Inhalt der Vorlesung Experimentalphysik I

Teil 1: Mechanik

1. Physikalische Größen und Einheiten
2. Kinematik von Massepunkten
3. Dynamik von Massepunkten
4. Gravitation
   - 4.1 Keplersche Gesetze
   - 4.2 Newtonsches Gravitationsgesetz
   - 4.3 Messmethoden: Gravitationswaage
5. Energie und Arbeit
6. Bewegte Bezugsysteme
7. ...

4. Gravitation

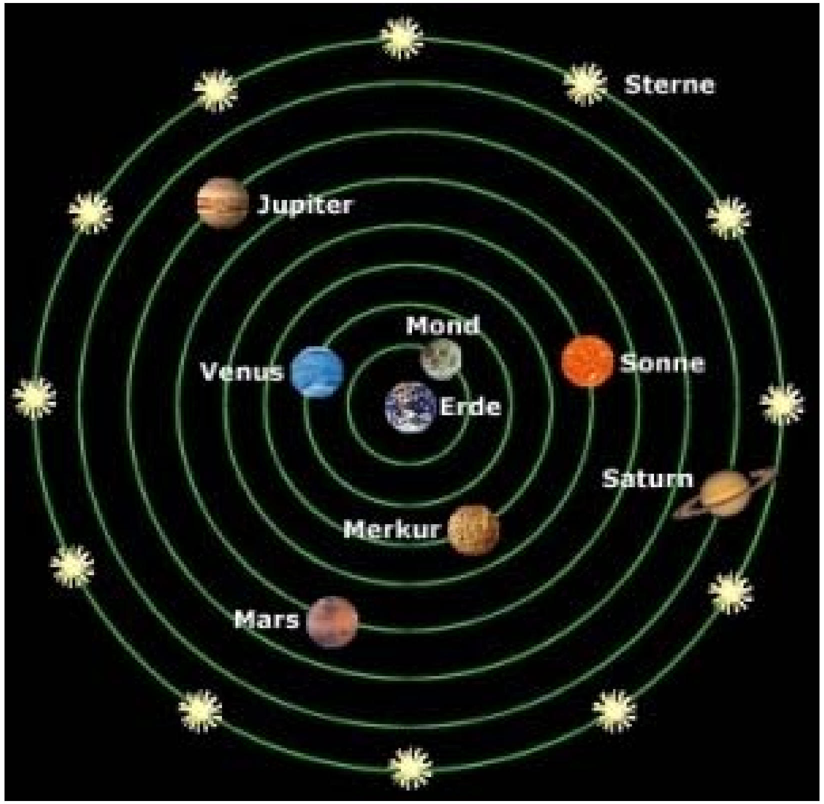
Aus dem vorherigen Kapitel ist bekannt, dass in einem Zentralkraftfeld wie dem Gravitationsfeld der Drehimpuls konstant ist:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{0}$$

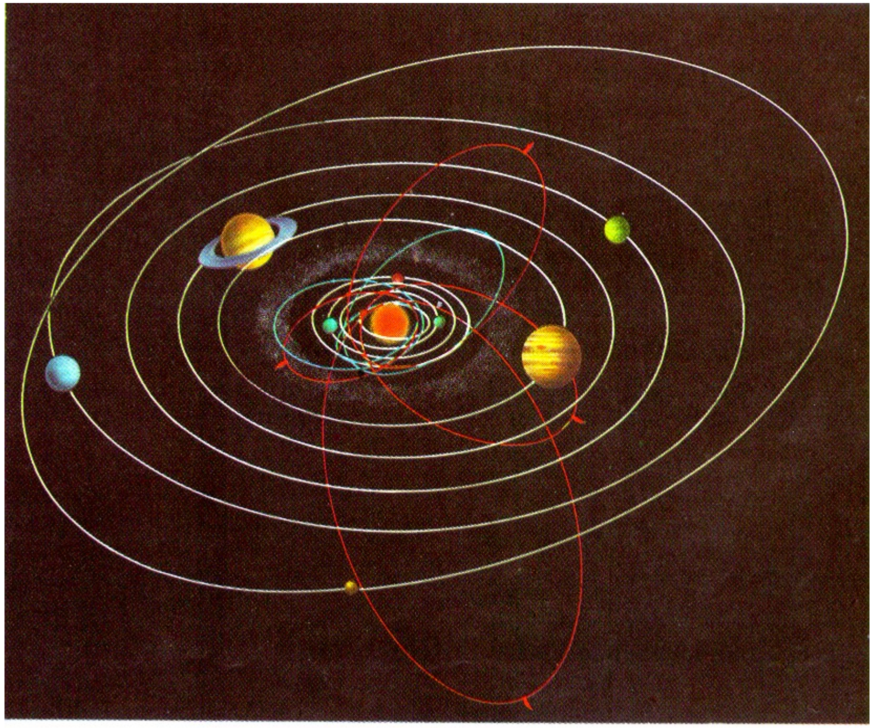
Die Bewegung von Planeten im Weltall erfolgt daher in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor um die Sonne.

Im Gegensatz zum geozentrischen Welt-bild mit der Erde im Mittelpunkt bewegen sich die Planeten im heliozentrischen Weltbild auf Ellipsenbahnen um die Sonne.

Geozentrisches Weltbild



Heliozentrisches Weltbild



Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Die Sonne steht dabei in einem Brennpunkt der Ellipse.

Erschwert wird die Planetenbeobachtung durch die Kreisbewegung der Erde, welche zu schleifenartigen Planetenbahnen (von der Erde betrachtet) führt.

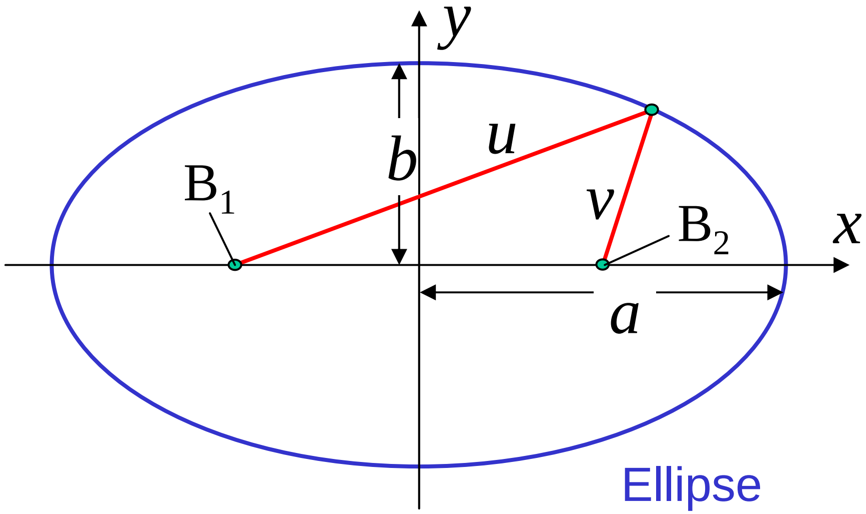
4.1 Keplersche Gesetze

Die Beobachtung der Planetenbahnen durch Kepler (1609-1619) führt auf die drei Keplerschen Gesetze:

Astronomica Nova (1609)
Harmonici Mundi (1619)

Eine Ellipse ist eine geschlossene Kurve mit der bestimmenden Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



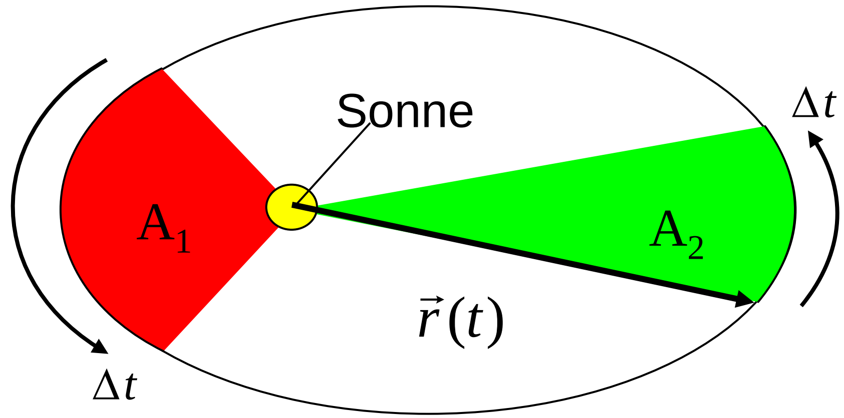
Die Brennpunkte sind B_1 und B_2. Für die Verbindungslinien zu jedem Punkt der Ellipse gilt $u + v = \text{const.}$. Im Grenzfall $a = b$ erhält man einen Kreis.

1. Keplersches Gesetz

"Die Planetenbewegung erfolgt auf Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem der Brennpunkte."

2. Keplersches Gesetz

"Der Fahrstrahl $\vec{r}(t)$ (Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen."



$$\frac{dA}{dt}=const.$$

3. Keplersches Gesetz

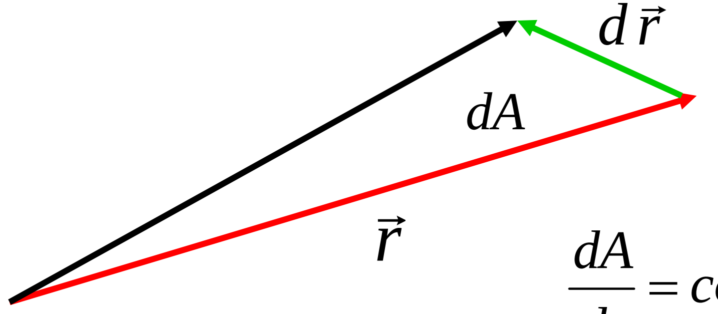
"Die Quadrate der Planetenumlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachsen (dies ist der mittlere Abstand Sonne-Planet)."

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_i^2}{a_i^3} = const. \;\; \forall i$$

4.2 Newtonsches Gravitationsgesetz

Ausgangspunkt sind das 1. und 2. Keplersche Gesetz:

Für die in der Zeit dt überstrichene Fläche dA gilt:



$$\frac{dA}{dt} = const.$$

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\, d\vec{r}\right|$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\,\vec{v}\right| dt$$

Es folgt weiter

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\,\vec{v}\right|$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times \vec{p}\right|$$

$$= \frac{1}{2m} L = const.$$

Damit gilt

$$A(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2m} \left|\vec{L}\right| \Delta t$$

d.h. das 2. Keplersche Gesetz folgt aus der Drehimpulserhaltung für Zentralkraftfelder $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$.

Nach dem 3. Newtonschen Axiom üben zwei Massen gleich große Kräfte aufeinander aus, d.h. es muss gelten $F \sim m_1 m_2$.

Aus den Vorüberlegungen resultiert der Ansatz für die Gravitationskraft F_G:

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = G\, m_1\, m_2\; f(r)\,\hat{r}$$

mit der Gravitationskonstante G als Proportionalitätskonstante.

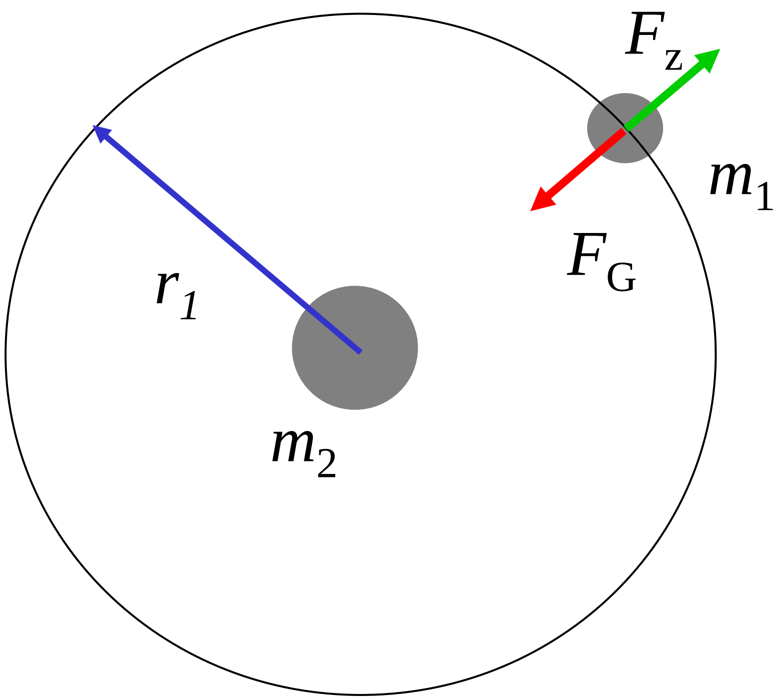
Ein Vektor in radialer Richtung mit dem Betrag 1 wird als (radialer) Einheitsvektor bezeichnet. Mögliche Schreibweisen sind z.B.

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r = \hat{e}_r$$

Eine "spezielle" Ellipsenbahn ist die Kreisbahn mit Radius r. Dann wirkt die Gravitationskraft als Zentripetalkraft und ist entgegengesetzt gleich der Zentrifugalkraft F_z.

Ein Körper der Masse m_1 kreise um die Masse m_2 auf einer Bahn mit Radius r_1. Das Kräftegleichgewicht lautet dann

$$m_1\,\omega_1^2\, r_1 = G\, m_1\, m_2\; f(r_1)$$



Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt

$$\omega_1^2 \propto \frac{1}{T_1^2} \propto \frac{1}{r_1^3}$$

$$\Rightarrow f(r_1) = \frac{1}{r_1^2}$$

Damit erhält man das Newtonsche Gravitationsgesetz

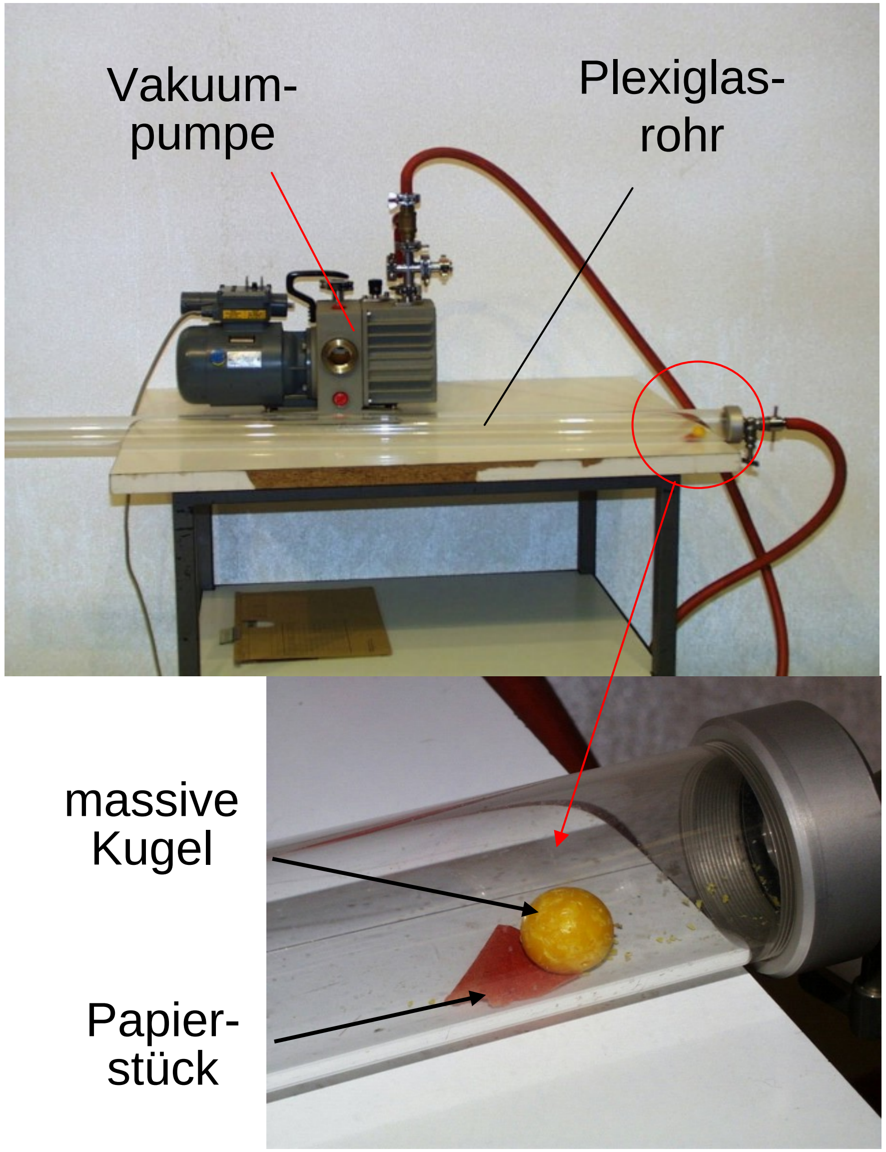
$$\vec{F}_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

mit $r = |r_2 - r_1|$ als Abstand der beiden Massen und der Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

Tabelle 10.1 Messungen von G

Experimentator	Jahr	Methode	G (10^{-11} N · m^2/kg^2)
Cavendish	1798	Torsionswaage, Ablenkung	6,754
Poynting	1891	Gewöhnliche Waage	6,698
Boys	1895	Torsionswaage, Ablenkung	6,658
von Eötvös	1896	Torsionswaage, Ablenkung	6,65
Heyl	1930	Torsionswaage, Periode	
		Gold	6,678
		Platin	6,664
		Glas	6,674
Zahradniček	1933	Torsionswaage, Resonanz	6,659
Heyl und Chrzanowski	1942	Torsionswaage, Periode	6,673
Luther und Towler	1982	Torsionswaage, Periode	6,6726

Beispiel: Freier Fall im Vakuum



Fall in Luft

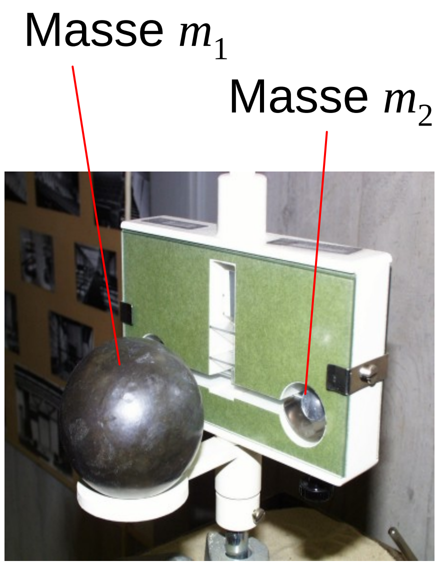
Fall im Vakuum

In Luft wirkt die Reibungskraft, die das Papierstück abbremst. Im Vakuum fallen die Kugel und das Papier gleich schnell.

4.3 Messmethoden: Gravitationswaage

Versuch: Messung der Gravitationskonstante nach Cavendish (1798)

Gravitationswaage



Bei der "Beschleunigungsmethode" werden die Massen m_2 in Richtung von m_1 beschleunigt; der zurückgelegte Weg (gemessen mit Lichtzeiger) aufgetragen gegen t^2 ergibt eine Gerade, aus der G ermittelt werden kann.

Anordnung der Kugeln