Inhalt der Vorlesung Experimentalphysik I

Teil 1: Mechanik

6. Bewegte Bezugssysteme

6.1 Inertialsysteme

Bewegungen werden in der Physik relativ zu wohldefinierten Bezugssystemen beschrieben. Hierbei ist die Wahl der Koordinaten (z.B. kartesische, Kugel- oder Zylinderkoordinaten) beliebig, d.h. die Naturgesetze dürfen nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen.

Systeme, in denen die Newtonschen Gesetze gelten, heißen Inertialsysteme.

Jedes Bezugsystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist selbst wieder ein Inertialsystem.

Zur Umrechnung zwischen bewegten Bezugssystemen sind Transformationsgleichung.

6.1 Gleichförmig bewegte Systeme

Es bewege sich ein Bezugsystem $S´$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}$ relativ zum ruhenden Bezugssystem S. Ein Punkt A hat dann in $S´$ die Koordinaten:

$$x' = x - u_x t, \; y' = y - u_y t, \; z' = z - u_z t$$

Beide Systeme besitzen gleiche Uhren:

$$t = t'$$

Dies gilt, solange $|u| << c$.

Für die Geschwindigkeit des Punktes A gilt dann

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ bzw. } v' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Weiter erhält man für die Beschleunigung des Punktes A

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ bzw. } a' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$$

d.h. in beiden Systemen werden die gleichen Kräfte beobachtet: Sie sind beide Inertialsysteme.

Diese Transformation vom System S‘ in das System S wird als Galilei-Transformation bezeichnet:

$$r = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

6.3 Beschleunigte Bezugssysteme

In allen beschleunigten Bezugssystemen treten zusätzliche Scheinkräfte auf, die durch Transformation in ein Inertialsystemen wegfallen.

Es wird der Fall eines Systems $S´$ betrachtet, welches mit $a = du/dt$ gegenüber dem System S beschleunigt wird.

Für den Ortsvektor von A in $S´$ gilt dann

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}_0 t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \ , \ \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

sowie für Geschwindigkeit und Beschleunigung

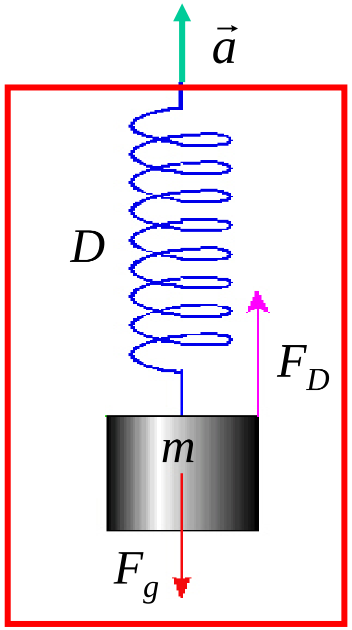
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}_0 - \vec{a}t$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} \neq \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Im beschleunigten Bezugssystem werden also unterschiedliche Kräfte ($a \neq a'$) beobachtet; es ist kein Inertialsystem.

Bsp.: Fahrstuhl mit Masse m an Feder

Die Bewegung der Masse m wird einmal vom Portier (System S) sowie einmal vom Fahrstuhlführer (System S') beobachtet.



System S: Die Masse wird zusammen mit dem Fahrstuhl beschleunigt, für die wirkende Kraft gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_D$$
$$= m\vec{g} + m(\vec{a} - \vec{g}) = m\vec{a}$$

System S': Aus Sicht des Fahrstuhlführers ist die Masse in Ruhe, die wirkende Kraft demnach gleich Null:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_D + \vec{F}_T = 0$$
$$\Rightarrow \vec{F}_T = -m\vec{a}$$

d.h. auf die Masse wirkt eine so genannte Scheinkraft oder Trägheitskraft

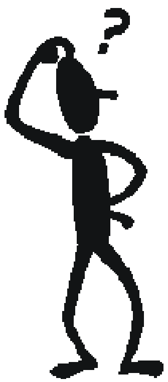
$$\vec{F}_T = -m\vec{a}$$

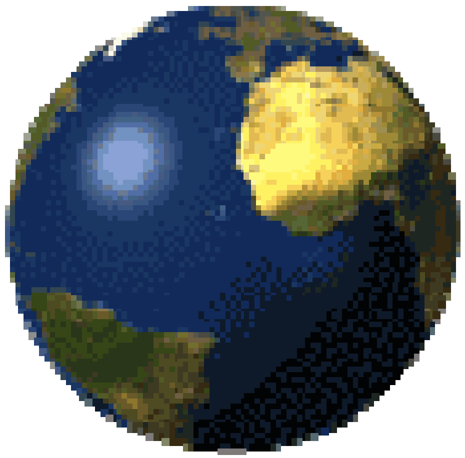
Trägheitskräfte treten in beschleunigten Bezugssystemen auf, wenn die Beschleunigung nicht berücksichtigt wird.

6.4 Rotierende Bezugssysteme

In dieser Situation fallen die Koordinatenursprünge von S und $S´$ zusammen; das System $S´$ rotiere mit einer festen Winkelgeschwindigkeit $\omega = const.$ um S.

Dies entspricht der Situation der Erde im (näherungsweise ortsfesten) Sonnensystem:





Ist die Erde ein Inertialsystem ?

Das Ziel der folgenden Berechnung ist es, die Beschleunigung zu bestimmen, die ein (mitbewegter) Beobachter im System $S`$ sieht. Diese Beschleunigung $a´$ wird sowohl von der Winkelgeschwindigkeit ω als auch von der Geschwindigkeit $v´$ des Beobachters im System $S´$ abhängen.

Als (vorweg genommenes) Ergebnis erhält man zusätzliche Scheinbeschleunigungen, welche den zugehörigen Scheinkräften entsprechen: die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft, welche beide auf den Beobachter wirken:

$$\vec{a}' = \vec{a} + 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$
$$= \vec{a} + \quad \vec{a}_c \quad + \quad \vec{a}_z$$

$\vec{a}_c$: Coriolis-Beschleunigung

$\vec{a}_z$: Zentrifugalbeschleunigung

S und S' haben gemeinsamen Ursprung, aber die Koordinatenachsen ($e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$) rotieren mit $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ um das ortsfeste Koordinatensystem (e_x, e_y, e_z).

Betrachte Punkt A im System S

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z$$

Der gleiche Punkt A im System S' ist

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{e}_{x'} + y'(t)\hat{e}_{y'} + z'(t)\hat{e}_{z'}$$

Hier ist nun zu beachten, dass die Koordinatenachsen ($e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$) sich zeitlich ändern: Die Endpunkte der Vektoren $\hat{e}_{i'}$ machen eine Kreisbewegung, also z.B.

$$\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{x'}$$

Die Geschwindigkeit v von A lässt sich alternativ aus Sicht des Beobachters in S, aber mit Hilfe der rotierenden Koordinatenachsen als $v^*(x',y',z')$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(x,y,z,t) = v^*(x',y',z',t) &= \frac{dr'}{dt} \\
&= \frac{dx'}{dt}\hat{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{e}_{z'} \\
&\quad + x'\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \\
&= \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
&= \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \ , \quad \text{da } \vec{r} = \vec{r}'
\end{aligned}$$

Hier ist v' die Geschwindigkeit, welche ein Beobachter in S' sieht, wenn er die Rotation ω nicht berücksichtigt. Die Geschwindigkeit $u = \omega \times r$ ist eine Korrektur, die diesen Unterschied berücksichtigt.

Das Zwischenergebnis lautet demnach

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Ohne Rotation ($\omega = 0$) gilt also $v = v'$.

Die Beschleunigung des Punktes A ist

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

mit $\quad \vec{v}'(t) = \frac{dx'}{dt}\hat{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{e}_{z'}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{e}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{e}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{e}_{z'}$$
$$+ \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{e}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{e}_{z'}}{dt}$$
$$= \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

Hier ist a' die Beschleunigung, die der Beobachter in S' sieht.

Damit erhält man als Beziehung der Beschleunigungen in beiden Systemen

$$\vec{a} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v})$$
$$= \vec{a}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{a} + (\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$
$$= \vec{a} + \vec{a}_c + \vec{a}_z$$

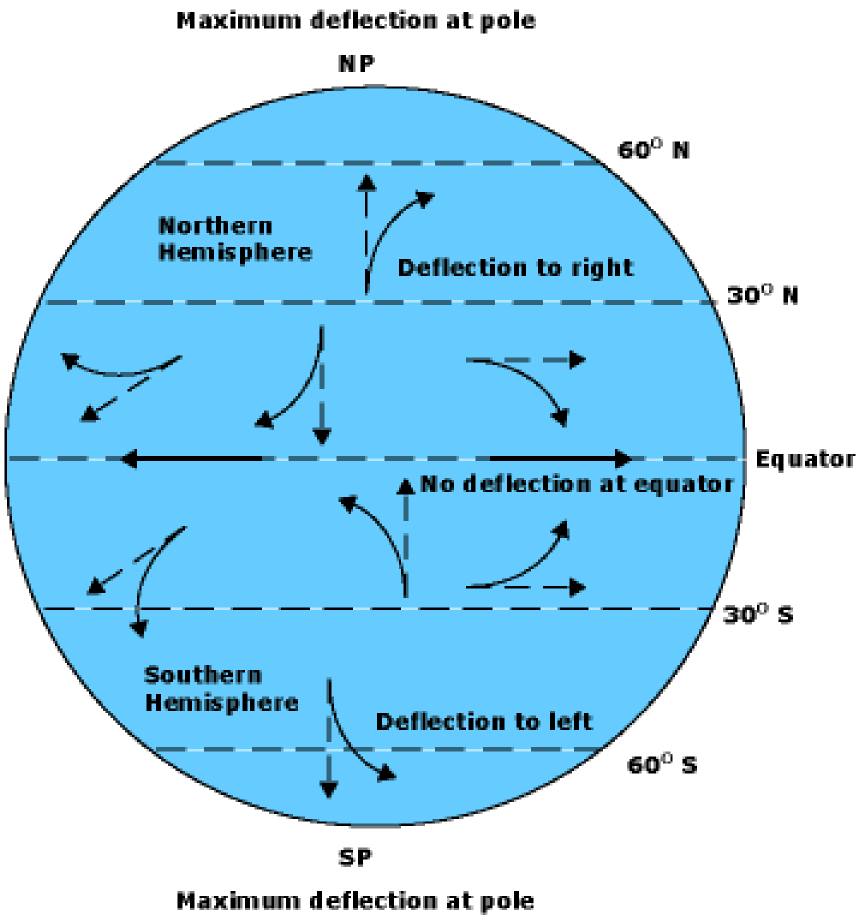
Hier wurde die Beziehung $\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})$ benutzt.

Für den (mitrotierenden) Beobachter in S' treten also zwei Scheinkräfte auf: Zum einen die Coriolis-Kraft F_c und zum anderen die Zentrifugalkraft F_z

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

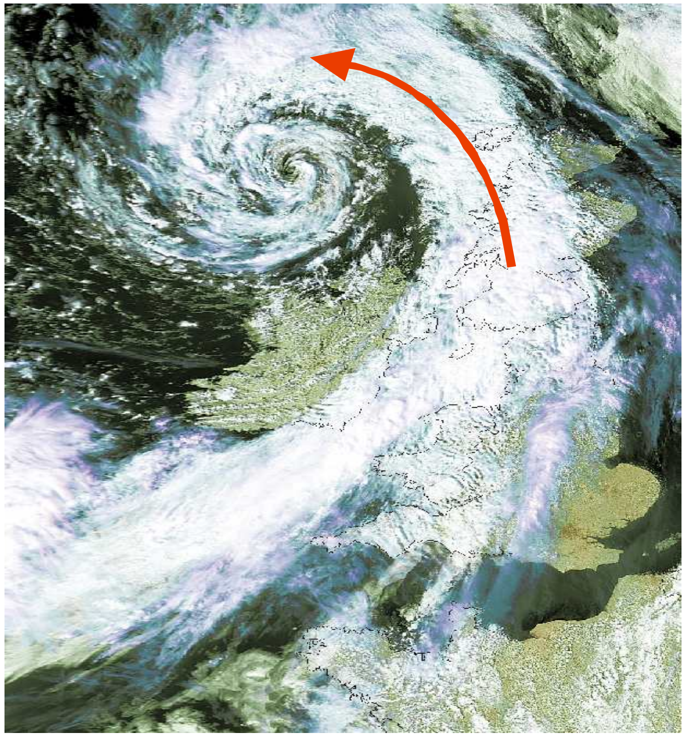
$$\vec{F}_z = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

Aufgrund der Coriolis-Kraft ergibt sich für auf der Erde bewegte Massen eine Ablenkung aus der Bewegungsrichtung, welche sich auf der Nord- bzw. Südhalbkugel unterscheidet:



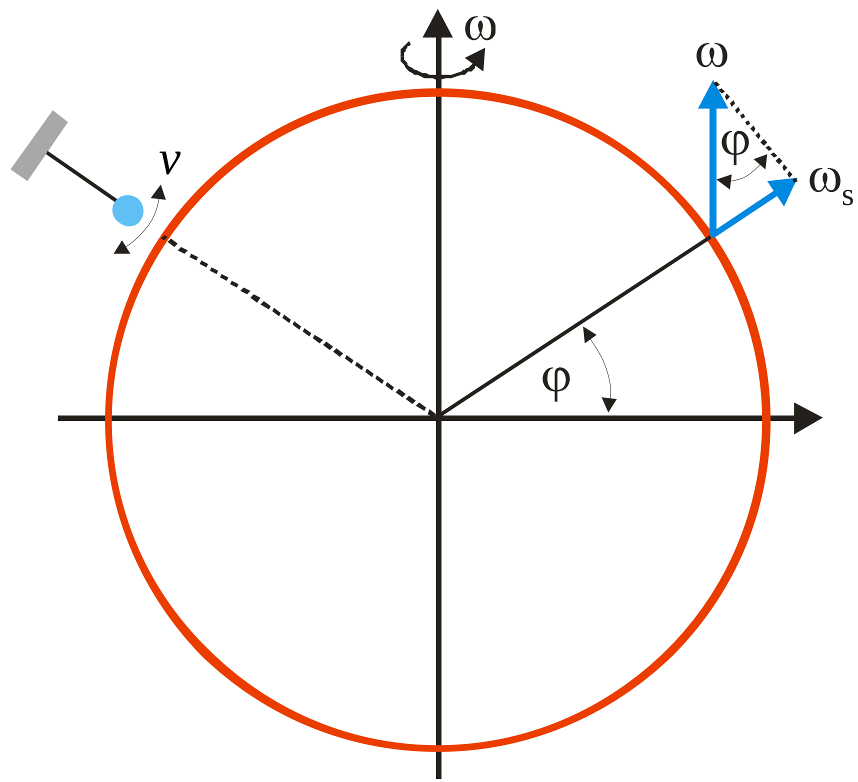
Beispiel: Hoch- und Tiefdruckgebiete

Bei einem Tiefdruckgebiet (siehe Bild) strömt Luft zum Zentrum geringsten Druckes hin. Dies führt zu einer Rotation der Luftmassen im Gegenuhrzeigersinn. Entsprechend drehen sich Hochdruckgebiete im Uhrzeigersinn.



Beispiel: Foucault-Pendel

Ein Foucault-Pendel ist ein Fadenpendel, welches sich in einem rotierenden Bezugssystem (Erde) befindet. Durch die Erdrotation ändert sich so für einen Beobachter mit der Zeit die Schwingungsebene; ein Foucault-Pendel lässt sich daher als Uhr benutzten.



Die Erde rotiert mit der Kreisfrequenz

$$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\approx 7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$$

An den Polen ist der Effekt maximal; auf dem Breitengrad φ wirkt allerdings nur die Komponente (siehe Bild):

$$\omega_s = \omega \sin\varphi$$

Aus der „Sicht“ des Pendels wirkt auf die sich abwechselnd mit $\pm v$ bewegende Masse m die Coriolis-Kraft

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2mv\omega_s$$