Inhalt der Vorlesung Experimentalphysik I

Teil 1: Mechanik

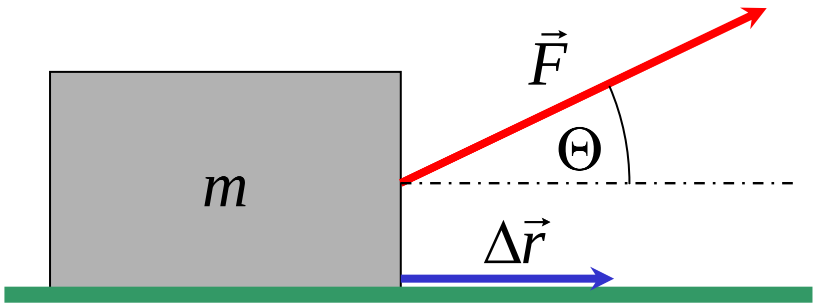
…
3. Dynamik von Massepunkten
4. Gravitation
5. Energie und Arbeit
   - 5.1 Definition der Arbeit
   - 5.2 Potentielle Energie
   - 5.3 Kinetische Energie
   - 5.4 Energieerhaltung
   - 5.5 Mechanische Leistung
   - 5.6 Kraftfeld und Potential
   - 5.7 Reibungskräfte
6. Bewegte Bezugsysteme
7. Massepunktsysteme
8. ...

5 Arbeit, Energie und Leistung

Dynamik: Lösung der Bewegungsgleichung $F = ma = m\ddot{x}$ mit bekannter Kraft der Form $F = F(t)$. Im Allgemeinen hängt die Kraft vom Ort ab, ist also ein sogenanntes Kraftfeld $F = F(r(t))$. Die Lösung der Bewegungsgleichung führt dann auf die Begriffe Arbeit und Energie.

5.1 Definition der Arbeit

Auf einen Körper wirke die Kraft $\vec{F}$, die ihn um die Strecke $\Delta\vec{r}$ verschiebt.



Dann ist die geleistete Arbeit gleich dem Skalarprodukt aus der (hier: konstanten) Kraft und dem Verschiebungsvektor:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\, \Delta r \cos\Theta$$

Wichtig: Nur die Kraft (-komponente) in Richtung der Verschiebung trägt zur Arbeit bei – die oft genannte Beziehung „Arbeit ist Kraft mal Weg" beschreibt nur die Situation wenn beide Vektoren (F, Δr) parallel stehen.

Die obige Beziehung gilt auch nur, wenn die Kraft entlang der Verschiebung konstant ist. In dem gezeigten Beispiel ist die Arbeit Reibungsarbeit (Umwandlung in Wärme):

$$W = |\vec{F}_R|\,|\Delta\vec{r}| = -F_R\, s$$

Die Einheit der Arbeit ist Joule:

[W] = 1 Joule = 1 J = 1 N m

1 J = 1 Nm = 1 kg m²/s²

Ist die Kraft entlang der Verschiebung nicht konstant oder der Weg gekrümmt, muss bei der Berechnung der Arbeit anders vorgegangen werden: Es wird über infinitesimale Teilarbeiten oder –wege summiert bzw. integriert.

Auf dem Wegstück Δr werde die Arbeit ΔW verrichtet:

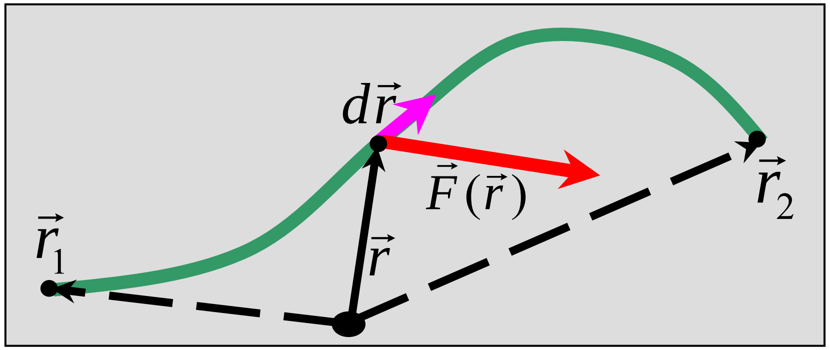
$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r}$$

Die gesamte Arbeit W ist die Summe über alle Wegstücke i

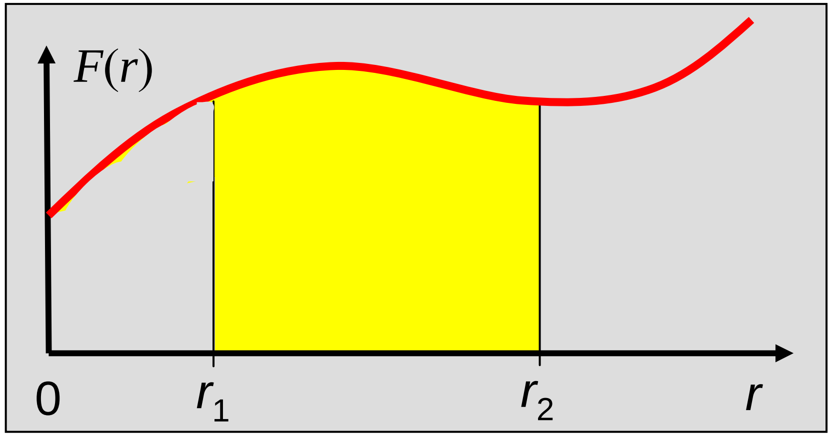
$$W = \sum \Delta W = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Für den Grenzfall $\Delta r_i \to 0$ folgt das Linien- bzw. Wegintegral

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



W ist also die Fläche der Kurve $F(r)$



Bsp.: Ortsunabhängige Kraft: Reibung

Ein Körper der Masse m wird auf einem Wege vom Ort r_1 zum Ort r_2 bewegt. Es wirkt eine ortsunabhängige Reibungskraft F_l

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_R \, dr$$

$$= -F_R (r_2 - r_1)$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt hier, dass die Reibungskraft dem Weg entgegengerichtet ist. Ein negatives Vorzeichen der Arbeit W steht für (am Körper) verrichtete Arbeit.

Beispiel: Ortsabhängige Kraft: Feder

Eine Feder wird durch die Kraft F um die Länge x gedehnt. Es gilt das Hookesche Gesetz:

$$D = \frac{F}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -D\,x = F_D$$

Die zum Spannen der Feder aufgewendete Arbeit ist dann

$$W = \int_0^x F(\tilde{x})\,d\tilde{x} = -D \int_0^x \tilde{x}\,d\tilde{x}$$

$$= -D\left[\frac{\tilde{x}^2}{2}\right]_0^x = -\frac{1}{2} D x^2$$

In der (gespannten) Feder wird diese Arbeit als potentielle Energie gespeichert

$$W = \frac{1}{2} D\,x^2$$

5.2 Potentielle Energie

Potentielle Energie ist die Arbeit an einem Körper, um ihn gegen die Kraft F vom Ort r_0 zum Ort r zu verschieben:

$$E_{pot}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' = W(\vec{r}) - W_0$$

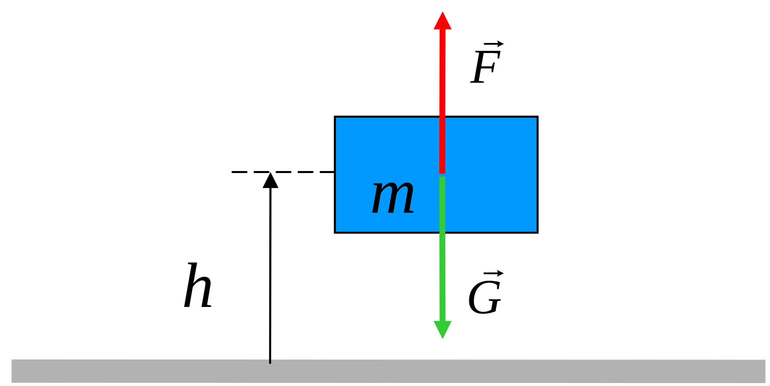
Die Energie $W_0 = W(\vec{r}_0)$ ist dabei ein (willkürlich) gewählter Bezugspunkt.

Physikalische Aussagen sind nur für Differenzen der potentiellen Energie sinnvoll:

$$\Delta E_{pot}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' = W(\vec{r}_2) - W(\vec{r}_1)$$

ist die Änderung der potentiellen Energie bei Verschieben des Körpers von r_1 nach r_2.

Bsp.: Masse m im Schwerefeld der Erde



Die wirksame Kraft lautet

$$\vec{F} = -\vec{G} = m\,\vec{g}$$

Beim Heben ist F parallel zum Weg h und konstant, so dass gilt $E = m\,g\,h$.

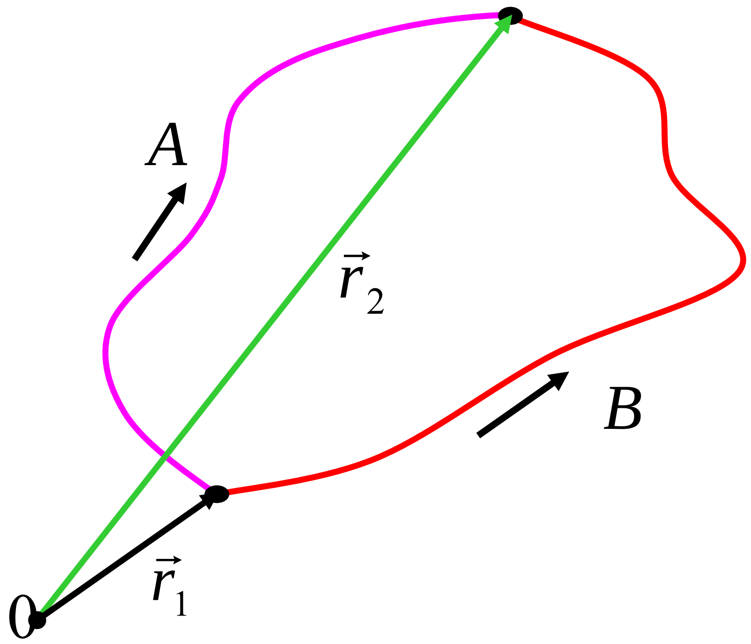
Die Arbeit W ist aufzubringen, um die Masse m in die Höhe h zu bringen. Gegen den Boden ist die potentielle Energie erhöht um den Betrag

$$E_{pot} = W = m\,g\,h$$

Konservative Kräfte

Für viele Kräfte ist die potentielle Energie unabhängig vom Weg, auf dem ein Körper verschoben wird. Solche Kräfte nennt man konservative Kräfte.

Ein Körper werde vom Ort r_1 zum Ort r_2 einmal über den Weg A und alternativ über den Weg B verschoben.



$$\Delta E_{pot} = \int_A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \int_A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Kräfte, welche die letzte Bedingung erfüllen, heißen konservative Kräfte.

Beispiele für konservative Kräfte:

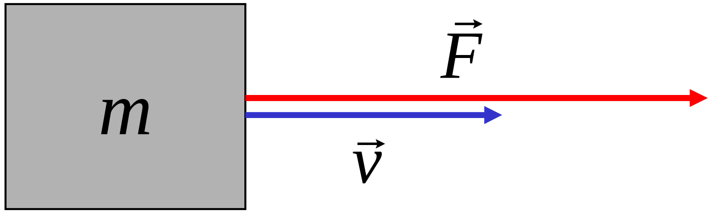
- Gravitationskraft, Coulomb-Kraft

Beispiel für nicht-konservative Kräfte:

- Reibungskraft (weil ~Weg)

5.3 Kinetische Energie

Ein Körper der Masse m wird durch die konstante Kraft F auf die Geschwindigkeit v beschleunigt.



Die dabei geleistete Arbeit führt zur Erhöhung der Bewegungsenergie oder kinetischen Energie:

$$E_{kin}(\vec{r}) = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r} = (m\vec{a}) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{a} t^2 \right)$$

$$= (m\vec{a}) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{a} \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m v^2 (\vec{r})$$

Bei einer Geschwindigkeitsänderung von v_1 auf v_2 ändert sich also die kinetische Energie um den

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)$$

5.4 Energieerhaltung

Die Summe aus potentieller Energie und kinetischer Energie ist zeitlich konstant:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = const.$$

oder

$$\frac{\partial E_{ges}}{\partial t} = 0$$

oder

$$E_{pot}(\vec{r}_1) + E_{kin}(\vec{r}_1) = E_{pot}(\vec{r}_2) + E_{kin}(\vec{r}_2)$$

Die Energieerhaltung lässt sich mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetzes beweisen:

$$E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

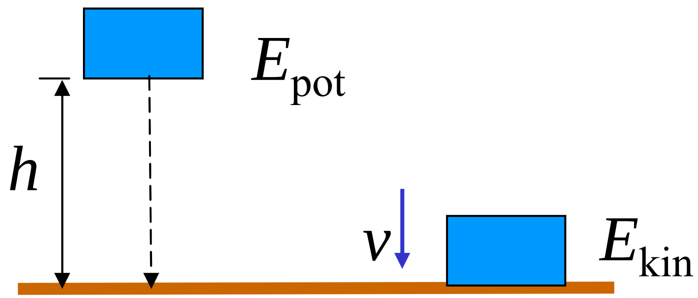
$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\,\vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} \vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$= m \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} \vec{a} \cdot \vec{v}\,dt = m \int_{t_1(\vec{r}_1)}^{t_2(\vec{r}_2)} \frac{1}{2}\left(\frac{dv^2}{dt}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{v_1(\vec{r}_1)}^{\vec{v}_2(\vec{r}_2)} dv^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

Beispiel: Freier Fall

Eine Masse m fällt aus der Höhe h über dem Boden nach unten.



In der Höhe h gilt

$$E_{pot}^{(1)} = m\,g\,h, \quad E_{kin}^{(1)} = 0$$

und am Boden (Bezugspunkt $W_{pot} = 0$)

$$E_{pot}^{(2)} = 0, \quad E_{kin}^{(2)} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E^{(1)} = E^{(2)} \Leftrightarrow m\,g\,h = \frac{1}{2} m\,v^2$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Beispiel: Luftgewehrschuss

Federkraft mit Federkonstante D

$$F_D(x) = -D\,x$$

Arbeit zum Spannen der Feder um die strecke x_0

$$W_D = \int_0^{x_0} F_D\,dx = -\frac{1}{2} D\,x_0^{\,2}$$

Luftgewehrschuss: Umwandlung von potentieller in kinetische Energie zur Beschleunigung der Luftgewehrkugel mit Masse m (Annahme: masselose Feder)

$$\frac{1}{2} D\,x_0^{\,2} = \frac{1}{2} m\,v_0^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}\,x_0$$

Beispiel: Federschwingung (Kap. 3.7)

Kinetische Energie der (waagerecht) schwingenden Masse m

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Potentielle Energie der ausgelenkten Feder mit Federkonstante D

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$$

Harmonische Schwingung

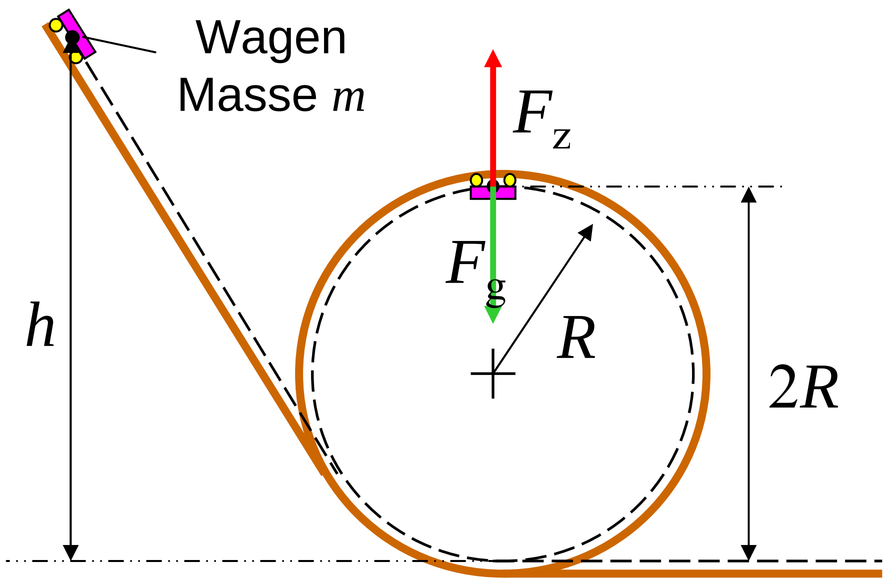
$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = D/m$$

Beweis der Energieerhaltung

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2} x_0^2 \{m\omega^2 \cos^2(\omega t) + D \sin^2(\omega t)\} \\ &= \frac{1}{2} x_0^2 D = const. \end{aligned}$$

Beispiel: Loopingbahn

Ein Wagen der Masse m startet in einer Höhe h auf einer schrägen Rampe und durchläuft einen Looping. Wie groß muss h sein, damit der Wagen im höchsten Punkt gerade nicht herunterfällt?



Ansatz: Bei hinreichend hoher Geschwindigkeit überwiegt die Zentrifugalkraft F_z gegenüber der Gewichtskraft F_g.

Reibung werde vernachlässigt. Da die Kräfte im Scheitelpunkt entgegengesetzt sind wird mit Beträgen gerechnet.

$$F_z = m\,a_z = m\frac{v^2}{R} = mg = F_g$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = g\,R$$

Energieerhaltung liefert

$$E_{\text{pot}}^{\text{Start}} = E_{\text{pot}}^{\text{Loop}} + E_{\text{kin}}^{\text{Loop}}$$

$$m\,g\,h = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$\Delta E_{\text{pot}} = m\,g\,(h-2R) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2g(h-2R) = gR$$

$$\Rightarrow h = \frac{5}{2}R$$

Beispiel: Fluchtgeschwindigkeit

Gesucht ist die Geschwindigkeit, auf die Körper (z.B. Rakete) auf der Erde beschleunigt werden muss, damit er das Schwerefeld der Erde verlassen kann.

Die notwendige Energie zum Verlassen der Erde (d.h. Arbeit gegen die Gravitationskraft, von der Erdoberfläche R_E bis „unendlich“ weit weg) ist:

$$W_{Flucht} = \int_{R_E}^{\infty} F_G(r)\, dr$$

$$= G\, m\, m_E \int_{R_E}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= G\, m\, m_E / R_E$$

Die notwendige kinetische Energie ist

$$\frac{1}{2} m v^2 = G\, m\, m_E / R_E$$

$$\Leftrightarrow v = v_{Flucht} = \sqrt{2 G m_E / R_E}$$

$$\approx 11.2 \text{ km/s}$$

Der Abschuss von (interplanetaren) Raketen erfolgt meist in Äquatornähe (z.B. Cape Canaveral) und in östlicher Richtung, um die Rotationsgeschwindigkeit (ca. 1.5 km/s) der Erde zu nutzen.

Der von der Rakete eingeschlagene Weg (z.B. radial oder Spiralbahn) ist aus energetischer Sicht unerheblich; allerdings ist die Energiezufuhr zum Erreichen von v_{Flucht} über einen längeren Weg u.U. leichter zu erreichen.

5.5 Mechanische Leistung

Die auf die Zeit bezogene Arbeit ist als Leistung definiert:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Leistung ist gleich Arbeit pro Zeit.

Damit ist die Arbeit auch

$$W = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\,dt$$

Die Einheit der Leistung ist:

$$[P] = 1\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1\,\text{Watt} = 1\text{W}$$

$$\text{früher: } 1.36\,\text{PS} = 1\text{kW}$$

Beispiel: Beschleunigung PKW

Ein PKW mit Masse $m = 1200$ Kg und einem 75 PS-Motor beschleunige aus dem Stand auf $v_0 = 100$ km/s. Gesucht ist die Beschleunigungszeit t_B.

$$P = E_{kin} / t_B = \frac{1}{2} m v_0^2 / t_B$$

$$\Leftrightarrow t_B = \frac{1}{2} m v_0^2 / P$$

$$\approx 9\text{ s}$$

Anmerkung: Es wurde vernachlässigt, dass der Motor die Maximalleistung nicht während der gesamten Beschleunigungsphase erbringt. Daher ist die Zeit t_B hier deutlich zu kurz.

5.6 Kraftfeld und Potential

Die in einer gespannten Feder gespeicherte potentielle Energie war:

$$W(x) = \frac{1}{2} D\, x^2$$

Durch Differenzieren ergibt sich:

$$\frac{dW(x)}{dx} = D\, x = -F_D(x)$$

mit der Federkraft $F_D(x)$, welche die Feder auseinander drückt. Dies ist also die Kraft, welche auf die Feder wirkt. Aus der potentiellen Energie W lässt sich also die wirksame Kraft berechnen:

$$F(x) = -\frac{dW(x)}{dx}$$

Allgemein gilt in drei Dimensionen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} dW/dy \\ dW/dy \\ dW/dz \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} W = -\mathrm{grad}\, W$$

mit dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und dem Potential $W(\vec{r})$.

Die Größe $\vec{\nabla}$ heißt Nabla-Operator.

Aus der Kenntnis des wirksamen Potentials (d.h. dem Wissen, wie sich die potentielle Energie räumlich ändert) lässt sich damit die auf einen Körper wirkende Kraft berechnen, womit dann die Beschreibung der zugehörigen Bewegung möglich ist.

Häufig benutzt man für das Potential V oder U statt W.

Beispiel: Bewegung der Masse m im Gravitationspotential der Erde

Auf die Masse m wirkt im Abstand r die Gravitationskraft :

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = G\frac{m\,m_E}{r^2}\hat{r}$$

Das zugehörige Potential lautet dann:

$$U(\vec{r}) = -G\frac{m\,m_E}{r}$$

Beweis:

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,U(\vec{r})$$

$$= Gmm_E\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$= -Gmm_E\left\{\frac{-1/2\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \ldots\right\}$$

$$= Gmm_E\left\{\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right\} = Gmm_E\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Zur Berechnung von Bewegungen eines Körpers in einem Potential müssen häufig weitere Nebenbedingungen berücksichtigt werden, z.B. Energieerhaltung.

Bsp.: Effektives Potential des Mondes im Schwerefeld der Erde

Die Bewegung des Mondes wird durch das Gleichgewicht von Zentrifugal- und Gravitationskraft bewirkt. Es gibt zwei Erhaltungsgrößen:

Energie: $E = E_{kin} + E_{pot} = const.$

Zentralkraft: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = const.$

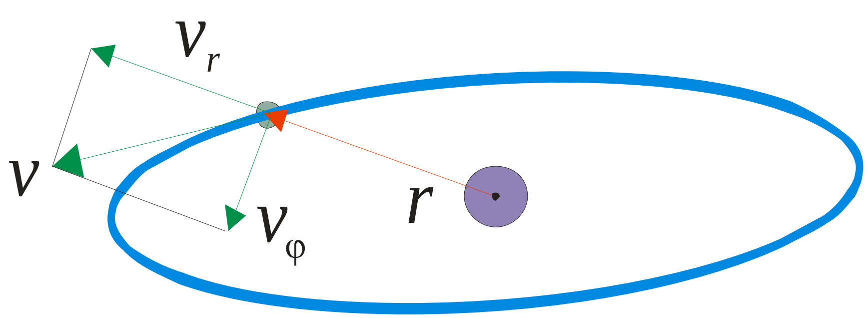
Die Bahnkurve des Mondes (Ellipsenbahnen) wird in ebenen Polarkoordinaten beschrieben:

$$\vec{r} = (r, \varphi)$$

Die Bahngeschwindigkeit (und damit die kinetische Energie) enthält entsprechend tangentiale und radiale Anteile:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2)$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$
$$= E_{kin}^{tang} + E_{kin}^{rad}$$

Hier sind v_r und v_φ die Radial- bzw. Winkelgeschwindigkeit (für eine Kreisbahn würde $v_r = 0$ gelten).



Der Betrag des Drehimpulses

$$L = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const.$$

und die Gesamtenergie sind konstant:

$$E = E_{pot} + \frac{1}{2}mv^2$$
$$= E_{pot} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} = const.$$

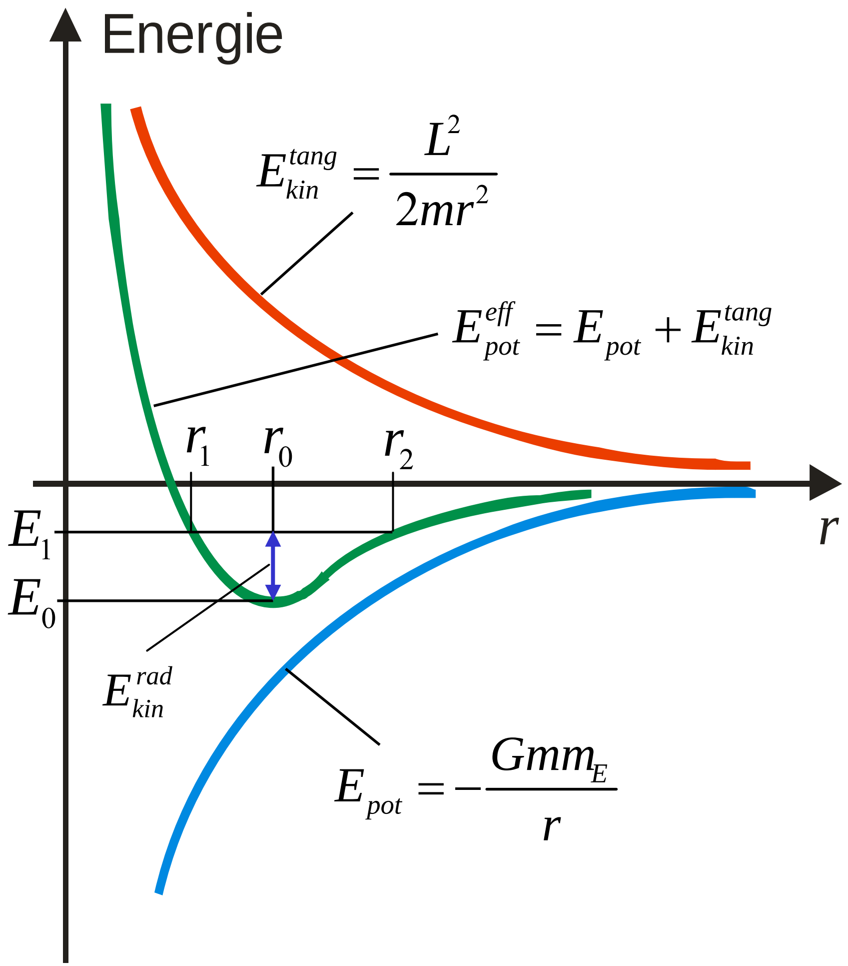
Die potentielle Energie war

$$E_{pot} = -G\frac{m\,m_E}{r}$$

Die Differenz aus Gesamtenergie E und radialer kinetischer Energie $E_{kin}{}^{rad}$ bildet die effektive potentielle Energie $E_{pot}{}^{eff}$

$$E_{pot}^{eff} = E_{pot} + E_{kin}^{tang} = E - E_{kin}^{rad}$$

Trägt man das effektive Potential als Funktion des Bahnradius r auf, so lassen sich die möglichen Bahnkurven des Planeten ablesen:



Die kleinste mögliche Energie E_0 führt zu einer Kreisbahn des Planeten mit konstantem Radius r_0. Diese Energie entspricht gerade dem Minimum des effektiven Potentials; in diesem Fall ist die radiale kinetische Energie gleich Null.

Besitzt der Planet eine von Null verschiedene radiale kinetische Energie, so gilt

$$E_{kin}^{rad} = E_1 - E_{pot}^{eff} > 0$$

Der Planet beschreibt nun eine Ellipsenbahn mit den beiden Halbachsen r_1, r_2.

Nimmt die radiale kinetische Energie weiter zu, $E_{kin}^{rad} > -E_{pot}^{eff}$, so wird der Planet zum Kometen: Er kann nun auf einer halboffenen Kometenbahn das anziehende Gravitationspotential verlassen.

5.7 Reibungskräfte

Reibungskräfte treten immer dann auf, wenn sich Grenzflächen zweier Körper mit einer Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen. Dabei wird kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt.

Eine allgemeingültige Beschreibung der Reibung ist schwierig. Empirisch findet man häufig für Reibungskräfte F_R charakteristische Abhängigkeiten von der Geschwindigkeit v :

$$F_R(v) = a\,v^n \;, \quad a : \text{Konstante}$$

$n=0$: Coulomb-Reibung oder Festkörperreibung, unabhängig von der Geschwindigkeit,

$n=1$: Stokes-Reibung oder viskose Reibung (gilt z.B. fluide Medien und geringe Geschwindigkeiten),

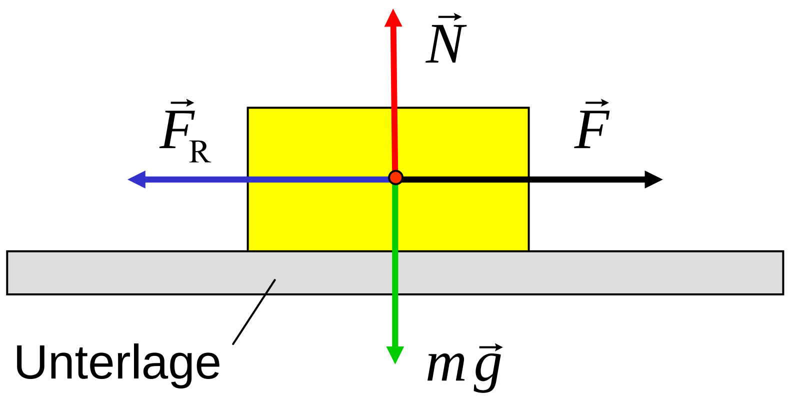
$n=2$: Newton-Reibung (fluide Medien bei bei hohen Geschwindigkeiten, beschreibt turbulente Strömungen).

Coulomb-Reibung

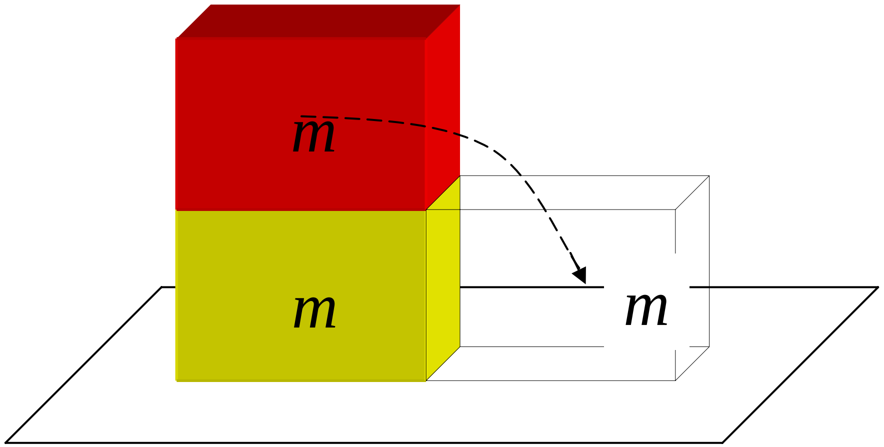
Die Reibungskraft ist unabhängig von der Geschwindigkeit und hängt von der Normalkraft senkrecht zur Grenzfläche ab:

$$\left|\vec{F}_\mathrm{R}\right| = \mu \left|\vec{N}\right|$$

μ = Reibungskoeffizient



Die Kraft $\vec{F}_R$ steht parallel zu den sich berührenden Flächen. Empirisch findet man, dass bei gleicher Masse die Reibungskraft (und damit μ) unabhängig von der Größe der Auflagefläche ist:



Wenn keine Kraft wirkt, so gilt

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

So lange der Körper noch nicht gleitet ist

$$\vec{F}_R = -\vec{F}$$

Es wird unterschieden zwischen zwei unterschiedlichen Arten von Reibung:

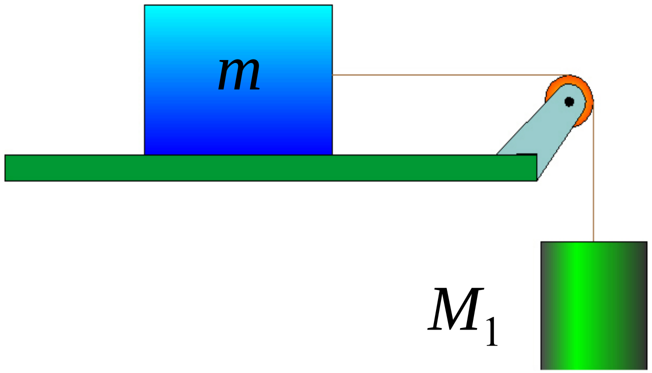
Haftreibung $\vec{F}_{R,H}$, die Masse ist in Ruhe

Gleitreibung $\vec{F}_{R,G}$, die Masse wird bewegt

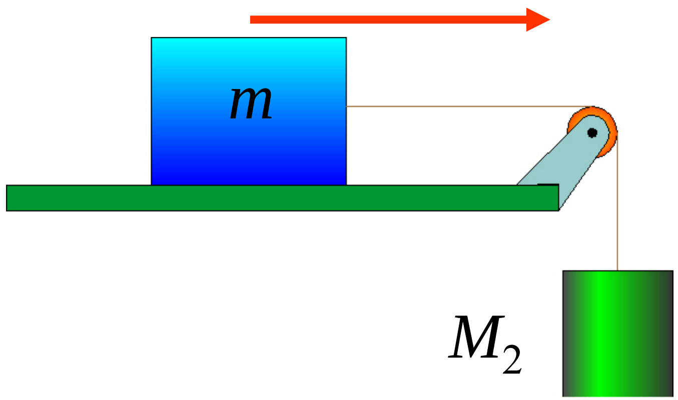
Dabei gilt immer:

$$\vec{F}_{R,H} > \vec{F}_{R,G}$$

d.h. die Haftreibung ist immer größer als die Gleitreibung.

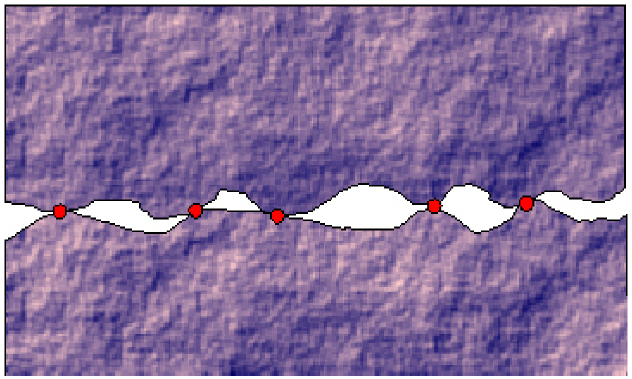


Masse m gleitet nicht, falls $M_1 g < \mu_s m g$



Masse gleitet wenn $M_2 g \geq \mu_s m\, g$

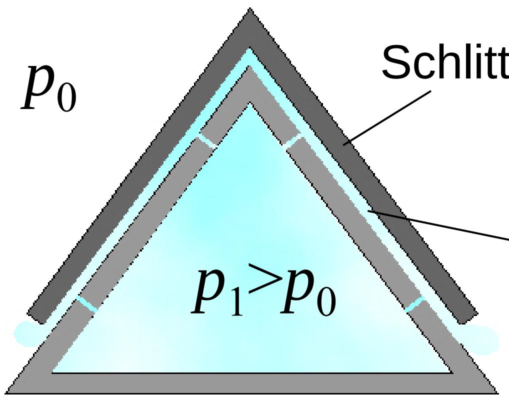
Die Haft- und Gleitreibungskoeffizienten μ_S und μ_G sind stark abhängig von der Beschaffenheit der jeweiligen Oberflächen (glatt, rauh, feucht, ...):

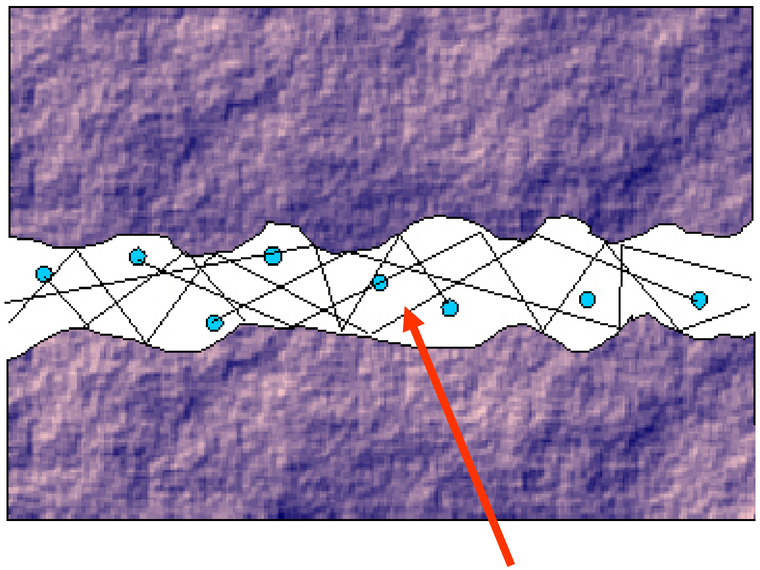


Beispiele für Reibungskoeffizienten:

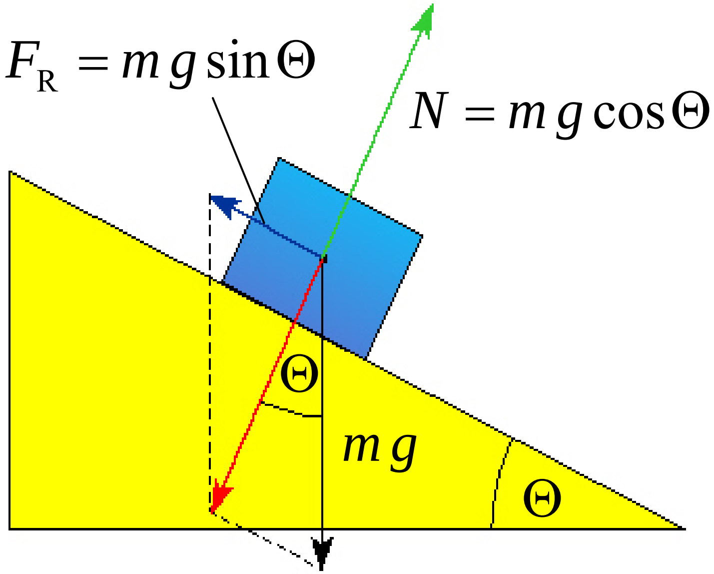
Flächen	μ_G	μ_H
Glas auf Glas	0.4	0.9 – 1
Glas auf Metall	0.2-0.3	0.5 – 0.7
Metall auf Metall		0.3 – 1
Stahl auf Stahl	0.6	0.7
Stahl auf Stahl Mit Öl dazwischen	0.03-0.11	0.05-0.13
Teflon auf Metall	0.04	0.04
Gelenk mit Gelenk-flüssigkeit		0.003 sehr klein !
Gummi auf Beton (naß)	0.25	0.3
Gummi auf Beton (trocken)	0.8	1 – 4 z.B. Reifen

Prinzip der Luftkissenschiene zur starken Verringerung der Reibung:





Messung von μ_S an der schiefen Ebene



Der Winkel Θ wird solange erhöht, bis der Körper zu gleiten beginnt.

$$\mu_s = \frac{F_R}{N} = \frac{m\,g\sin\Theta_{max}}{m\,g\cos\Theta_{max}} = \tan\Theta_{max}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_s = \tan\Theta_{max}$$

Stokessche Reibung

Die Stokessche Reibung beruht auf dem Modell der laminaren Strömung. Hierbei wird angenommen, dass zwei Grenzflächen eines Festkörpers und eines fluiden (Gas, Flüssigkeit) Mediums (oder zweier Fluide) in Schichten aufeinander gleiten. Für die Größe der Reibungskraft ist die Zähigkeit (Viskosität) des Mediums die entscheidende Größe.

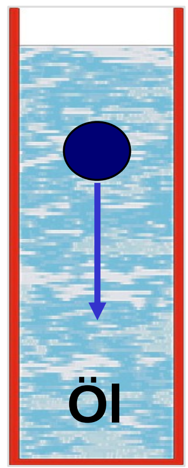
Für eine Folge von aufeinander gleitenden Schichten mit der Fläche A und dem Geschwindigkeitsgradienten dv/dx (senkrecht zur Fläche) erhält man zunächst allgemein die so genannte Newtonsche Reibungsformel

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Für das (langsame) Fallen einer Kugel mit Radius R im viskosen Medium mit (dynamischer) Viskosität η (längere Rechnung) lautet das Stokessche Gesetz

$$F_R = 6\pi\eta R v$$

Beispiel: Fallviskosimeter



Kugel: Radius R

Dichte ρ_K

Volumen $V_K = 4\pi R^3/3$

Masse $m = r_K V_K$

Öl: Dichte ρ

dyn. Viskosität η

$$F_R = F_G - F_{Auftrieb}$$

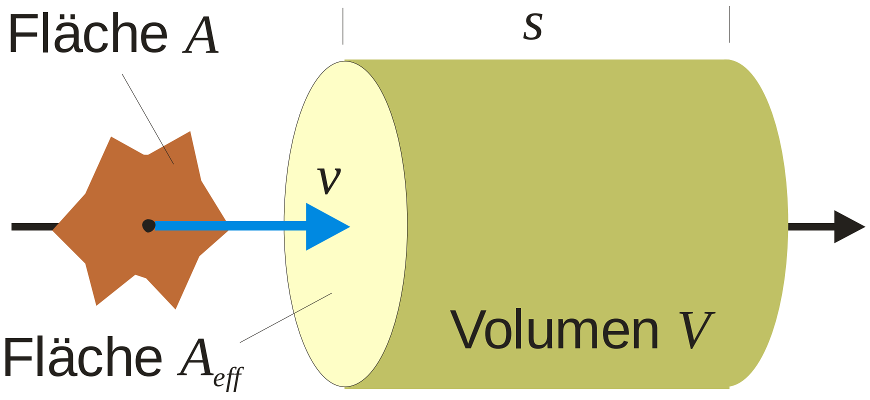
$$6\pi\eta R v = 4/3\,\pi R^3(\rho_K - \rho)g$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{2g(\rho_K - \rho)}{9\eta}$$

Turbulente Strömungen

Bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten wird kinetische Energie auf das umgebende Medium übertragen; es kommt insbesondere zur Wirbelbildung.

Modell: Ein Körper mit Querschnittsfläche A bewegt sich mit Geschwindigkeit v durch ein Medium. Dabei beschleunigt er das (Luft-) Volumen $V = sA_{eff}$ auf die gleiche Geschwindigkeit:



$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = vt$$

Volumen: $V = sA_{eff} = A_{eff} vt$

Masse: $m = V\rho_{Luft} = A_{eff} vt\rho_{Luft}$

Auf das (Luft-) Volumen übertragene kinetische Energie E:

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} A_{eff} t\rho_{Luft} v^3$$

Interpretation: Arbeit W wird geleistet gegen die Reibungskraft F_R auf Strecke s:

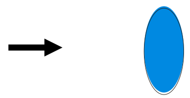
$$W = F_R\, s = \frac{1}{2} A_{eff} t\rho_{Luft} v^3$$

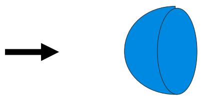
$$\Leftrightarrow F_R = \frac{W}{s} = \frac{W}{vt} = \frac{1}{2} A_{eff} \rho_{Luft} v^2$$

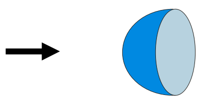
Das Verhältnis aus effektiver Fläche A_{eff} und Querschnittsfläche A des Körpers wird als Widerstandsbeiwert c_W:

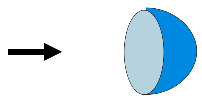
$$c_W = \frac{A_{eff}}{A} \quad \Leftrightarrow \quad F_R = \frac{1}{2} c_W A \rho_{Luft} v^2$$

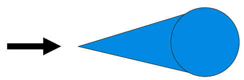
Beispiele für Widerstandsbeiwerte c_W:

Kreisplatte: $c_W = 1.1$ 

Halbkugel (1): $c_W = 0.4$ 

Halbkugel (2): $c_W = 0.34$ 

Halbkugel (3): $c_W = 1.33$ 

30°-Kegel: $c_W = 0.34$ 

Flügelprofil: $c_W \approx 0.1$ 

Beispiel: Fallschirmspringer

Ein Fallschirmspringer mit der Masse $m = 100$ kg und der Querschnittsfläche $A = 1$ m² springt aus großer Höhe mit dem Fallschirm ab. Seinen Widerstandsbeiwert kann er von $c_{W,1} = 0.5$ (gestreckt) über $c_{W,2} = 1$ (waagerecht) bis $c_{W,3} = 20$ (offener Fallschirm) verändern. Gesucht ist die Landegeschwindigkeit v.

$$F_G = F_R$$

$$\Leftrightarrow mg = \frac{1}{2} c_W A \rho_{Luft} v^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A \rho_{Luft}}}$$

Zahlenwerte:

$v_1 = 55$ m/s , $v_2 = 39$ m/s , $v_3 = 8.7$ m/s