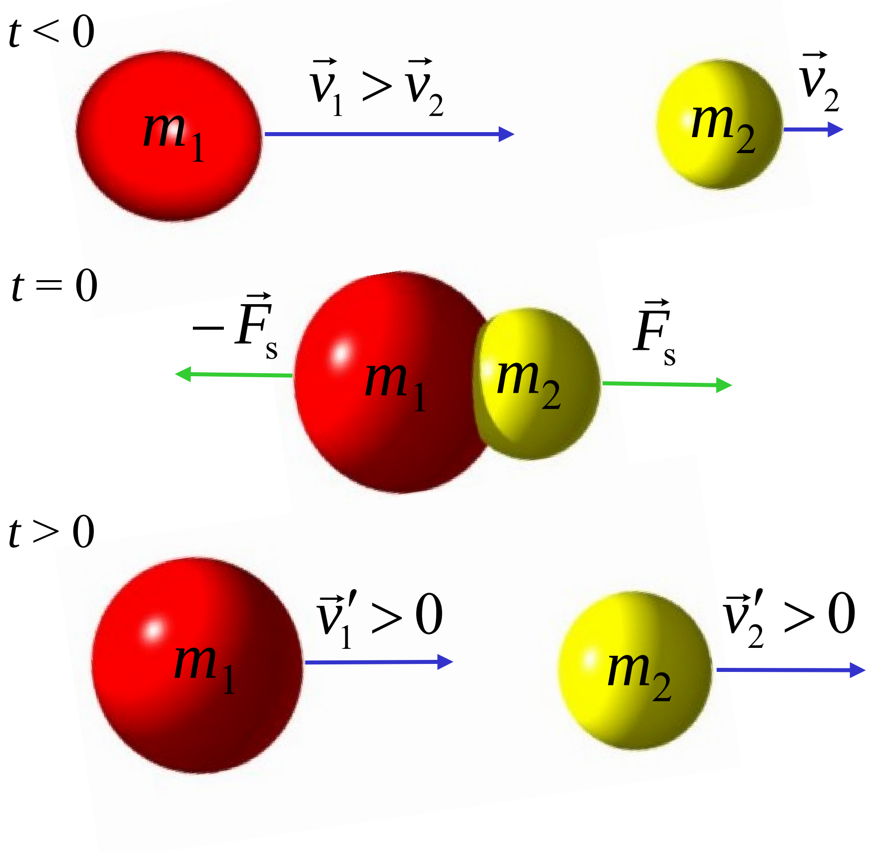


Eindimensionaler elastischer Stoß

Impulsbilanz vor $(t < 0)$ und nach $(t > 0)$ dem Stoß $(t = 0)$

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$p' = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \overset{!}{=} p$$



Energieerhaltung (da elastischer Stoß)

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Formal: Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ($v'_{1,2}$). Umformen liefert

$$m_1(v_1 - v'_1) = -m_2(v_2 - v'_2)$$

$$m_1(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1) = -m_2(v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2)$$

Dividieren der Gleichungen durcheinander führt auf die charakteristische Beziehung „Relativgeschwindigkeit ist gleich Rückstoßgeschwindigkeit“:

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$$

Geschwindigkeiten nach dem Stoß

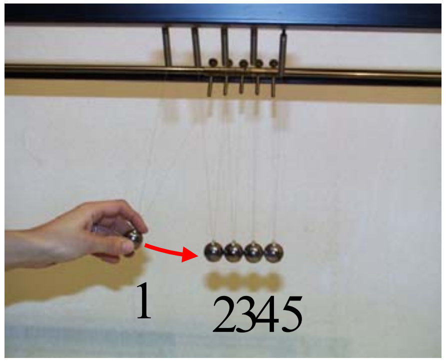
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

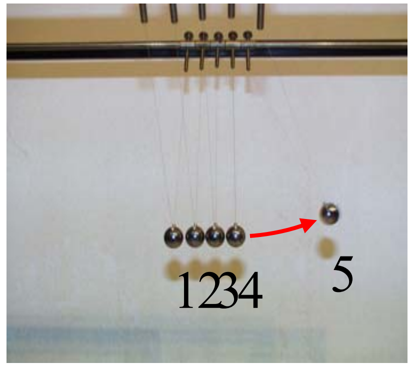
$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Beispiel 1: $m_1 = m_2$, m_2 sei in Ruhe

Resultat: $v'_2 = v_1$, d.h. Impuls und Energie werden vollständig übertragen.

Anwendung: Kugeltanz (s.u.), Abbremsen von Neutronen im Kernreaktor mit Wasser ($m_{Neutron} \approx m_H$).





Beispiel 2: $m_1 > m_2$, m_2 sei in Ruhe

Resultat: $v'_2 = (2m_1)/(m_1+m_2)\, v_1 > v_1$, d.h. Geschwindigkeitszunahme von Masse 2.

„Anwendung“: Fliege an Autoscheibe

7.4 Inelastische Stöße

Es gilt weiterhin Impulserhaltung, aber keine Energieerhaltung mehr:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

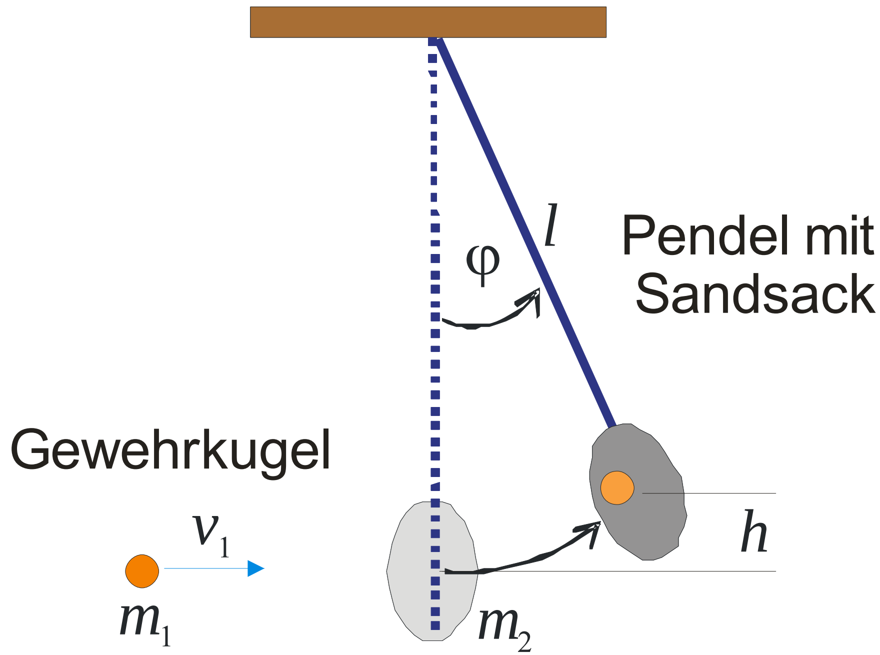
Neben den Anfangsbedingungen ($m_{1,2}$, $v_{1,2}$) muss i.Allg. mindestens eine weitere Größe bekannt. Ausnahme: vollständig inelastischer Stoß, bei dem die Massen aneinander „kleben“ bleiben. Hierfür gilt:

$$v' = v'_1 = v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

Eine Anwendung der Gesetze zum vollständig inelastischen Stoß ist das sogenannte „Ballistische Pendel“ zur Messung der Geschwindigkeiten von Geschossen.

7.5 Ballistisches Pendel

Eine Kugel (m_1, v_1) wird in einen an einem Pendel hängenden Sandsack (m_2, $v_2 = 0$) geschossen. Aus der Höhenzunahme h nach dem Einschuss soll die Geschwindigkeit v_1 bestimmt werden.

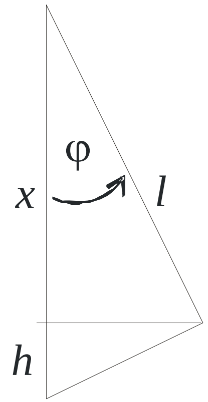


Beim Einschuss (inelastischer Stoß) gilt Impulserhaltung :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v'_2$$

Nach dem Einschuss gilt Energieerhaltung: Kinetische Energie wird beim Ausschlag des Pendels in potentielle Energie umgewandelt.

Für die Höhe h gilt:



$$h = l - x$$
$$= l(1 - \cos\varphi)$$

$$v'_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(1-\cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g(1-\cos\varphi)}$$